Fachdidaktik und Unterrichtsqualität im Bereich Mathematik

– Vorfassung –

Timo Leuders

Beitrag zum Band
Unterrichtsqualität und Fachdidaktik
hrsg. v. K.-H. Arnold,
Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Im Kanon der Disziplinen, die sich mit den Bedingungen, Prozessen und Ergebnissen schulischen Lernens befassen, hat die Fachdidaktik die Aufgabe, die Erkenntnisse unter der Perspektive *fachlichen* Lernens zusammenzuführen und zu vertiefen. Die Fachdidaktik Mathematik hat hierzu eine Vielzahl von Modellen entwickelt, denen man auf knappem Raum nicht gerecht werden kann. Daher versteht sich dieser Beitrag auch nicht als Kondensat bestehender Forschungsresultate, sondern als eine sich um Ausgewogenheit bemühende Übersicht über wesentliche Beiträge zur Diskussion um die fachliche Qualität des Mathematikunterrichts in Deutschland – internationale Einflüsse müssen ebenfalls weitgehend unberücksichtigt bleiben. Er greift dabei zurück auf rezente Analysen (BLK 1997, Borneleit u.a. 2001, Baptist/Winter 2001, Hefendehl 2005) und verweist auch auf praxisorientierte Handreichungen (z.B. Flade/Herget 2000, Leuders 2001, Blum/Biermann 2001, Hußmann 2003, Ulm 2005).

„Qualität ist der Grad, in dem ein Produkt oder ein Prozess den Anforderungen entspricht“ – so eine verkürzte Fassung der Definition der verbreiteten Qualitätsnorm ISO 9000. Mit dem Qualitätsbegriff sind also zwei Fragemodi präsent: Der *präskriptive* Modus muss sich unter anderem mit normativen Fragen der Legitimierung und gesellschaftlichen Aushandlung von Zielen des Mathematikunterrichts auseinandersetzen sowie Modelle guten Unterrichts konstruieren (vgl. Mathematikdidaktik als *design science* bei Wittmann 1995). Der *deskriptive* Modus versucht, die Wirkungszusammenhänge im Unterricht oder unter unterrichtsnahen Bedingungen theoretisch und empirisch zu erfassen.

Beide Fragemodi sind eng aufeinander zu beziehen: Präskriptive Konzepte müssen ihre postulierten Wirkungen der empirischen Überprüfung zugänglich machen, deskriptive Befunde müssen ihren normativen Rahmen offen legen und reflektieren, mehr noch: sie sollten eingebunden sein in eine die Realität transzendierende „Vision guten Mathematikunterrichts“.

Für die Mathematikdidaktik der letzten Jahre kann man vor allem die folgenden Triebkräfte der Weiterentwicklung eines fachdidaktischen Qualitätsbegriffs identifizieren:

- Aus der empirischen Erfassung der Ergebnisse fachlichen Lernens im Rahmen von internationalen und nationalen *Leistungsvergleichsstudien* (z.B. Baumert u.a. 1997, PISA-Konsortium 2004, s. auch Kaiser u.a. 2001) resultieren sowohl neue Fragestellungen als auch intensivere Verbindungen zu Bezugsdisziplinen und ihren Methoden (z.B. im DFG-Schwerpunktprogramm BiQua, s. Doll/Prenzel 2004).
- Die erklärte Absicht der als „empirische Wende“ titulierten Umorientierung der Bildungspolitik ist, das Schulsystem und damit insbesondere den Fachunterricht künftig stärker durch *Standardsetzung und Standardüberprüfung* im Bereich der Schülerleistungen zu steuern. Diese Instrumente sind geeignet, einen großen Einfluss auf Unterricht auszuüben und bedürfen fachdidaktischer Reflexion (s. Büchter/Leuders/Bruder 2005).
- Die *Allgemeinbildungsdebatte* um Rolle und Ziele und damit letztlich die Legitimation des Mathematikunterrichts hat zu einer höheren Zielklarheit des Faches und seiner allgemeinbildenden Funktion geführt (Heymann 1996, Winter 1995, Biehler/Heymann/Winkelmann 1998, Neubrand 2004).
- In der Auseinandersetzung mit *konstruktivistischen Lernauffassungen* erweisen sich Modelle der allgemeinen Didaktik und Pädagogik (z.B. Kösel 1997) als ebenso einflussreich wie kognitionspsychologische Erkenntnisse (z.B. Gerstenmeier/Mandl 1995, Dubs 1995) oder künftig vielleicht vermehrt neurowissenschaftliche Befunde (z.B. Roth 2004)

