Leuders, T. (2010). Nachdenken geboten! – Die Entwicklung selbstreflexiven Lernens im Mathematikunterricht. In T. Bohl, K. Kansteiner-Schänzlin, M. Kleinknecht, B. Kohler & A. Nold (Eds.), *Selbstbestimmung und Classroom-Management. Empirische Befunde und Entwicklungsstrategien zum guten Unterricht* (pp. 221–235). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

*Timo Leuders*

# Nachdenken geboten – Unterrichtskonzepte zur Förderung selbstständiger Reflexion im Fach Mathematik Mathematikunterricht

## *Vorfassung*

## 1 Einleitung

Die *Mathematik als Wissenschaft und Kulturgut* zählt die Strenge der Argumentation, den hohen Grad an Abstrahierungspotenzial sowie das präzise Erfassen von numerischen und geometrischen Zusammenhängen, Begriffen, Modellen und Algorithmen zu ihren Stärken. Für die *Mathematik als Unterrichtsfach* liegen hier eine große Herausforderung und ein großes Risiko. Die Herausforderung besteht darin, die Lernenden die ‚reguläre, fertige Mathematik' und ihre Genese authentisch erleben zu lassen. Das Risko besteht darin, angesichts der Geschlossenheit des Wissenskorpus der Mathematik die individuellen Aneignungsprozesse, die ‚singuläre Mathematik' zu vernachlässigen (zum didaktischen Begriffspaar singulär-regulär vgl. Gallin/Ruf 1998). Als Kristallisationspunkt einer solchen einseitigen Betonung des Regulären wird in der Mathematikdidaktik des letzten Jahrhunderts die ‚Kalkülorientierung' beschrieben und kritisiert, welche sich in einer Betonung formaler Darstellungen und algorithmischer Verfahren äußert. Ihr werden immer wieder fachdidaktische Konzepte entgegengesetzt, die die Balance zwischen Regulärem und Singulärem, zwischen Fachbildung und Persönlichkeitsbildung wieder herstellen wollen: Genetisches Lernen orientiert an Phänomenen (Wagenschein 1962), realistischer Mathematikunterricht (Freudenthal 1976), Allgemeine Mathematik (Wille 2001), Konkreter Mathematikunterricht (Baireuther 1990), allgemeinbildender Mathematikunterricht (Heymann 1996), oder dialogischer Mathematikunterricht (Gallin/Ruf 1998) – um nur einige zu nennen. Daneben gibt es immer wieder viele konkrete lokale Ansätze, wie z.B. die inhaltlich-anschauliche Analysis (Blum/Kirsch 1979) oder das produktive Üben (Wittmann 1992).
All diesen Konzepten ist eines gemeinsam: die *Betonung der Reflexion* als Schlüsselelement des Lernens und als Gegengewicht zum Kalkül. Im Folgenden soll diese Tendenz aus verschiedenen Perspektiven dargestellt werden: Wie wird der aktuelle Mathematikunterricht hinsichtlich des Verhältnisses von Reflexion und Kalkül bewertet? Welche Vorschläge für eine Veränderung werden gemacht? Auf welche Weise wird die Wirkung reflexiven Lernens im Mathematikunterricht – insbesondere in Haupt- und Realschulen – empirisch beforscht?

## 2 Der Befund: Kalkülorientierung

Fachdidaktische Analysen des bestehenden Mathematikunterrichts weisen seit langem auf immer dieselben „Mangelerscheinungen“ hin (z.B. Lietzmann 1919-1926; Wagenschein 1962; Winter 1989; Wittmann 1992; BLK 1997; Borneleit u. a. 2001; Hefendehl-Hebeker 2005; Leuders 2001, 2007):

- übermäßige Orientierung an der Fachsystematik,
- ausschließlicher Umgang mit der Mathematik als fertiges Produkt
- zu frühe begriffliche Formalisierung,
- Überbetonung von Kalkülelementen
- fehlende Sinnstiftung, artifizielle Problemstellungen
- fragend-entwickelnder Unterricht, reduziertes Methodenspektrum
- übervolle Stoffobligatorik,
- Kurzfristigkeit des Lernens und Übens

