Vorfassung von: Leuders, T. & Holzäpfel, L. (2011): Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. Unterrichtswissenschaft 39, S.213-230

Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht

Timo Leuders und Lars Holzäpfel

In den letzten Jahren stößt man in der Unterrichts- und Bildungsforschung zur Domäne Mathematik vermehrt auf den Begriff der „kognitiven Aktivierung". Dabei erscheint dieses Konstrukt ähnlich schemenhaft zu bleiben wie vor Kurzem der inzwischen etablierte Begriff „Kompetenz"; zu dem es inzwischen eine lebendige wissenschaftliche Auseinandersetzung gibt. Ziel dieses Beitrags ist es, aktuelle Konzepte kognitiver Aktivierung in der Bildungsforschung zu beleuchten und aus Perspektive der Mathematikdidaktik darauf hinzuweisen, welche bewährten fachdidaktischen Konzepte und Befunde bereits enge Bezüge zur kognitiven Aktivierung aufweisen. Dabei erweist es sich als nützlich, den Aktivierungsbegriff auf den Kompetenzbegriff zu beziehen. Damit wollen wir eine konzeptuelle Brücke zwischen Bildungs- und Unterrichtsforschung sowie fachdidaktischer Forschung schlagen und zu einer eindeutigeren und systematischeren Verwendung des Aktivierungsbegriffs beitragen.

1. Was ist eigentlich „kognitive Aktivierung"?

In aktuellen Arbeiten werden solche Lerngelegenheiten als „kognitiv aktivierend" bezeichnet, durch die alle Lernenden zur aktiven Auseinandersetzung mit den Lerninhalten auf einem für sie optimalen Niveau angeregt werden (z. B. Baumert und Köller, 2000; Krauss et al. 2004; Kunter et al., 2005). Die verschiedenen Forschungsergebnisse dazu sind aufgrund unterschiedlicher Operationalisierungen jedoch nur bedingt miteinander vergleichbar. Dennoch kristallisieren sich Unterrichtsmerkmale heraus, die als konstitutiv für gelten können. So ist ein Unterricht z.B. nach Hugener, Pauli und Reusser (2007) kognitiv aktivierend,

- wenn die Lehrperson mit Aufgaben das Denken der Lernenden auf einem hohen kognitiven Niveau anregt,
- wenn sie an deren Vorwissen anknüpft und dieses aktiviert
- wenn sie Lernende eigene Ideen, Konzepte, Lösungen, etc. erklären lässt und damit flexibel und „evolutionär" umgeht.

Inspiriert werden solche Definitionen von einem Idealbild konstruktivistischen Lernens (Brophy, 2002), von empirischen Erkenntnissen zur Effektivität bestimmter Lernszenarien (De Corte, Verschaffel et al. 2003; Hiebert und Grouws, 2007; Lipowsky et al., 2009) bzw. von international vergleichenden Unterrichtsanalysen aus in large-scale assessments erfolgreichen Ländern. Einen starken Einfluss auf die Beurteilung der „kognitiven Qualität" von Unterricht hatten Deutschland oder den USA die TIMSS-Videostudien (Stigler und Hiebert, 1999). Japanischer Unterricht erschien aus vergleichender Sicht weitaus reichhaltiger an kognitiven Herausforderungen (etwa durch ein problemlösendes Vorgehen oder einen offenen Austausch von Lösungen) als das fragend-entwickelnde Unterrichtsmuster in Deutschland (Neubrand, 1998; Klieme und Bos, 2000; Leuders, 2001). In der Mathematikdidaktik hat dies zu Vorschlägen kognitiv anregender Unterrichts- und Aufgabenmodelle geführt (z.B. der „open ended approach" nach Becker und Shimada, 1997, via Blum, 1998).

In der Forschung wird kognitiv anregender Unterricht sehr unterschiedlich operationalisiert: anhand von Merkmalen eingesetzter Aufgaben (z.B. Neubrand, 2002; Blum et al., 2004; Büchter und Leuders, 2005; Jordan et al., 2008; Maier et al. 2010), anhand beobachtbarer Unterrichtsmerkmale (z.B. Pauli et. al., 2008; Kleinknecht, 2010) oder auch anhand von Wahrnehmungen von Lehrkräften und Schülern (Kunter et al., 2005). Problematisch am aufgabenbezogenen Vorgehen ist der Schluss vom kognitiven Potenzial der Aufgaben auf die kognitive Qualität der tatsächlichen Aufgabenbearbeitung (Hiebert et. al, 2003). Problematisch sind auch Erhebungen der Wahrnehmungen von Lehrkräften und Schülern: Nach Kunter et al. (2008) finden Hauptschüler ihren Mathematikunterricht wesentlich stärker kognitiv herausfordernd als ihre Gymnasialschüler, Hauptschullehrkräfte halten jedoch umgelehrt kognitiver Aktivierung für weniger relevant als ihre Gymnasiallehrkräfte. Hier kann man vermuten, dass Hauptschullehrkräfte ihren Lernenden schlicht geringere Leistungsfähigkeit zumessen und Hauptschüler den Unterricht schlicht schwierig finden. Über die kognitiv aktivierende Qualität des Unterrichts sagt das nur wenig aus. Es scheint also, dass für die valide Erfassung von „kognitiver Aktivierung" vor allem direktere Ansätzen wie etwa videobasierte Ratinganalysen (z.B. in der schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis", Klieme et al., 2006) wertvoll sind.Seit wenigen Jahren richtet sich dabei Aufmerksamkeit stärker auf fachlich-inhaltliche Aspekte, wie z.B. die kognitive Aktivierung in Theoriephasen (Drollinger-Vetter und Lipowsky, 2006) oder die Kohärenz der begrifflichen Struktur (Pauli et al., 2008). In der Hinzunahme solcher fachdidaktische orientiert Kriterien sehen wir eine Chance für die Weiterentwicklung des Konzeptes der „kognitiven Aktivierung".