1 Fachwissenschaftliche und schulfachliche Bezüge

Ein Konzept von Unterrichtqualität (ob nun präskriptiv oder deskriptiv) wird erst zu einem *fachdidaktischen*, indem es Bezug zu den Spezifika des Unterrichtsfaches nimmt. Daher sollen in diesem Abschnitt diejenigen Bezüge zur Mathematik als Disziplin (1.1) und als Schulfach (1.2) dargestellt werden, die für eine fachliche Reflexion des Begriffs Unterrichtsqualität bedeutsam sind.

1.1 Fachwissenschaftliche Bezüge

Von Bedeutung sowohl für den wissenschaftstheoretischen als auch den fachdidaktischen Blick auf die Mathematik als Fachdisziplin sind ihre *Produkt*- und *Prozessaspekte* (z.B. Hersh/Davis 1985, Fischer/Malle 1985, Hefendehl 2005).

Mathematik kann aufgefasst werden als ein kulturelles *Produkt*, ein fertig erscheinendes Gedankengebäude von starker innerer Kohärenz und hohem Abstraktionsgrad. Sie tritt uns entgegen in ihren Begriffen, Sätzen und Verfahren, manifestiert in Definitionen, Beweisen und Algorithmen. Bekannt ist die Mathematik den meisten Menschen als Schulfach, ihre aktuellen Forschungsinteressen sind aber – trotz vielfältiger Popularisierungversuche (Stewart 1990, Beutelspacher 2001, Gritzmann/Brandenberg 2004, u.a.) – der breiten Öffentlichkeit größtenteils verschlossen. Zugleich ist unsere zunehmend technisierte Alltagswelt ohne die Anwendung mathematischer Erkenntnisse und Methoden undenkbar (z.B. Aigner/Behrends 2002). Eine Aufgabe von Mathematikunterricht besteht somit auch darin, die Diskrepanz zwischen objektiver Bedeutung und subjektiver Wahrnehmung aufzulösen.

Daneben ist Mathematik auch aufzufassen als *Prozess,* und zwar als ein ontologischer wie sozialer. Sie ist ein universelles Werkzeug, um die Regeln und Strukturen in den Mustern der natürlichen, technischen und geistigen Welt zu erhellen (Devlin 2000, 11). Diese Tätigkeiten entfalten sich in verschiedenen, für die Mathematik kennzeichnenden Formen des Begriffsbildens, des Problemlösen und des Argumentierens. Solche Prozesse finden in der mathematischen Grundlagenforschung und in der technischen Anwendung von Mathematik ebenso statt wie beim schulischen Mathematiklernen.

Hinsichtlich ihrer Erkenntnisprozesse nimmt die Mathematik eine epistemologische Sonderstellung innerhalb der Wissenschaftsdisziplinen ein. Ihre Verfahren der Wissensgewinnung zeichnen sich aus durch einen hohen Grad an argumentativer Strenge, durch eine Tendenz zur Verallgemeinerung und Systematisierung in der Begriffsbildung und durch die Verwendung symbolischer Darstellungsformen. Die Zusammenschau metamathematischer Analysen mathematischer Wissensbildung (z.B. Hardy 1940, Lakatos 1976, Barrow 1992, Heintz 2001) darf dabei die didaktische Perspektive *individueller Begriffsbildung* nicht unberücksichtigt lassen: „Mathematische Inhalte […] repräsentieren einen Inhalt des Denkens und der Vorstellung, der gegenüber jeder definitorischen Festlegung einen Überschuss an Bedeutungsgehalt und Aspektfülle besitzt.“ (Hefendehl 2005).