Empirische Unterrichtsanalysen weisen in dieselbe Richtung und konstatieren ein typisches deutsches Unterrichtsmuster (Stigler/Hiebert 1999; J. Neubrand 2002): ‚Kontrollieren' der Hausaufgaben – kurze Wiederholung – konvergente Erarbeitung eines Lösungsverfahrens im fragend-entwickelnden Unter-

richtsgespräch – Einüben des Verfahrens in Stillarbeit an ähnlichen Aufgaben – Vergabe und Erläuterung der Hausaufgaben. Dies steht nicht im Widerspruch zu anderen Studien, die feststellen, dass im deutschen Unterricht ein problemlösendes Einführungsmuster dominiert (Hugener/ Pauli/ Reusser, 2007)., da hier oft Problemlösen und konvergente Lehrerlenkung im fragend-entwickelnden Gespräch miteinander verbunden sind und sich zudem das so verstandene Problemlösen auf die Einführungsstunden beschränkt.
Auch die Ergebnisse von internationalen Vergleichsstudien stützen dieses Bild: Während deutsche Schülerinnen und Schüler ihre relative Stärke bei technischen Routineaufgaben haben, fehlt es ihnen an Fähigkeiten zur Modellierung komplexer innermathematischer Kontexte, also an Strategien zum reflektierten Umgang mit offeneren Situationen, die keinen kalkülmäßigen Ansatz erlauben (Klieme u. a. 2001).
Borneleit u. a. (2001) erklären diese Situation durch (empirisch noch kaum erforschte wiewohl bei Kenntnis der Praxis hochplausible) Wirkzusammenhänge bei der Unterrichtsgestaltung:

> „So ist die Konzentration auf Kalküle und Routinen wohl vor allem als Strategie des Lehrers anzusehen, um trotz Schwierigkeiten und teils geringer Anstrengungsbereitschaft bei Lernenden Sicherheit in der Durchführung der mathematischen Methoden zu erreichen. […] Nicht selten erfolgt das Üben sinnentleert, werden die Formeln von Schülerinnen und Schülern ohne Einsicht angewandt. Inhaltliche und begriffliche Probleme geraten dann leicht aus dem Blick und werden, wenn die zugehörigen Prüfungsaufgaben auch auf kalkülhafte Aufgaben beschränkt bleiben, für unbedeutend erachtet. Die Bereitschaft, das Erlernte auf neue inner- oder außermathematische Situationen anzuwenden, bleibt unterentwickelt. Es besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler selbst einfachen Problemaufgaben ratlos gegenüber stehen, weil sie über die Erarbeitung und Einübung rechnerischer Routinen nicht gelernt oder weitgehend verlernt haben, inhaltliche und den Einzelheiten des konkreten Falls angepasste Überlegungen anzustellen."

Angestoßen von solchen Analysen werden in der Fachdidaktik und in der Praxis, oft in Form von Modellversuchen wie z.B. SINUS (vgl. BLK 1997), alternative Konzepte entwickelt, erforscht, erprobt und in Fortbildungen weitergetragen. An Stelle einer – nicht zu leistenden Gesamtübersicht – werden im Folgenden Beispiele für solche Entwicklungen angeführt und es wird dabei dargestellt, auf welche Weise eine Stärkung der Reflexion im Mathematikunterricht erreicht werden soll. Kennzeichnend ist dabei, dass die Reflexion sowohl auf die Inhalte als auch auf die Lern- und Problemlöseprozesse gerichtet ist.

## 3 Unterrichtskonzepte zur Stärkung von Reflexion

Fachdidaktisch fundierte Vorschläge für eine reflexive Unterrichtsgestaltung beziehen sich mit unterschiedlichem Gewicht auf verschiedene Elemente des gestalteten Lehr-Lernprozesses. Diese lassen sich am besten mit dem Konzept der Lernumgebung erfassen (vgl. Leuders/Ulm 2007, s. Abb.). Das Konzept unterscheidet:

- Die Aufgaben und ihre Trägermedien (z. B. Arbeitsblätter, zu untersuchende Objekte),
- die Organisationsformen des Lernens (z. B. den methodischen Ablauf, Sozialformen) und
- die Unterstützungsangebote durch die Lehrperson sowie verfügbare Medien und Werkzeuge (Bücher, Hilfskarten, Internet usw.).

Während manche Ansätze den Unterricht als Ganzes durchdringen, beschränken sich andere auf verschiedene Elemente von Unterrichtssituationen. Hier soll, soweit jeweils möglich, unterschieden werden nach Situationen des Erkundens, des Systematisierens, des Übens und der Diagnose.

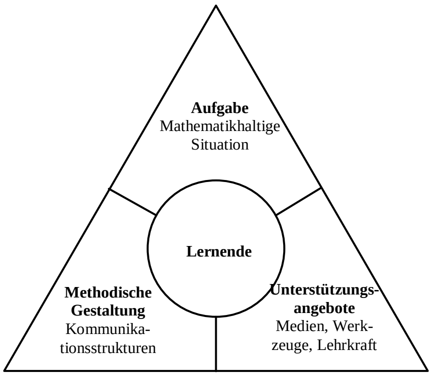
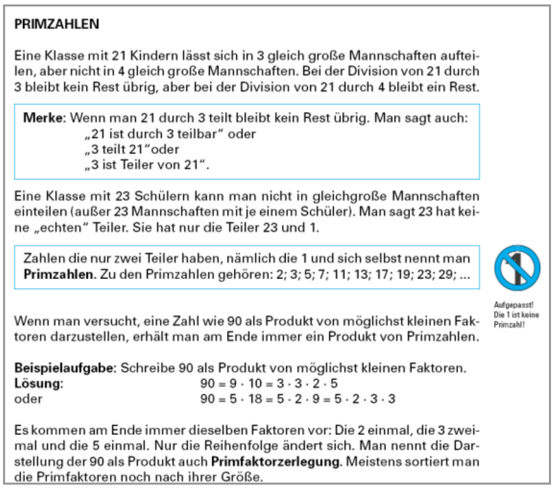