2. „Aktivierung" und „Kompetenzen" als komplementäre Konzepte

Während „Aktivierung" versucht, lernwirksame Lern*prozesses* zu beschreiben, will „Kompetenz" Lern*ergebnisse*präzisieren. Auch wenn der Kompetenzbegriff erst seit einigen Jahren intensiver verwendet und beforscht wird (Weinert, 2001; Klieme und Leutner, 2006; Leuders, im Druck), so dienten seine verschiedenen Facetten von je her als Orientierung für schulisches (Mathematik)Lernen (vgl. Winter, 1975, Anderson und Krathwohl, 2001). Im Kompetenzkonzept werden diese Facetten in ihrer Gesamtheit und ihrer funktionalen Anwendung betrachtet

Facette (1): Deklaratives und prozedurales Wissen („Wissen und Können"), also das was man landläufig als „Stoffbeherrschung" oder bildungstheoretisch ausgedrückt „materiale Bildung" bezeichnen würde.
Facette (2): Strategisches Wissen, also z.B. kognitive oder metakognitive Strategien – fachspezifisch gehören so genannte „allgemeine Kompetenzen" oder „Prozesskompetenzen" (KMK, 2003, NCTM, 2000) wie Problemlösen oder Modellieren dazu, was man bildungstheoretisch wiederum der „formalen Bildung" zurechnen würde.
Facette (3): Überzeugungen, z.B. zum eigenen Lernen, zur Nützlichkeit des erworbenen Wissens, zur Qualität und zur Genese von fachlichem Wissen (Epistemologien) oder zur Bedeutung einer Disziplin bzw. des Schulfaches („Mathematikbild").
Heymann (1996) hebt als Ziel allgemeinbildenden Mathematikunterrichts auch personale und soziale Kompetenzen hervor und beschreibt eine dazu geeignete allgemeinbildende Unterrichtskultur. Obwohl diese vierte Facette ebenfalls explizit Teil des Kompetenzkonzeptes ist (Weinert, 2001: „Fähigkeiten verantwortungsvoll einsetzen"), verzichten wir an dieser Stelle auf eine vertiefte Analyse.

Hier wird ein enger Bezug zwischen dem Aktivierungs- und Kompetenzkonzept deutlich: Elemente kognitiver Aktivierung müssen in Bezug gesetzt werden zu den durch sie zu erreichenden Kompetenzzielen. Wird dieser Bezug nicht explizit gemacht oder werden bestimmte Kompetenzfacetten implizit ausgeklammert, so besteht die Gefahr einer unsachgemäßen Blickverengung, wie nachfolgend dargestellt wird.

Studien zur Unterrichtsqualität, welche den Leistungszuwachses an fachlichem Wissen wählen (Facette 1) fokussieren bei den Lehr- und Lernprozessen hinsichtlich kognitiver Aktivierung auf solche Aspekte, die vornehmlich einem effektiven und nachhaltigen Wissenserwerb zuträglich sind . Strategisches Wissen (Facette 2), wie z.B. Problemlösekompetenz, werden dabei meist nur implizit mitbetrachtet. Hierzu mehr in 3.2 und 3.3.

Viele Untersuchungen schließen auch auf das Fach gerichtete Überzeugungen (Facette 3) mit ein, welche empirisch weit schwieriger zu erfassen sind. Die Fachdidaktik, die sich ja nicht nur mit der effektiven Vermittlung fachlichen Wissens, sondern auch mit weitergehenden Bildungszielen befasst, beschäftigt hier die Frage, welche Wirkungen bestimmte Unterrichtsformen hinsichtlich des Aufbaus eines angemessenen Mathematikbildes haben. Hier gibt es sowohl in der Erfassung der Lernergebnisse (bisher wesentlich durch Fragebogeninstrumente) als auch bei der Analyse von Ursachen und Prozessen der Veränderung (bisher eher in qualitativen Fallstudien) noch viel Aufklärungsbedarf. Auch hier fragt die Fachdidaktik, welche Formen der kognitiven Aktivierung *explizit* eingesetzt werden können, um diesen Prozess zu optimieren. Hierzu Näheres in 3.4

Bei jeder Definition von kognitiver Aktivierung müssen nicht nur die Lern*ziele*, sondern ebenfalls die Lern*voraussetzungen* der Lernenden beachtet werden – insbesondere wenn kognitiv aktivierender Unterricht bedeutet, dass sich Lernende auf einem ihren Lernvoraussetzungen angemessenen, möglichst hohen kognitiven Niveau mit dem Lerngegenstand befassen.,Das setzt adaptive Lernarrangements voraus, die heterogenen Lerngruppen gerecht werden. In der Mathematikdidaktik wird dies unter den Stichworten „Diagnose“ und „Differenzierung“ vor allem hinsichtlich der Konstruktion praktikabler Unterrichtsmodelle bearbeitet (Hußmann et al., 2007; Sundermann und Selter, 2006).

Was aktiviert werden *soll*, hängt von den intendierten Zielen ab, was aktiviert werden *kann*, hängt von den Lernvoraussetzungen ab. Dies wird in der folgenden Definition kognitiver Aktivierung explizit berücksichtigt.

Mit dem Begriff „kognitive Aktivierung“ werden Qualitätsmerkmale von optimal gestalteten Lerngelegenheiten (Aufgaben, Unterrichtsformen) beschrieben. Die (postulierte) Optimalität bezieht sich auf die Förderung von Kompetenzen in unterschiedlichen Facetten (Wissen, Strategien, Überzeugungen). Sie kann und muss empirisch aufgeklärt werden. Als kognitiv aktivierende Lerngelegenheiten werden vor allem solche angenommen, in denen

- die (unterschiedlichen) kognitiven Voraussetzungen der Lernenden berücksichtigt werden,
- die Lernenden (nach ihren jeweiligen Möglichkeiten) zu anspruchsvollen und auf das Kompetenzziel fokussierenden kognitiven Tätigkeiten angeregt werden und
- in dene die Lernzeit hinsichtlich der zu fördernden Kompetenzfacette umfassend genutzt wird.

Es ist bereits deutlich geworden, dass hier unterschiedliche Traditionen und Disziplinen über dieselben Dinge sprechen. In diesem Beitrag soll um einen die Perspektive der Mathematikdidaktik dargestellt werden, zum anderen begriffliche Brücken über die Mathematikdidaktik hinaus geschlagen werden. Das komplementäre Begriffspaar „Kompetenz“ und „Aktivierung“ erweist es sich dabei als nützlich, um über sowohl altvertraute als auch güngere Konzepte fachlichen Lehrens und Lernens nachzudenken.

3. Beispiele für mathematikdidaktische Aktivierungsmodelle

Im Folgenden sollen einige einflussreiche Ansätze aus der Mathematikdidaktik dargestellt werden, die implizit Bezug nehmen auf das Konzept der „kognitiven Aktivierung“ und die gemäß der vorstehenden Analyse hier einzuordnen sind.