Vor einem solchen Hintergrund lassen sich wesentliche mathematische Tätigkeiten von Schülerinnen und Schülern konkretisieren. Bereits Winter (1975) nennt hier Argumentieren, kreatives Problemlösen und Mathematisieren und dazu die geistigen Grundtechniken des Faches: Klassifizieren, Ordnen, Generalisieren, Analogisieren und Formalisieren. Die Anbahnung von individuellen mathematischen Erkenntnisprozessen im Unterricht findet somit eine Orientierung an den epistemischen Mustern der Disziplin. Wissenschaftsorientierung erschöpft sich nicht in der Auswahl von schulgemäßen Inhalten, sondern bedarf der Gestaltung von Lernprozessen, die die fachlichen Erkenntnis- und Denkweisen angemessen widerspiegeln.

Für die Fachdidaktik hat sich zudem als produktiv herausgeschält, sich auch mit den Differenzen in den erkenntnistheoretischen Positionen der Mathematik auseinanderzusetzen (s. z.B. Barrow 1992, Heintz 2001). Während ausübende Mathematiker oft einen platonistischen oder formalistischen Standpunkt einnehmen, verstehen sich diejenigen, die sich mit epistemologischen Fragen der Disziplin auseinandersetzen wie z.B. Mathematikdidaktiker, eher als Konstruktivisten. Sie sehen auch die Mathematik als individuell und sozial konstruiertes Wissen - ohne allerdings die Frage nach der Vereinbarkeit externer Validität mathematischer Aussagen mit der Kontingenz individueller Konstruktionen befriedigend klären zu können.

Schließlich besitzt die Mathematik auch eine natürliche Affinität zu allen Disziplinen, die sich ihrer quantifizierenden und klassifizierenden Methoden bedienen. Das sind nicht mehr nur die Naturwissenschaften und Ingenieursdisziplinen, sondern ebenfalls die empirisch arbeitenden Zweige der Human- und Sozialwissenschaften. Mathematik fungiert hier in einer fruchtbaren Doppelrolle als „Erkenntnisgeber" und „Erkenntnisnehmer".

1.2 Schulfachliche Bezüge

Die skizzierten Spezifika der Mathematik im Kanon der Disziplinen und in unserer Gesellschaft ist wesentlicher Ausgangspunkt für einen Diskurs über die Rolle und den Anspruch der Mathematik als Schulfach. An ihnen muss sich ein normativer Rahmen für die Bewertung von Unterrichtsqualität ausrichten, insbesondere hinsichtlich der folgenden Grundfragen:

(1) „Wie viel Mathematik soll gelernt/gelehrt werden?" – Der Ressourcenanspruch des Faches
(2) „Was soll gelernt/gelehrt werden?" – Das Stoffproblem der Fachdidaktik
(3) „Wie soll gelernt/gelernt werden?" – Die Qualitätsfrage mathematischer Lernprozesse

In der neu aufkommenden Begrifflichkeit der „Standards" wären dies (1) *institutional standards* (2) *content standards* und (3) *process standards*. Zwischen (2) und (3) treten noch die *outcome standards*, die auf die Frage antworten: „Was sollen Schülerinnen und Schüler *können*?"

Während die ersten beiden Punkte unbestritten normativen Charakter haben und im Rahmen der Legitimationsfrage politisch ausgehandelt werden müssen, erscheint der dritte Punkt eher als Optimierungsproblem. Aber auch hier ergeben sich aus der Analyse der Mathematik als Disziplin und als Kulturgut Setzungen, die nicht aus den ersten beiden Punkten ableitbar sind: Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik so lernen, wie es den typischen Denk- und Arbeitsweisen der Disziplin und der Bedeutung der Mathematik in unserer Umwelt entspricht. Sie sollen mathematische Prozesse *authentisch* erleben und ein angemessenes Bild von Mathematik herausbilden - was nicht allein durch stoffliche Festlegungen erreicht wird. Die normative Entscheidungskette läuft also eigentlich in der Richtung (3)⇒(2)⇒(1) und damit anders als gängige politische Entscheidungswege.