***Abb.1: Elemente einer Lernumgebung***

*Beispiel 1: Problemlösende, genetische Begriffserarbeitung*

Der hohe Grad an präziser Wohldefiniertheit von mathematischen Begriffen verführt zu einer deduktiven Einführung. Deduktive Lernmodelle vernachlässigen jedoch, dass ein Begriff sich nicht in seiner mathematischen Defintion erschöpft, sondern erst durch seine Reichhaltigkeit (Repräsentationen, Anwendungen, Beispiele, Verknüpfungen, Sinnstiftung) zum Begriff wird. Jenseits der Diskussion um die Effizienz entdeckenden Lernens lässt sich feststellen, dass ein begriffsgenetisches Lernmodell aus didaktischer Perspektive wünschenswerte Aspekte wie lebensweltliche Sinnstiftung, Motivation durch Problemübernahme und begriffliche Reichhaltigkeit integriert. Dies soll an der folgenden paradigmatischen Gegenüberstellung zweier Schulbuchbeispiele konkretisiert werden.

a) Kalkülbetonende Begriffserarbeitung
Die hier vorgestellte Schulbuchseite (s. Abb.2) zeigt symptomatisch die Defizite eines an der fertigen Mathematik und am Kalkül orientierten Konzepts auf: Von Schülerinnen und Schülern wird hier vor allem die reibungslose Übernahme von Bezeichnungen und Verfahren erwartet. Fragen danach, was eine Primzahl ist, welche Relevanz, welche Grenzen und welchen Bedeutungsüberschuss der Primzahlbegriff hat, bleiben ungeklärt. Warum etwa 1 keine Primzahl ist, wird nicht angesprochen.


**PRIMZAHLEN**

Eine Klasse mit 21 Kindern lässt sich in 3 gleich große Mannschaften aufteilen, aber nicht in 4 gleich große Mannschaften. Bei der Division von 21 durch 3 bleibt kein Rest übrig, aber bei der Division von 21 durch 4 bleibt ein Rest.

**Merke**: Wenn man 21 durch 3 teilt bleibt kein Rest übrig. Man sagt auch:
„21 ist durch 3 teilbar“ oder
„3 teilt 21“oder
„3 ist Teiler von 21“.

Eine Klasse mit 23 Schülern kann man nicht in gleichgroße Mannschaften einteilen (außer 23 Mannschaften mit je einem Schüler). Man sagt 23 hat keine „echten“ Teiler. Sie hat nur die Teiler 23 und 1.

Zahlen die nur zwei Teiler haben, nämlich die 1 und sich selbst nennt man **Primzahlen**. Zu den Primzahlen gehören: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...

Aufgepasst! Die 1 ist keine Primzahl!

Wenn man versucht, eine Zahl wie 90 als Produkt von möglichst kleinen Faktoren darzustellen, erhält man am Ende immer ein Produkt von Primzahlen.

**Beispielaufgabe**: Schreibe 90 als Produkt von möglichst kleinen Faktoren.
**Lösung**: $90 = 9 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$
oder $90 = 5 \cdot 18 = 5 \cdot 2 \cdot 9 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Es kommen am Ende immer dieselben Faktoren vor: Die 2 einmal, die 3 zweimal und die 5 einmal. Nur die Reihenfolge ändert sich. Man nennt die Darstellung der 90 als Produkt auch **Primfaktorzerlegung**. Meistens sortiert man die Primfaktoren noch nach ihrer Größe.

***Abb.2: Eine traditionelle Schulbuchseite***

b) Reflexive Begriffserarbeitung: Will man hingegen von Anfang an reflexive Verankerungen der mathematischen Begriffe fördern, so liegt ein genetischer Ansatz nahe: Die Begriffe ‚Teiler' und ‚Primzahl' werden von den Lernenden als Lösung zu einem zugänglichen Problem, wie etwa dem folgenden, selbstständig nacherfunden:

> Die Firma SCHOKOKÖNIG will eine Tafel herstellen, die für möglichst viele Familiengrößen passt. Jedes Mitglied soll beim Teilen die gleiche Zahl von Stückchen erhalten. Welche Tafelgröße soll die Firma herstellen? Schreibe deine Empfehlung und die Begründung in Form eines Briefes an die Firma auf.