3.1 Konzepte äußerer Aktivierung („Lernen durch Animation und Motivation“)

In der Praxis des Mathematikunterrichts findet man immer wieder Unterrichtsmodelle, die unter Aktivierung von Schülerinnen und Schülern vornehmlich eine äußere Aktivierung verstehen (vgl. Renkl, 2009). Entsprechende didaktische Realisierungen berufen sich gerne auf reformpädagogische Ansätze, wie z.B. die Handlungsorientierung. Ein prägnantes Beispiel liefern Selter und Sundermann (2000), die daran aufzeigen, wie die Absicht, eine „aktivierende Unterrichtsmethode“ einzusetzen, zu absurden Ergebnissen führen kann. In einem Stationenzirkel zur Multiplikation sollen Kinder sich mit einer Taschenlampe Malaufgaben zublinken und ausrechnen, Zahlen auf Fühlkärtchen erfühlen und multiplizieren, die Faktoren einer Malaufgabe auf zwei Schlaginstrumenten hören oder in einem Fischbild die Zahlen der Dreierreihe ausmalen (s. Abb.1). Das Beispiel macht deutlich, wie einzelne Lernqualitäten, denen in der Literatur jeweils durchaus Aktivierungspotential beigemessen wird, unreflektiert zusammengesetzt werden: Die äußere Organisation im Rahmen der Unterrichtsmethode „Stationenlernen“ wird mit aktivem Lernen gleichgesetzt. Zudem sollen unterschiedliche Sinnesmodalitäten nach einem missverstandenen E-I-S-Prinzip (Enaktiv-Ikonisch- Symbolisch, vgl. Bruner, 1974) aktiviert werden, allerdings enthält das Fühlen, Blinken und Hören in diesem Beispiel überhaupt keine multiplikativen Aspekte, die dem Lernziel zuträglich sein könnten.

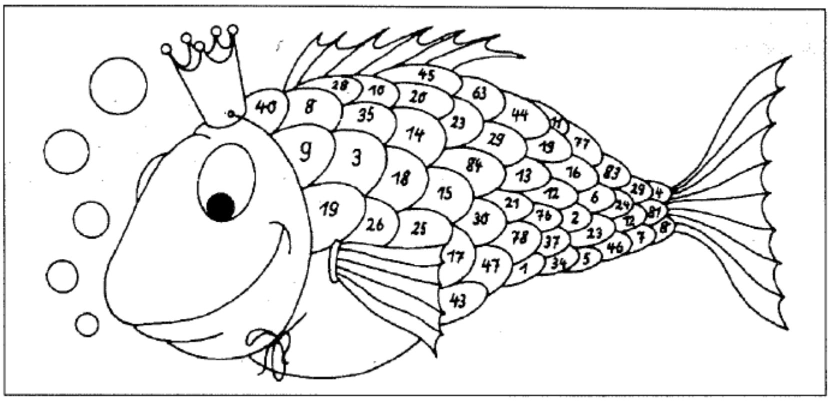


Abb. 1: In diesem Fisch sollen die Schuppen mit Zahlen der Dreierreihe ausgemalt werden.

Eine solche Verkürzung des Aktivierungsverständnisses findet typischerweise dann statt, wenn „allgemeine“ Unterrichtsmethoden unreflektiert und ohne Blick für die Kompetenzziele auf fachspezifische Lerninhalte angewendet werden. Das Beispiel reduziert sich somit auf eine „leerlaufende, äußere Aktivierung“. Ein sinnvoller Einsatz von unterrichtsmethodischen Aktivierungskonzepten hingegen zeichnet sich entsprechend durch eine Passung von Zielen und Methoden aus. So zeigen Barzel, Büchter und Leuders (2008) für eine Reihe von Unterrichtsmethoden auf, wie sie jeweils zu bestimmten fachlichen und überfachlichen Zielen der genannten Facetten passen, und wie sie sich insbesondere *fachbezogen* realisieren lassen.

Das Aufgabenbeispiel in Abb.3 steht auch für den kurzschlüssigen Aufgabentyp der rein „motivationalen“ Aktivierung welcher nach Wittmann (1992) als „bunter Hund“ bezeichnet wird. Das sind Aufgaben, bei denen eine mathematische Lerntätigkeit mit geringem Aufforderungscharakter in eine motivierende, aber unmathematische Beschäftigung integriert wird. Solche Bilder, Puzzles und Kreuzworträtsel lenken nicht nur vom Lernfokus ab (gemäß Facette 1), sie suggerieren auch ein Mathematikbild, in dem es „bunte Fische“ braucht, um von der „grauen Mathematik“ abzulenken, und sind daher lernhinderlich bezüglich Facette (3).

3.2 Kognitive Aktivierung beim Wissenserwerb

Im Folgenden werden einige einflussreiche fachdidaktische Lehr-Lernkonzepte vorgestellt, die im Sinn der fokussierenden kognitiven Aktivierung (Renkl, 209). eine potentiell hohe Wirsamkeit bei Erwerb fachlichen Wissens haben.

3.2.1 Aktivieren von Begriffsverständnis durch operatives Durcharbeiten

Zu den wohl klassischen Aktivierungskonzepten der Mathematikdidaktik gehört das „operative Üben“ nach Aebli (1980), das auf das kognitionstheoretische Modell von Piaget zurückgeht und in der Mathematikdidaktik umfassend rezipiert wurde (Wittmann, 1985). Dabei geht es um das Beherrschen und vertiefte Durchdringen mathematischer Konzepte, welches durch eine operative Durcharbeitung“ einer Vielzahl von Aufgabevarianten gefördert werden soll, etwa durch Variation von Ausgangsdaten oder durch Umkehrung von Aufgabenstellungen (Abb.2)

Angaben zu Zwillingen erfinden
Karl und Johannes sind Zwillinge. Trotzdem sind sie sich gar nicht ähnlich. Welche Größe, welches Gewicht, Alter und Augenfarbe können die beiden haben, wenn die folgenden Durchschnitte stimmen? Gib jeweils mindestens zwei Möglichkeiten an.

a) Durchschnittliche Größe: 155 cm
b) Durchschnittliches Gewicht: 45 kg
c) Durchschnittliches Alter: 12 Jahre 25 Tage 8 Stunden
d) Durchschnittliche Augenfarbe: Graublau
e) Untersuche nun a)-d) für den Fall, dass es sich um Drillinge handelt.