Die Anforderungen an Mathematikunterricht sind fluktuierendes Ergebnis eines fortgesetzten gesellschaftlichen Diskurses. Er wird geführt mit Bezug auf Allgemeinbildungskonzepte mit unterschiedlichen Legitimationsperspektiven. Drei der einflussreichsten seien hier skizziert:

(1) Heymann (1996) hat mit seiner Analyse (bzw. Konstruktion) eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts der aktuellen Diskussion den (vor TIMSS und PISA) wohl größten Anstoß gegeben. Jenseits oberflächlicher Inhaltskanons extrahiert mit Bezug auf gängige Bildungstheorien übergreifende Bildungsziele, zu denen ein Mathematikunterricht beitragen kann, wie z. B. Lebensvorbereitung, Stiftung kultureller Kohärenz, Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch, die Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft oder die Einübung in Verständigung und Kooperation. Damit sind zugleich auch übergreifende Qualitätsmaßstäbe benannt, die sich in konkrete Kriterien für den allgemeinbildenden Mathematikunterricht ausdifferenzieren lassen. Heymann schlägt hierfür das Konstrukt „Unterrichtskultur" vor, das in 3.1 wieder aufgegriffen wird.

Geht man zusätzlich auch schultheoretischen Überlegungen nach, z. B. hinsichtlich Fragen der Mittelbarkeit bzw. Authentizität schulischer Lernprozesse im Fach (s. Erichson 2003, Jahnke 2005). so stößt man auf reformatorische Konzepte, die die tradierte Rolle des Mathematikunterrichts grundsätzlich in Frage stellen und neue Begründungszusammenhänge suchen, z. B. Mathematikunterricht in äußerer Differenzierung ab Klasse 9 bei Heymann (1996, 151), „Allgemeine Mathematik" bei Wille (1998) oder „Konkreter Mathematikunterricht" bei Baireuther (1998).

(2) Eine etwas andere Nuancierung mathematischer Allgemeinbildung findet man im Konzept der *mathematical literacy* (meist übersetzt mit: mathematische Grundbildung), das dem internationalen Teil der PISA Studien zugrunde liegt (PISA-Konsortium 2001). Da sich die Studie vornehmlich mit der Effizienz von Bildungssystemen gemessen in Schülerleistung befasst, bedarf es eines solchen konsensuellen, lehrplanunabhängigen normativen Referenzrahmens. *Mathematical literacy* definiert sich i. W. über die mathematischen Anforderungen an einen reflektierten Staatsbürger, im Vordergrund steht also die allgemeine Anwendungsfähigkeit von Mathematik in alltäglichen und beruflichen Situationen (Neubrandt 2004).

(3) Allgemeinbildungskonzepte, die stark auf die *Anwendung* von Mathematik fokussieren, sind keineswegs unumstritten in der Fachdidaktik. Oft richtet sich die Kritik gegen eine (fälschlich hineingelesene) Propagierung einer „Nützlichkeitsmathematik“, die wesentliche Aspekte der Disziplin ausblende. Einen Ausgleich in dieser Debatte um die Gewichtung innermathematischer und außermathematischer Aspekte hat Winter (1995) herbeigeführt, indem er die allgemeinbildende Qualität von Mathematikunterricht in einer Balance zwischen drei *Grunderfahrungen* sieht: Der Mathematik als (G1) Beschreibung von Erscheinungen der Welt um uns, als (G2) deduktive Welt eigener Art mit ihren geistigen Schöpfungen und als (G3) Anwendungsbereich von allgemeinen heuristischen Fähigkeiten.

Winter beschreibt hiermit einen normativen Anspruch an die Qualität von Mathematikunterricht eher als Anforderungen an den Bildungs*prozess* als an das Leistungs*produkt*. Die drei Grunderfahrungen finden sich als fachlich-bildungstheoretischer Bezugspunkt in der Mehrzahl neu entstehender Lehrpläne sowie als Orientierungskriterien für fachlich ausbalancierte Konzeptionen von Mathematikunterricht (s. Borneleit u.a. 2001).