Diese Aufgabenstellung fordert zur aktiven Konstruktion mathematischer Begriffe auf: Teilerbegriff und Primzahleigenschaft werden als Charakteristika der konkreten Situation erlebt. Insbesondere erzwingt die Art der Aufgabe die prüfende Reflexion an der Situation: Welche Teilbarkeiten sind wichtig, welche nützlich? Wie viele Teile sind überhaupt praktikabel? Schließlich hat die Aufforderung, einen begründenden Text zu verfassen, das Ziel, nicht nur die Ergebnisse, sondern ebenfalls die Problemlöse- und Argumentationsprozesse zu reflektieren (zum Typ der ‚Gutachteraufgaben' vgl. Barzel u. a. 2007). Lengnink (2005, 2009) zeigt auf, dass solche Lernsituationen durch eine geeignete lebensweltliche Reflexion von Schülerinnen und Schülern noch ausgeprägter als in diesem Beispiel zur reflektierten Begriffsbildung führen können – zum Beispiel dann, wenn Lernende anhand der Frage, welcher Läufer für einen Wettkampf auszuwählen sei, Grundbegriffe der beschreibenden Statistik entwickeln.

*Beispiel 2: Aktiv reflektierendes Systematisieren*

Gerade konvergente Unterrichtsphasen, bei denen Erkenntnisse gesichert und systematisiert sowie konventionelle Schreibweisen und Bezeichnungen eingeführt werden, sind gekennzeichnet durch Reflexion. Oft übernimmt hier die Lehrperson die Rolle eines Moderators, der die Klasse im Unterrichtsgespräch zu Reflexionen anregt – ein Vorgehen, das einerseits ein hohes kognitives Reflexionsniveau herstellen kann, das aber auch hinsichtlich der individuellen Aktivierung von Schülerinnen und Schülern als kritisch angesehen werden muss (vgl. Meyer 1987; Leuders 2001). Ein weiteres Problem stellen hier traditionelle Schulbuchformate dar, in denen die zu sichernden Wissenselemente an zu früher Stelle und in nicht schülergemäßer Sprache präsentiert werden (vgl. Abb. 2).
Aber auch in solchen Systematisierungsphasen können Schülerinnen und Schüler durch geeignete Aufgaben und Methoden stärker zur individuellen Reflexion über das Gelernte angeregt werden, wie das Aufgabenbeispiel zur Primfaktorzerlegung in Abb. 3 belegt.

Jan, Micha, Klara und Olgün haben die 60 zerlegt.


a) Welche Ergebnisse sind falsch? Berichtige sie zuerst!
b) Klara meint: „Die Ergebnisse sind alle verschieden!"
Micha findet: „Die Ergebnisse sind eigentlich alle gleich!"
Was meinst du? Argumentiere!
c) Ergänze den folgenden Satz:
„Wenn man eine Zahl vollständig in Faktoren zerlegt, dann …."
Es gibt auch mehrere Ergänzungsmöglichkeiten.
Notiere dazu auch eigene Beispiele.

***Abb.3: Schulbuchaufgabe zum Systematisieren***

Dieses Beispiel zeigt, wie die einzelnen Schülerinnen und Schüler stärker zu Akteuren des Systematisierungsprozesses werden können. Sie reflektieren ihr Wissen an Beispielen, bewerten verschiedene Aussagen, formulieren eigene Merksätze und konkretisieren diese an Beispielen.

Am Ende längerer Lernphasen eignen sich zum Beispiel *post organizer* Methoden wie z.B. Mindmaps (vgl. Brinkmann 2002; Haug 2008, daraus auch Abb. 4)

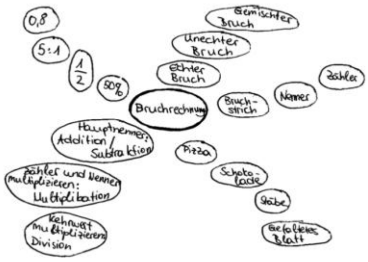



***Abb.4: Cluster eines Schülers am Ende der Klasse 6 zur Bruchrechnung***

*Beispiel 3: Reflexives Üben*

Üben dienst der Vertiefung und Vernetzung von Wissens- und Könnensbeständen. In einem kalkülorientierten Mathematikunterricht dominieren hierbei Übungen mit dem Ziel der Automatisierung, bei denen die wiederholende Abarbeitung von Aufgabenpaketen im Mittelpunkt steht. Schon seit langem wird gefordert, solche „grauen Päckchen“ (Wittmann 1992) durch so genannte ‚produktive Übungsaufgaben’ zu ersetzen, was allerdings in den Schulbüchern der Sekundarstufe bislang kaum Niederschlag findet. Produktive Aufgaben haben eine Reihe lernförderlicher Merkmale, sie verbinden entdeckendes Lernen mit Üben (Selter 1995) und sind ‚selbstdifferenzierend’, indem sie starken und schwachen Schülerinnen und Schülern zugleich Lerngelegenheiten auf jeweils passendem Niveau bieten. Vor allem aber stellen produktive Übungsaufgaben neben das Automatisieren von Fertigkeiten gleichwertig den reflektierenden Umgang mit mathematischen Begriffen und Verfahren, wie das Beispiel in Abb. 5 zeigt (vgl. Leuders 2009):