Abb.2: Operative Durcharbeitung des arithmetischen Mittels (nach Leuders, 2006):

3.2.2 Aktivieren von Grundvorstellungen

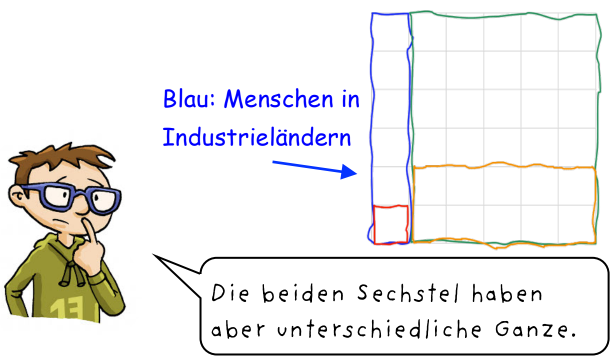
Ein weiteres, in der Mathematikdidaktik entwickelte Konzept der Aktivierung bezieht sich auf die konsequente Einbeziehung von Schülervorstellungen. Hierbei liegt die Annahme zu Grunde, dass mathematische Begriffe durch den Prozess der Abstraktion und fortschreitenden Schematisierung aus Alltagsvorstellungen (oder aus bereits konsolidierten mathematischen Konzepten) entstehen (van Hiele, 1964; Freudenthal, 1983). Dabei zeigt sich empirisch, dass langfristigen Begriffsbildungsprozesse durch Stufen der Konzeptentwicklung und durch Überwinden so genannter epistemologischer Hürden gekennzeichnet werden können (Sierpinska, 1994). In solchen Analysen ist zu erkennen, dass das Lösen mathematischer Probleme nicht allein durch die Anwendung formaler Regeln sondern durch die Anwendung impliziter „mentaler Modelle“ oder „Grundvorstellungen“ beschrieben werden kann (Fischbein, 1989; „Grundvorstellungen“, vom Hofe, 1998). Gegenstand empirischer fachdidaktischer Forschung ist das Aufdecken solcher Grundvorstellungen und ihrer Wirkungsweisen, sowie die Entwicklung von Lehrkonzepten, welche der Entwicklung geeigneter mentaler Modelle bzw. Vorstellungen beim Lerner zuträglich sind. Hierin nähert sich die Mathematikdidaktik an das Paradigma des *conceptual change* aus der Naturwissenschaftsdidaktik an (Posner et al., 1982), welches sich auch für den mathematischen Konzepterwerb als zunehmend fruchtbar erweist (Vosniadou, Verschaffel, 2004; Prediger, 2008).

Eine Studie von Prediger (2008) zu Multiplikation von Brüchen soll dies illustrieren. Siebtklässler des Gymnasiums (N = 81) berechnen zwar das Produkt von Brüchen mehrheitlich fehlerfrei (z.B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$) geben aber an, dass die Multiplikation mit einem Bruch eine Zahl stets vergrößere. Eine Tiefenanalyse von Aufgabenbearbeitungen und begleitenden Interviews legt offen, dass Lernende unterschiedliche individuelle Modelle bzw. Vorstellungen aktivieren: Eine Gruppe überträgt die Vorstellung des Multiplizierens als mehrfaches Addieren fälschlicherweise auf die Bruchmujltiplkation, was bei $\cdot \frac{1}{3}$ nicht funktioniert. Hier besteht also eine epistemologische Hürde, die dem Bruchkonzept inhärent ist und die von den Lernenden explizit erkannt und überwunden werden muss. Andere Lernende hingegen aktivieren die tragfähige Vorstellung einer „Linse“, die den Bruch $\frac{3}{4}$ auf $\frac{1}{3}$ seiner vorherigen Größe verkleinert.

Bei der Gestaltung von Lernumgebungen können solche Befunde in Form eines „Aktivierungskonzepts“ konstruktiv umgesetzt werden: Lernende bekommen Unterstützung, geeignete Vorstellungen aufzubauen und dabei implizite Vorstellungen an passender Stelle zu explizieren und umzustrukturieren. Solche Unterstützung kann im Angebot situationaler oder ikonischer Repräsentationen für die aufzubauenden Vorstellungen bestehen (Abb.3). Oder es werden bestehende Vorstellungen explizit aufgegriffen und reflektiert (Abb.4, gekürzt). Ziel ist es, dass Lernende solchermaßen entwickelte Grundvorstellungen nachhaltig aktivieren können, um in variablen Problemsituationen nicht nur formal und syntaktisch, sondern inhaltlich-anschaulich zu operieren.

A Weltbevölkerung

Im Jahr 2010 lebten fast 7 Milliarden Menschen auf der Welt. Davon lebten $\frac{1}{6}$ in Industrieländern. Davon wiederum waren $\frac{1}{6}$ Kinder unter 15 Jahren. $\frac{5}{6}$ aller Menschen lebten in Entwicklungsländern, davon waren $\frac{1}{3}$ Kinder.



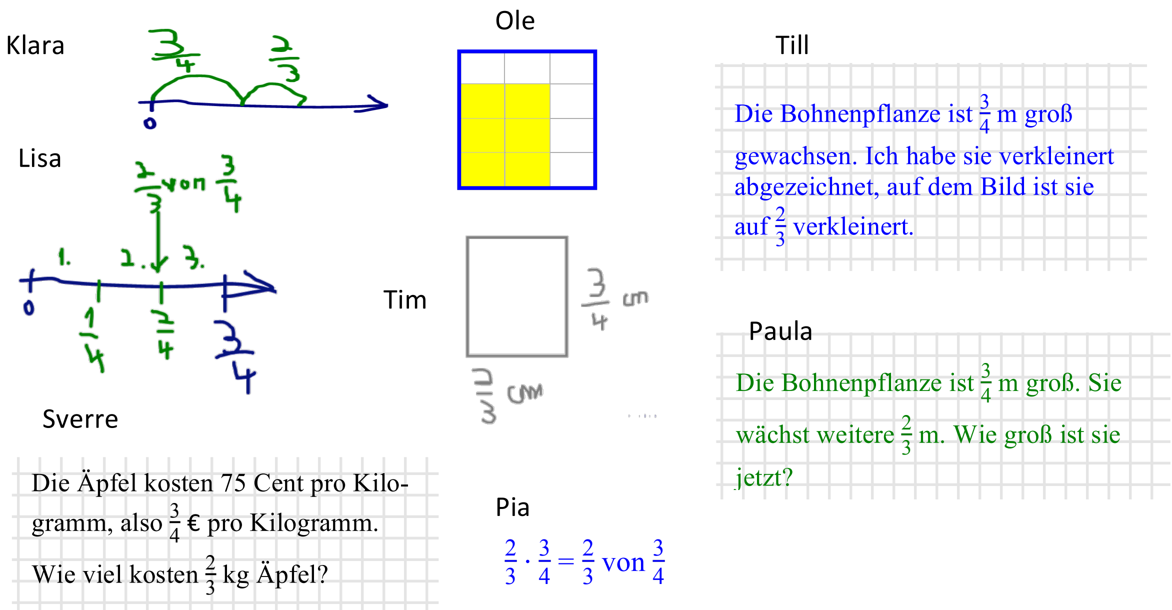
Ole hat zu dem Text ein Quadrat für alle Menschen der Welt gezeichnet.

1. Für welche Gruppe von Menschen steht das grüne Rechteck [rechts oben]?
   Für welche Gruppen stehen das rote und gelbe Rechteck [links bzw. recht unten]?
2. Markiere im Materialbuch alle Kinder der Welt, indem du diese Teile ausmalst.
3. Was meint Ole mit den beiden Sechsteln?