1.3 Bezüge zu anderen Fachdidaktiken

Vor allem in der Naturwissenschaftsdidaktik (vgl. Fischler in diesem Band) findet Konzepte, die für das Fach Mathematik verfolgenswert erscheinen. Lernen wird gesehen unter der Perspektive des Konzeptwechsels, d.h. als Revision von alltäglichen Vorstellungen (Präkonzepten) in der intensiven Auseinandersetzung mit Phänomenen und gezielten Experimenten (s. z. B. Duit 2002). Diese Sicht räumt individuellen Schülervorstellungen einen größeren Raum ein als beispielsweise das Grundvorstellungskonzept (vom Hofe 1998), das sich eher an den mathematischen Strukturen orientiert. Vergleichbare Ansätze in findet man in der der Mathematikdidaktik z.B. zu individuellen Vorstellungen zum Zufall (Fischbein 1987) oder bei Brüchen (Prediger 2004). In diesem Zusammenhang könnte die Mathematikdidaktik auch die Chancen *quasi-experimentellen* Vorgehens besser ausloten – in Überseinstimmung mit einer gängigen Arbeitsweise forschender Mathematiker.

In der Naturwissenschaftsdidaktik kennt man ebenfalls den Ansatz einer konsequenten *Kontextorientierung* mit dem Ziel einer tragfähigen Sinnstiftung für individuelle Lernprozesse (z.B. Muckenfuß 1995, „Chemie im Kontext“ Parchmann/Ralle 1998). Das mathematische Pendant hierzu ist im Prinzip bereits von Freudenthal entworfen worden und ist in den Niederlanden als „realistischer Mathematikunterricht“ curricular verankert (Lange 1996).

2 Fachdidaktik im Dialog mit den Bildungswissenschaften über Unterrichtsqualität

Im Bemühen, sich einerseits als wissenschaftliche Disziplin mit genuinen Fragestellungen und Methoden zu profilieren und andererseits die Verknüpfungen zu ihren bildungswissenschaftlichen Bezugsdisziplinen konstruktiv auszubauen hat die Mathematikdidaktik vielfältige Ansätze entwickelt und befindet sich im Diskurs über die Tragfähigkeit bzw. Gewichtung verschiedener Ansätze, so z. B. zur Frage des Verhältnisses zwischen qualitativer und quantitativer Forschung, zum Verhältnis stoffdidaktischer und kognitionspsychologischer Herangehensweisen oder zur Aufgabe der Fachdidaktik zwischen der Entwicklung von Lernumgebungen und empirischer Grundlagenforschung. In der Kürze dieses Beitrags können nur einige Aspekte exemplarisch ausgeführt werden.

2.1 Pädagogische Psychologie

Die Begriffe und Methoden der pädagogischen Psychologie interessieren die Mathematikdidaktik vornehmlich hinsichtlich der Entwicklung von Modellen, die mathematisches Wissen, mathematische Fähigkeiten und mathematisches Lernen zu beschreiben vermögen. Während man immer schon an der Psychologie orientierte Analysen findet (z.B. Bauer 1978) gewinnt in neuester Zeit der Begriff der *Kompetenz*, der kognitive, motivationale und verhaltenssteuernde Leistungsdimensionen zusammenfasst, Beachtung. Er umfasst insbesondere die funktionale Bewältigung von Problemsituationen (Weinert 2001) und die Forderung nach seiner prinzipiellen Messbarkeit (Klieme u.a. 2004). Damit wird der Kompetenzbegriff für die Fachdidaktik sowohl unter empirischen wie bildungstheoretischen Gesichtpunkten bedeutsam.

Das wohl zurzeit am meisten diskutierte empirische Kompetenzkonstrukt ist eine homogene, eindimensionale mathematische Kompetenzskala. Sie wird vor allem im Rahmen von Leistungsvergleichsstudien konstruiert und erfasst Leistung mit so genannten probabilistischen Testmodellen (Rost 2004a). Dieser Ansatz ist zurzeit Gegenstand intensiver fachdidaktischer und bildungspolitischer Debatten. Einerseits wird das Vorhaben einer empirischen Erfassung von Schülerleistungen im Rahmen von Kompetenzmodellen prinzipiell als Fortschritt begrüßt (erste fachspezifische Kompetenzskalen zum Argumentieren wurden bereits vorgeschlagen, z.B. Reiss u.a. 2002), andererseits wird vor verkürzenden Interpretationen gewarnt (Bender 2005).