**1 Schätzen und Rechnen**

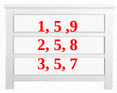
a) Schätze zuerst den jeweiligen Durchschnitt der Daten.

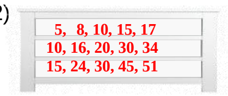
Tipps: Stelle dir jede Zahlengruppe erst auf einer Zahlengerade eintragen vor. Stelle dir vor, dass eine entsprechende Menge Geld gleichmäßig aufgeteilt wird.

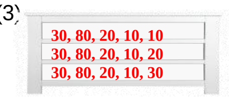
(1) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30
(2) 300, 450, 600
(3) 23, 25, 24, 26
(4) 1, 2, 3, 4, 1000

b) Überprüfe deine Schätzung durch Rechnung.
c) Schreibe in eigenen Worten auf, was du aus den Beispielen gelernt hast.

**2 Schubladenschränke**

(1)



(2)



(3)


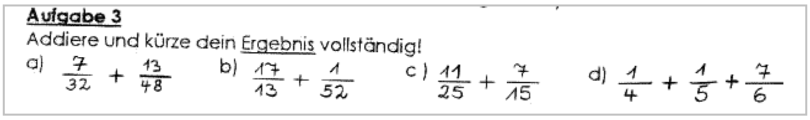

a) Berechne jeweils den Durchschnitt der Zahlen in jeder Schublade.
   Schreibe auch auf, was dir bei jedem Schrank auffällt.
b) Erkläre alle Entdeckungen, die du in a) gemacht hast.
c) Erfinde ähnliche, eigene Schubladenschränke und lass sie von deinem Nachbarn untersuchen.

***Abb.5: Zwei Aufgaben zum produktiven Üben des Konzeptes „Durchschnitt“***

Die Aufgabenbeispiele zeigen, wie das Einüben von Fertigkeiten, die Aktivierung von Vorstellung und die Reflexion und mathematische Zusammenhänge verschränkt werden können. Die Konstruktion solcher Aufgaben im Zusammenhang mit der Entwicklung neuer Schulbücher sowie die empirische Überprüfung ihrer Wirksamkeit stehen noch am Anfang. Die aktuellen Entwicklungstendenzen im deutschen Mathematikunterricht sind hier ambivalent zu beurteilen: Einerseits wird die Förderung von prozessbezogenen Kompetenzen wie Problemlösen und Argumentieren durch derartige Übungsarrangements stärker eingefordert. Andererseits kann der Druck zentraler Prüfungen wieder zu einer einseitigen Betonung des kalkülmäßigen Einübens von Grundfertigkeiten führen.

*Beispiel 4: Verstehensorientierung bei der Diagnose*

Reflektierende Schülerinnen und Schüler sind nicht nur ein Ziel des Mathematikunterrichts, sie sind auch auch eine Voraussetzung dafür, dass Lehrpersonen die Fähigkeiten und Schwierigkeiten von Lernenden diagnostizieren können. Geeignete diagnostische Aufgaben für die tägliche Praxis zeichnen sich hierbei weniger durch Testgütekriterien wie Messgenauigkeit und Objektivität aus, sondern fußen darauf, dass Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen und Gedanken möglichst offen legen und die Lehrkraft diese vor dem Hintergrund der ihr bekannten Lerngeschichte interpretieren kann. In diesem Sinne sollten Diagnoseaufgaben in zweierlei Hinsicht reflexiv sein: Sie sollten (a) erfassen, ob Schülerinnen und Schüler ein reflektiertes Verständnis des Gegenstandes haben, und (b) sie durch Reflexionsaufforderungen dazu veranlassen, ihr Verständnis auch zu artikulieren.
Der Typ von Aufgaben, der diese Kriterien erfüllt, kann als ‚Verstehensaufgabe’ (im Gegensatz zur ‚Verfahrensaufgabe’) charakterisiert werden (Büchter/Leuders 2008). Solche Verstehensaufgaben sollten vermehrt auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen berücksichtigt werden. Typisch für ‚Verfahrensaufgaben’ in Klassenarbeiten ist das Abfragen reiner Fertigkeiten, deren Erfüllung meist keine Rückschlüsse darauf zulässt, ob das Konzept hinter den überprüften Verfahren erfasst wurde:



**Aufgabe 3**
Addiere und kürze dein Ergebnis vollständig!
a) $\frac{7}{32} + \frac{13}{48}$ b) $\frac{17}{13} + \frac{1}{52}$ c) $\frac{11}{25} + \frac{7}{15}$ d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{7}{6}$

***Abb.6: Eine Beispielaufgabe aus einer typischen Klassenarbeit***

Durch Umkehren oder Öffnen lassen sich leicht Aufgaben erzeugen, mit denen man gemäß Kriterium (a) den reflektierten Umgang diagnostizieren kann (Abb.7).