Abb.3: Aktivierung von Vorstellungen durch ikonische Repräsentationen (Prediger et al., i. Vorb.)

B Wie kann man sich das Multiplizieren von Brüchen vorstellen?

Bei den natürlichen Zahlen wie oben habt ihr schon viele Vorstellungen zum Multiplizieren. Und wie kann man sich das Multiplizieren von Brüchen vorstellen? Die Kinder haben auch Situationen und Bilder zur Multiplikation $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$ gesammelt. Welche passen, welche nicht? Erkläre, warum.



Vergleiche die Bilder für die natürlichen Zahlen [aus der vorhergehenden, hier nicht abgebildeten Aufgabe] und für die Brüche: Was ist anders, was ist ähnlich?

Abb.4: Aktivierung von Vorstellungen durch explizite Reflexion von Schemata (ebd.)

Es ist zu wünschen, dass dieses von der Mathematikdidaktik als zentral für Lernprozesse herausgearbeitete Vorstellungskonzept in empirische Studien zur „kognitive Aktivierung" stärker Berücksichtigung findet (wie beispielsweise bereits bei bei Jordan et al. (2008), die die „Grundvorstellungsintensität" von eingesetzten Aufgaben als Indikator für potentiell kognitiv aktivierenden Unterricht verwenden.

3.3 Kognitive Aktivierung beim Strategieerwerb

Obwohl dem Mathematikunterricht landläufig nachgesagt wird, er „schule logisches Denken", wird Mathematik in der Außensicht eher „material" als Ansammlung von Inhalten (Geometrie, Arithmetik, Algebra) wahrgenommen. Während in der Fachdidaktik die prozessualen Aspekte von Mathematik schon immer von hoher Bedeutung waren (Winter, 1975), hat sich mit der „curricularen Wende" der Bildungsstandards durch Orientierung an internationalen Modellen (NCTM 2000) auch in der Praxis die Idee verfestigt, dass so genannte „allgemeine Kompetenzen" bzw. „prozessbezogene Kompetenzen" (KMK, 2003; Barzel et al., 2004) konstitutiv für mathematische Kompetenz sind. Verstanden wird darunter prozedurales und deklaratives Wissen zu typischen epistemischen Prozessen des Faches, also z.B. „Modellieren" (Blum et al. 1989), „Problemlösen" (Schoenfeld, 1985; Reiss, Törner, 2007) oder „Beweisen" (Hanna, 1997).

Viel diskutiert beispielsweise Frage der Aktivierung von **mathematischen Problemlösefähigkeiten.** Einen fachdidaktischen Aktivierungsansatz bieten fachspezifische Strategietrainings Sie unterstützen beispielsweise denn Erwerb und die Stabilisierung von Problemlösetechniken (Heurismen, wie z.B. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, oder die Verwendung einer informativen Figur)durch die kontinuierliche Erarbeitung und Reflexion von Beispielproblemen (Komorek et al, 2004; Bruder und Collet, 2011).

Ein weiterer Aktivierungsansatz besteht in der Bereitstellung eines Problemlöseplans, also einer systematische Abfolge von Schritten, die den Problemlöser unterstützen soll. Dieser Ansatz wird im Folgenden am Beispiel des **Modellierens** dargestellt, welches man auch etwas vereinfachend als „Problemlösen mit der Zusatzanforderung des Übersetzens zwischen Realsituation und Mathematik" beschreiben kann. Im Projekt DISUM (Schukajlow et al., 2010) wurden Lernende beim Modellieren dadurch unterstützt, dass sie sich an einem vierschrittigen Plan orientieren konnten, welcher die wesentlichen Schritte des Modellierungskreislaufes widerspiegelte:

Vier Schritte zur Lösung einer Textaufgabe (Lösungsplan)

1. *Aufgabe verstehen: Was ist gegeben, was ist gesucht?*
2. *Modell erstellen: Welche mathematischen Beziehungen kann ich aufstellen?*
3. *Mathematik benutzen: Wie kann ich die Aufgabe mathematisch lösen?*
4. *Ergebnis erklären: Wie lautet mein Endergebnis? Ist es sinnvoll?*

In einer quasi-experimentellen Studie (N= 96 Realschüler) zeigten sich sowohl signifikante Leistungssteigerungen als auch eine Steigerung der selbst wahrgenommenen Nutzung kognitiver Strategien bei Lernenden, die einen solchen Lösungsplan zur Hand hatten.

Ein in der fachdidaktischen Forschung bislang noch wenig ausgeloteter Ansatz zur strategiebezogenen Aktivierung von Lernenden ist das Lernen aus Lösungsbeispielen, das Reiss und Renkl (2002) exemplarisch für den Bereich des **mathematischen Argumentierens** eingesetzt haben. Dies ist umso erstaunlicher, als in Lehrwerken und im Unterricht tatsächlich oft mit „fertigen Lösungen" gearbeitet wird, allerdings auf eine lernpsychologisch nicht unbedingt optimale Weise.

Ebenfalls Gegenstand fachdidaktischer Forschung ist die mathematikbezogene Kommunikation im Klassenraum. Cohors-Fresenborg et al. (2010) analysieren Lehrer-Schüler-Interaktionen hinsichtlich der Diskursformen mit besonderem Augenmerk auf metakognitive Strategien („Planung", „Reflexion" und „Monitoring"). Um solche Metakognitionen zu aktivieren, schlägt die Gruppe bestimmte Aufgabentypen vor, bei denen Schülerinnen und Schüler zum gegenseitigen Erklären angeregt werden.

Insgesamt ist zu erkennen, dass der fachdidaktische Blick auf den Erwerb strategischer Kompetenzen zwischen unterschiedlichen Bereichen mathematischen Arbeitens (Problemlösen, Modellieren, Argumentieren) differenziert und hierfür spezifische Konzepte entwickelt und untersucht.

3.4 Aktivierung von Überzeugungen

Überzeugungen zur Mathematik (als Schulfach und als Disziplin), so genannte „Mathematikbilder" bei Schülerinnen und Schülern wie bei Lehrkräften sind seit vielen Jahren Forschungsgegenstand in der Mathematikdidaktik und Unterrichtsforschung. Unterschieden werden können hierbei eher dynamische Auffassungen von „Mathematik als Prozess" und eher statische Auffassungen von „Mathematik als System" oder als „Werkzeugkasten". Befunde für Deutschland zeigen eine Dominanz der statischen Sicht, was in Zusammenhang mit einem eher am rezeptiven Kalküllernen als am aktiven Problemlösen orientierten Mathematikunterricht angesehen wird (Stigler et al., 1999; Pehkonen und

Törner, 1999). Neben der empirischen Identifikation von Typen von Überzeugungen ist vor allem die Frage nach der Entstehung solcher Mathematikbilder von hohem Interesse. Dazu gibt es – wohl aufgrund der Langfristigkeit und Stabilität und auch der problematischen Erfassung über Fragebögen – deutlich mehr qualitative als quantitative empirische Forschung (Furinghetti und Pehkonen, 2002; Staub und Stern, 2002). Trotz der empirisch noch unbefriedigenden Situation findet man in der Fachdidaktik eine ganze Reihe von Konzepten für Unterricht, der nicht nur dem Wissenserwerb, sondern auch dem Aufbau eines angemessenen Mathematikbildes dient.