Konstruktiv gesprochen stellen sich u. a. die folgenden Forschungsdesiderate:

(1) Systembezogene *large scale assessments* zeigen eine hohe Eindimensionalität von Fachleistungen über die Schulformen hinweg, die noch dazu hoch mit den Leistungen in anderen Domänen korrelieren (Klieme/Neubrandt/Lüdtke 2001, 184). Welche differenziertere Struktur, insbesondere welche Dimensionalität von Fachleistungen können hier andere Instrumente, die nicht den Zielsetzungen und Bedingungen solcher Großstudien unterworfen sind, offen legen?

(2) Die zurzeit eingesetzten Instrumente zur Kompetenzerfassung können querschnittliche Unterschiede aufdecken und so vornehmlich zum Systemmonitoring beitragen. Zur Steuerung von Bildungsprozessen auch auf der Ebene der Klasse oder gar des Einzelschülers bedarf es differenzierterer Modelle und Instrumente der Kompetenzmessung, insbesondere der Messung *individueller Kompetenzprofile und Lernzuwächse*. Diese müssen der hohen Individualität von Lernwegen Rechnung tragen (z.B. konzeptuellen Umbrüchen beim Begriffserwerb) und dazu inhaltsspezifische Aspekte berücksichtigen (z.B. vom Hofe/Wartha 2005). Die Fachdidaktik entwickelt hier erste Modelle auch langfristiger Beschreibung von Leistungszuwächsen (vom Hofe u. a. 2002) und von validen Stufen von Kompetenzzuwachs (Kleine 2004, 2005). Hier gibt es noch viele Ansätze, die in Zusammenarbeit mit testtheoretischen Entwicklungen in Angriff genommen werden können, wie etwa die Weiterentwicklung des Kompetenzstufenkonzeptes (s. Rost 2004b).

(3) Insbesondere bei der Übertragung von Methoden der Leistungsmessung in die alltägliche Praxis ist weniger eine theoretische Verfeinerung als eine pragmatische Nützlichkeit entscheidendes Qualitätskriterium. Diagnostische Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern (Ingenkamp 1997) geht weit über die Prognosefähigkeit von messbarer Schülerleistung hinaus (wie z.B. bei Schrader/Helmke 2005), sondern fußt wesentlich auf der Interpretationsfähigkeit von Schülerprodukten, sollte also auch durch Instrumente qualitativer Forschung unterstützt werden (s. z.B. Krummheuer 2005).

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Fachdidaktik im Bereich des Erfassens von Leistungen und wohl mehr noch in der Beschreibung von Lernentwicklungen eine Vielzahl von fachspezifischen Modellen und Theorien anbietet, die empirisch fundiert und weiterentwickelt werden können. Dies gilt vor allem für allgemeine mathematische Fähigkeiten wie z.B. das Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren, Formalisieren (Winter 1975) oder für Konstrukte, die wie das Problemlösen eine fachübergreifende (Leutner 2004) und eine fachspezifische Dimension (Komorek/Bruder/Schmitz 2004) besitzen.

2.2 Vergleichende Bildungs- und Unterrichtsforschung

Viele Ansätze der vergleichenden Unterrichtsforschung (wie z.B. die Scholastik-Studie, Weinert/Helmke 1997) finden *allgemeine* (d.h. nicht fachspezifische) und *notwendige* Bedingungen bzw. Bedingungskomplexe und liefern damit nützliche Indikatoren für den Fachunterricht. Weitaus geringer ist der empirische Kenntnisstand über *fachspezifische* und *hinreichende* Bedingungen für einen guten Mathematikunterricht. In den letzten Jahren gab es (neben den internationalen) eine ganze Reihe von Leistungsvergleichsstudien in verschiedenen Bundesländern, die auf den Mathematikunterricht bezogen sind (für eine Übersicht s. Kaiser u.a. 2001). In der Erfassung von Qualitätsmerkmalen von Unterricht – zumeist über Schülerfragebögen – beziehen sie sich überwiegendend auf *nicht-fachspezifische* Kategorien und zielen eher auf ein Systemmonitoring. Der fachdidaktische Ertrag solcher Studien ist erwartungsgemäß begrenzt, da differenzierte Konzepte des Mathematiklernens in die Studien nicht eingehen. Dennoch ist der Ansatz der Erhebung von Kontextvariablen sicherlich zielführend, wenn er auf der fachlichen Seite mit genuinen fachdidaktischen Kategorien verbunden ist, wie z.B.