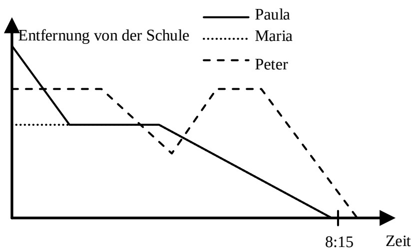
Was kann in den Kästchen stehen? Gib jeweils zwei verschiedene Lösungen an.

$\frac{\square}{2} + \frac{\square}{4} = 1$ $\qquad$ $\frac{\square}{4} + \frac{\square}{4} = 1$ $\qquad$ $\frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} = 1$

***Abb.7: Eine ,Verstehensaufgabe' zur Bruchaddition.***

Durch explizite Auforderung zur Reflexion oder Begründung entstehen Aufgaben, die gemäß Kriterium (b) diagnostisches Potenzial besitzen (Abb. 8, vgl. Büchter/Leuders 2005).

**Schulweg**




Peter, Paula und Maria sind Klassenkameraden und wohnen an der gleichen Straße.
Am Ende der Straße liegt ihre Schule. Jeden Morgen gehen sie zu Fuß zur Schule, die um 8:15 Uhr beginnt. Die Zeichnung zeigt, wo sie sich gestern zu verschiedenen Zeiten. befunden haben. Schreibe

***Abb.8: Eine Diagnoseaufgabe, die zur Reflexion auffordert***

Die Analyse der Schülerlösung zu dieser Aufgabe gibt nicht nur Aufschluss darüber, *ob* der/die Lernende hier Könnensdefizite hat, sondern auch darüber, welcher Art diese sind und wie man hier fördern könnte.

> *Peter stand schon vor der Tür seines Hauses, als er das Gefühl bekam, dass er etwas vergessen hatte.* So *stand er einige Minuten. Dann machte er sich auf den Weg. Er hatte schon die Hälfte der Strecke geschafft, als er bemerkte, dass er keine Hose anhat. Er lief beschämt nach Hause. Er hat zwei Mädchen getroffen, die ihn natürlich ausgelacht haben. Seine Hose konnte er sehr lange nicht finden. Deswegen ist er zu spät zur Schule gekommen ...*

Die Beispiele für Aufgaben und unterrichtliche Arrangements mit Reflexionscharakter stellen bei weitem nicht erschöpfend das dar, was in der heutigen Fachdidaktik entwickelt wird. Sie zeigen aber auf, dass eine auf Reflexionen ausgerichtete Schwerpunktsetzung im Unterricht keine grundsätzliche Neuorientierung bedeutet. Vielmehr kann sie in kleinen Schritten und im täglichen Unterricht verwirklicht werden. Insbesondere in den Bereichen, in denen Lehrerinnen und Lehrer selbst Aufgaben auswählen und konstruieren, also vor allem beim Üben und bei der Leistungserhebung, kann man hoffen, durch geeignete Elemente in der Lehrerbildung die professionelle Sicht und Kompetenz zu stärken. In anderen Bereichen, wie dem Erkunden oder Systematisieren, sind Lehrpersonen zusätzlich auf substantielle

Lernumgebungen in geeigneten Lehrwerken angewiesen – und natürlich auf eine Ausbildung, die sie darin unterstützt, solche Elemente zu erkennen und anzuwenden.

## 4 Reflexives Lernen in Haupt- und Realschule

Ein häufiger formulierter Einwand gegen eine Stärkung reflexiver Aspekte des Mathematiklernens bezieht sich auf die Chancen für eine Umsetzung in Haupt- und Realschulen. Hier findet man in letzter Zeit jedoch vielfältige Bemühungen in der didaktischen Entwicklung und Forschung, die aufzeigen, dass es sich keineswegs um eine gymnasiale Auffassung vom Mathematiklernen handelt.