Ein viel beachteter Aktivierungsansatz besteht in der systematischen Berücksichtigung von authentischen Realitätsbzügen (Kaiser, 1991; de Lange et al., 1993). Anstelle von „Einkleidungsaufgaben“ und Pseudokontexten“, sollen realistische Anwendungskontexte nicht nur die Erarbeitung mathematischer Inhalte stützen (Facette 1), sondern zugleich auch ein angemessenes Bild von Mathematik als universellem Modellierungswerkzeug fördern (Facette 3). An diesem Ansatz wird allerdings kritisch diskutiert, dass eine Vernachlässigung rein innermathematischer Sichtweisen stattfindet (Winter 1995), und dass durchaus auch unrealistische Einkleidungen lernförderlich sein können – z.B. die Pizza zur Veranschaulichung von Bruchproblemen.

Der wohl fruchtbarste Ansatz zur Aktivierung angemessener Überzeugungen zur epistemologischen Struktur der Mathematik besteht im so genannten „genetischen Lernen“, präziser: im Ansatz der „problemorientierten, genetischen Begriffskonstruktion“ (Wagenschein, 1962; Freudenthal, 1991; Winter, 1983). Kern des Ansatzes ist es, für mathematische Inhalte geeignete Problemsituationen bereitzustellen, anhand derer Schülerinnen und Schüler mathematische Konzepte aktiv (durchaus mit Unterstützung einer Lehrperson) konstruieren können (Man könnte diesen Ansatz auch als „fachlich substantielle guided discovery“ bezeichnen) . Abb.5 zeigt ein Unterrichtsbeispiel für die begriffsgenetische Erarbeitung von „arithmetischem Mittel“ (Barzel, Leuders , i. Vorb.).

Wer hat die größeren Füße?
In der Klasse von Till und Merve hat eine Gruppe Mädchen und Jungen ihre Fußlängen gemessen und an die Tafel geschrieben. Erkläre, was Till und Merve meinen. Überlege dir einen Verbesserungsvorschlag.

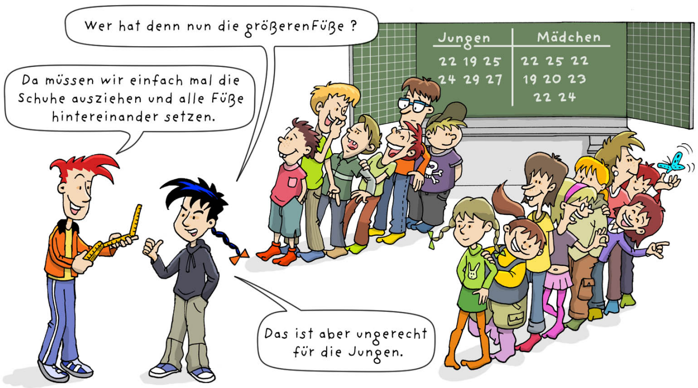


Abb.6 Eine begriffsgenetische Aufgabe/Unterrichtssituation: Lernende entwickeln das arithmetische Mittel“ als Lösung für ein anschauliches Problem

Genetische Lernsituationen verbinden also einen lerneraktiven Begriffsaufbau (Facette 1) mit dem Aufbau eines angemessenen Mathematikbildes bei den Lernenden (Facette 3), das etwa so lauten könnte: Mathematische Begriffe und Konzepte sind nicht nur Teile fertiger Mathematik als statischem Gedankengebäude, sondern Ergebnisse einer individuellen konstruktiven Auseinandersetzung mit verständlichen Problemen. (Das ist im Wesentlichen das mit Freudenthal verbundene Konzept der niederländischen „realistic mathematics eduaction“, vgl. van den Heuvel-Panhuizen, Wijers, 2005).

4. Kognitiver Aktivierung in fachdidaktischer Forschung und Entwicklung

Die Beispiele haben gezeigt, dass in der Mathematikdidaktik in Forschung und Entwicklung, eine Vielzahl von Ansätzen, sie sich der „kognitiven Aktivierung“ verschrieben haben, verfolgt wird. Es ist dabei nicht die Frage zu stellen, welcher Ansatz hier dem Konzept der kognitiven Aktivierung mehr oder weniger gerecht wird, sondern ob jeweils eine stimmige Passung zwischen den Zielkonstrukten (Kompetenzfacetten) und den didaktischen Konzepten zur Aktivierung bzw. den empirischen Operationalisierungen von Aktivierung besteht. Neben der sicherlich zentralen Frage des Erwerbs fachlichen Wissens (Facette 1) und fachbezogener Strategien (Facette 2) ist die empirische Erforschung von Konzepten der Aktivierung von Überzeugungen (Facette 3)die größte Herausforderung-. Ob ein genetisch orientierter Unterricht tatsächlich ein angemesseneres und substantielles Mathematikbild bei den Lernenden fördert(Facette 3), ist aufgrund der Langfristigkeit der Prozesse und Komplexität von Unterrichtspraxis empirisch nicht leicht zu klären. Hinsichtlich der Wirksamkeit von (fokussierender) kognitiver Aktivierung auf der Ebene des konkreten Wissenserwerbs zeichnen sich jedoch vielversprechende Ergebnisse ab. Hier muss offensichtlich einer fachbezogenen (fachdidaktischen) Perspektive auf die Analyse der Aktivierungsmuster ein hoher Stellenwert eingeräumt werden.

Hinsichtlich des konstruktiven Standbeins fachdidaktischer Arbeit, also der Entwicklung und Evaluation substantieller fachlicher Lernumgebungen (im Sinne einer „design science“, Wittmann, 1995) geht es weniger um die Untersuchung grundlegender Wirkzusammenhänge als die Optimierung und praktische Nutzbarkeit konkreter Lernarrangements. Das bedeutet, dass lernförderliche Aspekte kognitiver Aktivierung in hohem Maße *integriert* eingesetzt werden (und dass mithin die die empirische Absicherung ihrer Wirksamkeit ist nicht alleiniges Rationale sein kann)

Ein Beispiel für ein fachdidaktisch intensiv rezipiertes, aber in der Praxis kaum implementiertes Aktivierungskonzept ist der „dialogische Mathematikunterricht“ nach Gallin und Ruf (1996). Aktivierung bedeutet hierbei die individuelle Auseinandersetzung der Lernenden mit den Lerninhalten durch Schreiben von Forschungsheften und dabei das konsequente Einbeziehen ihrer individuellen („singulären“) Perspektiven. Es wird deutlich, dass hier Aktivierungskonzepte auf verschiedenen Ebenen integriert werden: Wissens- und Strategieerwerb (Facette 1 und 2) durch kognitiv anregende Situationen („Kernideen“), Förderung metakognitiver Verarbeitung (Facette 2) und auf die Ausbildung eines differenzierten Mathematikbildes angelegte Reflexionen von individuellen Erkenntnisprozessen (Facette 3).