- individuelle begriffs- und vorstellungsbezogene Leistungszuwächse (z.B. Hofe u.a. 2002),
- Unterrichtsqualität aus mehrperspektivischer Sicht (Baumert u.a. 2004), insbesondere fachbezogene Aspekte, wie z. B. das Selbstwirksamkeitserleben von Schülerinnen und Schülern beim Problemlösen oder die Wahrnehmung des Einsatzes von Fachmethoden
- Bilder von Mathematik und Mathematikunterricht von Lehrenden (s. 3.1.3) und Lernenden (Leuders/Pallack 2005)
- Fachbezogene motivationale Merkmale der Lernenden (Heinze/Reiss 2004, Pekrun u.a. 2004)

3 Zentrale Themen der Mathematikdidaktik

In diesem Abschnitt sollen verschiedene, für die Qualitätsdiskussion bedeutsame fachdidaktische Perspektiven zur Sprache kommen.

3.1 Unterrichtskultur

Der Begriff „Unterrichtskultur“ wird zuweilen als Synonym für „Unterrichtsqualität“ verwendet. Oft findet man ihn, wenn präskriptive Aspekte betont werden oder wenn die Fachspezifität hervorgekehrt wird („*mathematische* Unterrichtskultur“), beispielsweise im Bezug auf mathematisches Argumentieren oder auf den Umgang mit Fehlern.

3.1.1 Deskriptive Befunde tatsächlichen bzw. problematischen Unterrichts

„Ex negativo“ gibt es in der Fachdidaktik bereits seit langem einen Konsens über kritische Aspekte des Mathematikunterrichts, welche seine Qualität beeinträchtigen können (z.B. Lietzmann 1919-1926, Wagenschein 1962, Winter 1989, Wittmann 1992, Borneleit u.a. 2001):

- Die *Überbetonung von Kalkül* räumt mathematischen Routineverfahren, die als Fertigkeit (auch unverstanden) abgearbeitet werden können, einen zu breiten Raum ein. Das äußert sich beispielsweise curricular in einem im hohen Anteil Algebra und verhindert, etwa in der Bruchrechnung den Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen (s. z.B. Malle 1993)
- Eine *zu frühe begriffliche Formalisierung*, die sich zuweilen in einer überbordenden Terminologie manifestiert, lässt nicht genügend Raum für individuelle Begriffsentwicklungen.

Dieser Effekt ist eng verknüpft mit einer unreflektierten *Orientierung an der Fachsystematik* als nur scheinbar geeignetem Ordnungsprinzip für Lernprozesse.

- Die Sicht auf *Mathematik als fertiges Produkt*, als geschlossenes, durch die Schüler zu übernehmendes Gedankengebäude, lässt zu wenig Spielraum für individuell entdeckende und genetische Lernprozesse.
- Zu *artifizielle Problemstellungen*, die eigens für den Mathematikunterricht konzipiert sind und nur innerhalb von Schule tradiert werden, verhindern die Vernetzung mit Alltagserfahrungen und individuelle Sinnstiftung (s. z.B. Winter 1992 zum Sach*rechnen*)
- Ein Übermaß an *fragend-entwickelndem Unterricht* in Erarbeitungsphasen berücksichtigt nicht hinreichend die Aktivierung *aller* Schülerinnen und Schüler und individuelle Lernwege. Es verhindert Offenheit, indem es *Leistungs*aspekte in *Lern*situationen bringt und es verleitet die Lehrkraft zu einengendem Vorgehen (s. Leuders 2001, 142)
- Die *Kurzfristigkeit des Lernens und Übens*, insbesondere für in zu kurzen Abständen angesetzte Klassenarbeiten, führt im Verein mit einer unreflektierten Übekultur (s. Wittmann 1992) zu hohen Vergessensraten und verhindert kumulative Lernprozesse und Vernetzungen.
- Zudem konkurriert eine *übervolle Stoffobligatorik* mit dem durchaus vorhandenen Wunsch von Lehrkräften nach einer Ausweitung von Phasen projektartigen Lernens, von Vertiefungen und offenen Formen entdeckenden Lernens.