Im Projekt DISUM (Leiss u. a. 2008) wurde überprüft, inwiefern Realschulklassen (N=14) in einem ‚operativ-strategischen Unterricht', der auf das selbstständige individuelle und ko-konstruktive Lernen in Gruppen ausgerichtet ist, bessere Lernerfolge im Inhaltsbereich des Satzes des Pythagoras erzielen. Die Lehrpersonen der Experimentalklassen versuchten, nur minimale Hilfestellungen zu geben, so dass die Lernenden herausgefordert wurden, sich ihre eigenen Bearbeitungsmuster aufzubauen. Im Ergebnis konnten deutliche, auch langfristig höhere Lernerfolge im Vergleich zu einem eher direktiven, auf die Vermittlung von vorgegebenen Verarbeitungsmustern ausgerichteten Unterricht festgestellt werden.

Im Projekt SERELSIK (Ehlert u. a. 2008) wurden Lehrerinnen und Lehrer von Realschulklassen (N=12) in Impulsveranstaltungen angeregt, ihren Unterricht stärker an reflexionsorientierten Aspekten auszurichten (produktives Üben, Problemlösen, kommunikationsfördernde Unterrichtsmethoden) und in kooperativen Schulteams weiterzuentwickeln. Längsschnittergebnisse hinsichtlich der Schülerleistungen werden für 2009 erwartet.

Haug (2008) hat bei seiner Untersuchung mit Hauptschülerinnen und Hauptschülern (N=130) festgestellt, dass eine Lernumgebung, die strukturiert zum reflektierenden Arbeiten mit computergestützten Geometriesystemen (DGS) anregt, den Erwerb basaler Problemlösekompetenzen, wie etwa ‚Vermutungen aufstellen', fördert.

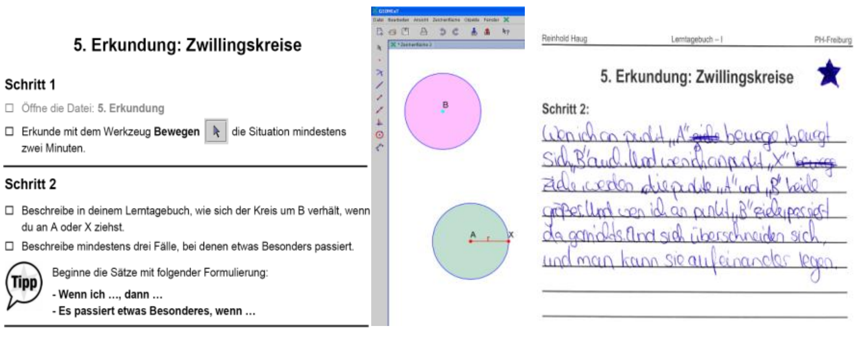



***Abb.9: Eine strukturierte Anleitung zur Reflexion***

Auch mit Blick auf den Einsatz in der Hauptschule entwickelt Ehret (2008) ein Schreibcurriculum für den Mathematikunterricht, durch das die Schülerinnen und Schüler an das reflektierende Schreiben herangeführt werden.

Im Projekt STRATUM (Maaß u. a. 2008) werden realitätsbezogene Aufgaben ausgewählt und Möglichkeiten der methodisch-didaktischen Umsetzung entwickelt. Durch eine formative und summative Evaluation der entstehenden Unterrichtseinheiten wird der Kompetenzzuwachs von Schülerinnen und Schülern aus Hauptschulklassen (N=40) im reflektierten mathematischen Umgang mit Realsituationen untersucht.

Die aktuelle Forschungsaktivität zeigt also an, dass ein an Reflexionen orientiertes Mathematiklernen auch an Haupt- und Realschulen von hohem Interesse ist. Ähnliche Tendenzen spiegeln sich ebenfalls in den bildungspolitisch normativen Instrumenten wie Bildungsstandards und Lernstandserhebungen wieder. Eine entsprechende sukzessive Veränderung der Praxis zu Lasten einer Kalküldominanz und zugunsten eines reflektierenden Grundverständnisses ist also langfristig durchaus zu erhoffen.

## Literatur

Baireuther, P. (1990): Konkreter Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Barzel, B./ Büchter, A./ Leuders, T. (2007): Mathematik-Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor

BLK (Bund-Länder-Kommissions-Projektgruppe "Innovation im Bildungswesen") (1997): Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschafltichen Unterrichts. (Heft 60 der Reihe BLK-Dokument.). Online verfügbar unter www.blk-bonn.de/download.htm.

Blum, W. / Kirsch, A. (1979): Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen: In: Der Mathematikunterricht. 25.Jg./ Heft 3, S. 6-24.

Borneleit, P./ Danckwerts, R./ Henn, H.-W./ Weigand, H.-G. (2001): Expertise Kerncurriculum Mathematik. In: Tenorth, H.-E. (Hg.): Kerncurriculum Oberstufe. Weinheim, Basel: Beltz, S. 26–53.

Brinkmann, A. (2002): Mind Mapping im Mathematikunterricht - Eine lerneffiziente Abwechslung. In: MNU 55, Heft 1, S. 23-27.