Stärker auf dem Prinzip der genetischen Anlage des Lernprozesses beruhende Konzepte, sind beispielweise die „Lebensweltorientierung“ (Lengnink, 2005), rich learning tasks (Flewelling und Higginson, 2003) oder das Konzept des „Lernens in sinnstiftenden Kontexten“ (Leuders et al., 2011). Grundlage sind hier im Sinne Freudenthalschen Ansatzes inner- oder außermathematische Kontexte, in denen Vorstellungen und Erfahrungen der Lernenden aktiviert und aufgenommen werden. Authentische Mathematisierungsprozesse lassen die Lernenden die Genese mathematischen Wissens aktiv erleben und reflektieren (vgl. auch Vohns, 2005) und dienen so dem Aufbau eines epistemologisch angemessenen Mathematikbildes.

Große Aufmerksamkeit genießt auch das Konzept des „produktiven Übens“ (Winter 1984; Wittmann, 1992; Leuders, 2009). Das Grundprinzip für die Gestaltung kognitiv aktivierender Übungen besteht in der kombinierten Anregung automatisierender, reflektierender und entdeckender mathematischer Tätigkeiten. Grundlegendes Wissen wird hier nicht in einer „Übenische“ trainiert, sondern eingebettet in einfache Situationen des mathematischen Entdeckens einfacher mathematischer Muster und Strukturen, des Problemlösens oder des Reflektierens von Konzepten und Verfahren, z.B. hinsichtlich deren Anwendbarkeit. Auch hier steht die Untersuchung der Effektivität und Nachhaltigkeit eines solchen „integrierten“ Aktivierungskonzeptes noch aus.

Die hier kurz angerissenen Beispiele zeigen, wie in praxistauglichen Unterrichtskonzepten die Kompetenzziele und damit auch die Aktivierungsansätze verschränkt vorliegen. Das bedeutet aber nicht, dass in jeder Phase des Unterrichts alle „optimalen“ Ansätze (ob nun empirisch validiert oder nicht) zugleich eingesetzt werden müssen. Der ausbalancierte und reflektierte Einsatz ist weiterhin eine Leistung, für die es neben einem substantiellen empirischen Fundament immer noch eine gehörige Portion „didaktischer Kunst“ bedarf.

Literatur:

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns* (Band I). Stuttgart: Klett-Cotta.

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., (Hrsg.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and sssessing. A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. New York, Addison-Wesley.

Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2008). *Mathematik-Methodik: Handbuch für die Sekundarstufe I und II* (2. Auflage). Berlin: Cornelson Scriptor.

Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2004). Bildungsstandards und Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen und Baden-Württemberg — zwei Wege zur Umsetzung nationaler Empfehlungen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, *57*, 142–146.

Baumert, J., & Köller, O. (2000). Unterrichtsgestaltung, verständnisvolles Lernen und multiple Zielerreichung im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Hrsg.), *TIMSS/III*, 2, (S. 271-315). Opladen: Leske + Budrich.

Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Krauss, S., Kunter, M., & Neubrand, M. (2004). Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und Schüler und ihrer Lehrkräfte. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J., Rost & U. Schiefele, U. (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland* (S. 354-414). Münster: Waxmann.

BLK (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung*. [1.10.2007, www.blk-bonn.de/papers/heft60.pdf]

Blum, W. (Hrsg.). (1998). *TIMSS und der Mathematik-Unterricht: Informationen, Analysen, Konsequenzen*. Hannover: Schroedel.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A., & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland* (S. 145-158). Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Blum, W., Niss, M., & Huntley, I. (1989). *Modelling, Applications and Applied Problem Solving - Teaching Mathematics in a Real Context*. Horwood, Chichester.

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Brophy, J. (Hrsg.). (2002). *Social constructivist teaching: Affordances and constraints*. Oxford: Elsevier.

Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtslehre*. Schwann: Berlin und Düsseldorf.

Büchter, A., & Leuders, T. (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Cohors-Fresenborg, E., Kramer, S., Pundsack, F., Sjuts, J., & Sommer, N. (2010). *The role of metacognitive monitoring in explaining differences in mathematics achievement*. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 42(2), 231-244.

De Corte, E., Verschaffel, L. et al. (2003). *Powerful Learning Environments. Unravelling Basic Components and Dimensions.* Amsterdam: Pergamon.

De Lange, J., Keitel, C., Huntley I., & Niss M. (Hrsg.). (1993). *Innovation in Maths Education by Modelling and Applications.* Chichester: Ellis Horwood.

Drollinger-Vetter, B., & Lipowsky, F. (2006). Fachdidaktische Qualität der Theoriephasen. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis", Teil 3* (S. 189-205). Frankfurt am Main: GFPF.

Fischbein, E. (1989). *Tacit models and mathematical reasoning. For the learning of mathematics*, 9 (2), 9-14.

Flewelling, G., & Higginson, W. (2003). *Teaching With Rich Learning Handbook*. Adelaide: The Australian Association of Mathematics Teachers Inc..

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991): *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. K. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs. A hidden variable in mathematics education?* (S. 39–57). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Hanna, G. (1997). *The ongoing value of proof.* Journal für Mathematikdidaktik, 18,171-185.

Heymann, H.-W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

Hiebert, J., & Grouws, D.A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In R. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 371–404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J. K., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., & Stigler, J. (2003). *Teaching Mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study.* Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Educational Statistics.

Hugener, I., Pauli, C., & Reusser, K. (2007). Inszenierungsmuster, kognitive Aktivierung und Leistung im Mathematikunterricht. Analysen aus der schweizerisch-deutschen Videostudie. In D. Lemmermöhle, M. Tothgangel, S. Bögeholz, M. Hasselhorn, & R. Watermann (Hrsg.), *Professionell Lehren – Erfolgreich Lernen* (S. 109-212). Münster: Waxmann.

Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2007). *Diagnose - Schülerleistungen verstehen.* Praxis der Mathematik in der Schule (PM), 49 (15).

Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., & Brunner, M. (2008). *Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht.* Journal für Mathematikdidaktik (JMD), 29(2), 83-107.

Kaiser, G. (1991). Application-orientated Mathematics Teaching: A Survey of the Theoretical Debate. In M. Niss, W. Blum & I. Huntley (Hrsg.), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (S. 83-92). Chichester, Ellis Horwood.

Kleinknecht, M. (2010). *Aufgabenkultur im Unterricht. Eine empirische Video- und Unterrichtsstudie an Hauptschulen.* Hohengehren: Schneider Verlag.

Klieme, E., & Bos, W. (2000). *Mathematikleistung und mathematischer Unterricht in Deutschland und Japan. Triangulation qualitativer und quantitativer Analysen am Beispiel der TIMSS-Studie.* Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 3(3), 359–380.

Klieme, E., & Leutner, D. (2006). *Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG.* Zeitschrift für Pädagogik 52, 876-903.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K., & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von

Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projekts «Pythagoras». In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule* (S. 127–146). Münster: Waxmann.

KMK (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Luchterhand.

Komorek, E.; Bruder, R., & Schmitz, B. (2004): Integration evaluierter Trainingskonzepte für Problemlösen und Selbstregulation in den Mathematikunterricht. In J. Doll & M. Prenzel. (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (S. 54-76). Münster: Waxmann.

Krauss, S., Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A., & Löwen, K. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerforderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (S. 31-53). Münster: Waxmann.

Kunter, M. (2005). *Multiple Ziele im Mathematikunterricht* (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie No. 51). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Brunner, M., Baumert, J., Klusmann, U., Krauss, S., Blum, W., Jordan, A., & Neubrand, J. (2005). *Der Mathematikunterricht der PISA-Schülerinnen und –Schüler.* Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8 (4), 502-520.

Lengnink, K. (2005): *"Abhängigkeiten von Größen" - zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt.* Praxis der Mathematik, 2, 13-19.

Leuders, T. (2001): *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leuders, T. (2009): Intelligent üben und Mathematik erleben. In: T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Eds.): *Mathemagische Momente.* Berlin: Cornelsen, 130-143.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011): *„Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen,* Praxis der Mathematik in der Schule 53(37), 2-9.

Leuders, T. (in Druck): Kompetenzorientierung – eine Chance für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts? In K. Eilerts, A. H. Hilligus, G. Kaiser & P. Bender:(Hrsg.), *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung - Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der empirischen Bildungsforschung und der Mathematik-Didaktik.* Münster: LIT Verlag.

Lipowsky, F., Rakoczy, K, Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K., & Pauli, C. (2009). *Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean Theorem,* Learning and Instruction, 19(6), 527-537.

Maier, U., Kleinknecht, M., Metz, K., & Bohl, T. (2010): *Ein allgemeindidaktisches Kategoriensystem zur Analyse des kognitiven Potenzials von Aufgaben.* Beiträge zur Lehrerbildung. 28(1), 84-96.

NCTM (2000) [National Council of Teachers of Mathematics]. *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, Virginia.

Neubrand, J. (1998). *Japanischer Unterricht aus mathematikdidaktischer Sicht: Sekundarstufe I, 8. Schuljahr.* Mathematik lehren, 90, 52-55.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Pauli, C.; Drollinger-Vetter, B.; Hugener, I, & Lipowsky, F. (2008). *Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht.* Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 22(2), 127-133.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). *Teachers' professional development: What are the key change factors for mathematics teachers?* European Journal for Teacher Education 22 (2/3), 259-275.

Posner, G., Strike, K., Hewson, P., & Gertzog, W. (1982). *Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change.* Science Education, 66(2), 211-227.

Prediger, S. (2008). *The relevance of didactical categories for analysing obstacles in conceptual change - Revisiting the case of multiplication of fractions,* Learning and Instruction 18(1), 3-17.

Prediger, S., Schink, A., Schneider, C., Verschragen, J. (i. Vorb.): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. In S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.), *Mathewerkstatt 6.* Cornelsen, Berlin.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). *Learning to prove: The idea of heuristic examples.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(1), 29-35.

Reiss, K., & Törner, G. (2007). *Problem solving in the mathematics classroom: The German perspective.* ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39, 431–441.

Renkl, A. (2009). Wissenserwerb (Kap.1). In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie.* Berlin: Springer.

Ruf, U., & Gallin, P. (1996): Sich einlassen und eine Sprache finden. Merkmale einer interaktiven und lacherübergreifenden Didaktik. In Voß, R. (Hrsg.), *Die Schule neu erfinden* (S. 154-178). Neuwied: Luchterhand.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical problem solving.* Orlando Florida: Academic press, Inc.

Schukajlow, S., Krämer, J., Blum, W., Besser, M., Brode, R., Leiss, D., & Messner, R. (2010): *Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg?* Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM.

Selter, C., & Sundermann, B. (2000). *Quattro Stagioni - Nachdenkliches zum Stationenlernen aus mathematikdidaktischer Perspektive.* In Friedrich Jahresheft: Üben und Wiederholen, 110-113.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* London, Washington: The Falmer Press.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). *The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics.* Journal of Educational Psychology, 94(2), 344-355.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap.* New York: Free Press.

Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S., & Serrano, A. (1999). *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States.* Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Sundermann, B., & Selter, C.(2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht.* Berlin: CVK.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. (2005). *Mathematics standards and curricula in the Netherlands.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(4), 287-307.

Vohns, A. (2005). Messen oder (Be)Rechnen? Mit fundamentalen Ideen über Mathematik reflektieren. In Lengnik, K. & Siebel, F. (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 69-84). Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: normative, descriptive and constructive aspects. In Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (Hrsg.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity. An ICMI study, Book 2* (S. 317-331). Dordrecht: Kluwer.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004) (Hrsg.). *The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching.* Learning and instruction, 14 (5), 445-548.

Wagenschein, M. (1962): *Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett.

Weinert, F. E. (2001). Concept of Competence: A Conceptual Clarification. In D. Rychen, & L. Salganik (Hrsg.), *Defining and selecting key competencies* (S. 45–66). Seattle: Hogrefe & Huber.

Winter, H. (1975). *Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?* In Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 3, 106–116.

Winter, H. (1984): *Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht.* Mathematik lehren, 2, 4-16.

Winter, H, (1983): *Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht*, Journal für Mathematik-Didaktik (JMD), 83, 175–204.

Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht.* Braunschweig: Vieweg.

Winter, H. (1995). *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung.* Mitteilungen der GDM 61, 37-46.

Wittmann, E. Ch. (1995): *Mathematics Education as a »Design Science«.* Educational Studies in Mathematics 29, 355-374.

Wittmann, E. Ch. (1985): Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. Mathematik lehren, 11, 7-11.

Wittmann, E. Ch. (1992): Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In: Müller, G.; Wittmann, E. (Ed.): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1* (S. 152-166). Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.