Büchter, A./Leuders, T. (2005): Zentrale Tests und Unterrichtsentwicklung … bei guten Aufgaben und gehaltvollen Rückmeldungen kein Widerspruch. In: Pädagogik, Jg. 57/Heft 5, S. 14–18.

Büchter, A./ Leuders, T. (2008): Leistungen verstehensorientiert überprüfen. Gute Aufgaben für Klassenarbeiten entwickeln. In: Bruder, Regina; Büchter, Andreas; Leuders, Timo (Hg.): Mathematikunterricht entwickeln. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 149–184.

Ehlert, A./ Werner, S./ Maag-Merki, K.,/ Leuders, T (2008): Serelisk – selbstreflexives Lernen im schulischen Kontext. Tools für die Entwicklung der eigenen Unterrichtsarbeit aufgrund von kooperativ-selbstreflexiven Prozessen zwischen Lehrpersonen. In: Maag-Merki, K./Steinert, B. (Hg.): Kooperation und Netzwerkbildung. Strategien zur Qualitätsentwicklung in Einzelschulen. Seelze: Friedrich Verlag, S. 78–93.

Ehret, C. (2008): Schreiben im Mathematikunterricht der Hauptschule. In: Vasarhélyi, E. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag

Freudenthal, H. (1976): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Klett

Gallin, P./Ruf, U. (1998): Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Haug, R. (2008): Problemlösen Lernen mit interaktiven Lernumgebungen. Eine empirische Studie zur Förderung heuristischer Strategien durch den Einsatz Dynamischer Geometrie-Software (DGS). In: Vasarhélyi, E. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag

Hefendehl-Hebeker, L. (2005): Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H. u. a.. (Hg.): Konsequenzen aus PISA – Perspektiven der Fachdidaktiken. Innsbruck: Studienverlag, S. 29

Heymann, H.-W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Basel: Beltz

Hugener, I., Pauli, C. & Reusser, K. (2007). Inszenierungsmuster, kognitive Aktivierung und Leistung im Mathematikunterricht. In D. Lemmermöhle, M. Rothgangel, S. Bögeholz, M. Hasselhorn & R. Watermann (Hrsg.). *Professionell Lehren. Erfolgreich Lernen* (S. 109-122). Münster: Waxmann

Klieme, E. / Neubrand, M. / Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Baumert, J. : PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske und Budrich, S. 139-190

Leiss, D./ Blum, W./ Messner, R./ Müller, M./ Schukajlow, S./ Pekrun, R. (2008): Modellieren lehren und lernen in der Realschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Münster: WTM Verlag, S. 77-80.

Lengnink, K. (2005): Abhängigkeit von Größen - zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt. In: Praxis der Mathematik. Heft 2, S. 13-19.

Lengnink, K. (2009): Vorstellungen bilden: Zwischen Lebenswelt und Mathematik. In: Leuders, T./ Hefendehl-Hebeker, L. / Weigand, H-G. (Hrsg.): Mathemagische Momente. Momente fruchtbaren Mathematiklernens. S. 122-131

Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Scriptor

Leuders, T. (2007): Fachdidaktik und Unterrichtsqualität im Bereich Mathematik. In: Arnold, K.-H. (Hg.): Unterrichtsqualität und Fachdidaktik. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 205–234

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In: Leuders, T. / Hefendehl-Hebeker, L. / Weigand, H-G. (Hrsg.): Mathemagische Momente. Momente fruchtbaren Mathematiklernens. Berlin: Cornelson, S. 132-145

Leuders, T./Ulm, V. (2007): Viel Eckiges – forschend entdecken. In: Praxis der Mathematik in der Schule (PM). Heft 18, S. 1–9

Lietzmann, W. (1919-1926): Methodik des mathematischen Unterrichts. Leipzig: Quelle & Meyer

Maaß, K. / Mischo, Chr. / Karrer, D. u. a. (2008): Stratum – Modellieren in der Hauptschule. In: Vasarhélyi, E. (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag

Meyer, H. (1987): Unterrichtsmethoden II: Praxisband. Berlin: Cornelsen

Neubrand, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Selter, C. (1995): Entdeckend üben - übend entdecken. In: Grundschule, Jg. 27/Heft 5/1995, S. 30–34

Stigler, J. W./Hieber, J. (1999): The Teaching Gap. New York: Free Press

Wagenschein, M. (1962): Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht. Stuttgart: Klett

Wille, R. (2001): Allgemeine Mathematik - Mathematik für die Allgemeinheit. In: Lengnink, K. u. a., Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik. Verl. Allgemeine Wissenschaft HRW e.K., Mühltal, S. 3-19

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg

Wittmann, E. Ch. (1992): Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In: Müller, G./Wittmann, E. (Hg.): Handbuch produktiver Rechenübungen. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett (1 & 2), S. 152–166