Die Elemente dieses Problembündels stehen in engem wechselseitigen Bezug zueinander, so werden z. B. Stofffülle und hohe kognitive Anforderungen oft als Grund für einen Rückzug auf Kalküle angeführt. Es muss das Ziel künftiger fachspezifischer Studien zur Unterrichtskultur sein, diese genannten Aspekte auch empirisch zu erhellen, differenzierter in sie einzudringen und dabei näheren Aufschluss über Wirkungszusammenhänge zu erhalten.

Neue Anregungen hat die deskriptive Analyse von Unterrichtskultur durch den internationalen Vergleich bekommen. Videostudien, allen voran TIMSS-Video (Stigler/Hiebert 1999) machen durch den Blick auf andere Kulturen und deren Mathematikunterricht deutlich, dass sich deutsche Unterrichtsstunden im internationalen Spektrum betrachtet eher gleichen, genauer: dass sich typische Abläufe, so genannte *Skripts*, herausschälen. Das deutsche Skript ist vor allem durch die Erarbeitung von Lösungsverfahren im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch und deren Einübung in „Stillarbeit“ gekennzeichnet. In den qualitativen und quantitativen Analysen der fachlichen Kommunikation und der Aufgabenstellungen (J. Neubrand 2002, Klieme/Bos 2000) haben sich die oben genannten Defizite deutschen Mathematikunterrichts noch einmal als symptomatisch bestätigt.

Um Kausalaussagen über den Einfluss bestimmter Unterrichtsskripts auf Schülerlernen zu gewinnen, bedarf es längsschnittlicher Designs, die Unterrichtsstunden einer Lerngruppe über einen längeren Zeitraum erfassen und dazu Hintergrundvariablen in Mehrebenenansätze erfassen (Pekto u.a. 2003). Das zusätzliche Potential von Videostudien liegt darin, dass im internationalen Vergleich Anregungen gewonnen werden können und dass videografierter Unterricht als Ausgangpunkt für Lehrerfortbildungen dienen kann (ebd., 278; s. auch Leuders 2001, 218).

3.1.2 Präskriptive Modelle guten Unterrichts

Im fachdidaktischen Diskurs der letzten Jahrzehnte hat sich eine Reihe von Qualitätsmerkmalen „ex positivo“ herausgeschält. Sie liegen vielerorts bereits der Lehrerausbildung als normativer Rahmen zu Grunde. Exemplarisch für normative Kriterienkataloge werden im Folgenden vier Darstellungen synoptisch nach abnehmender Fachspezifität bzw. zunehmendem Allgemeinheitsgrad nebeneinander gestellt:

Aspekt	Blum/Biermann (2001): fachspezifische Kriterien	Heymann (1996): „allgemeinbildende Unterrichtskultur“	SINUS (1997): in Rückgriff auf Resultate der Lehr-/Lernforschung	H.Meyer (2004): allgemeindidaktisch
Vernetzung / Sinnstiftung	Inner- und außermathematische Vernetzungen (Themen und Kontexte)	Sinn von Anwendungsaufgaben diskutieren	Situierung in Anwendungen (horizontale Vernetzung), Kumulativität (vertikale Vernetzung), Systematisierender Wissensaufbau, variables und integriertes Üben, Kompetenzzuwachs erfahrbar machen	vertikale Vernetzung, Passgenaues, gezieltes Üben
Verantwortung/ Kooperation		Verantwortung für den eigenen Lernprozess, Gegenseitiges Helfen, Partner- und Gruppenarbeit, Gegenseitiges Helfen, Partner- und Gruppenarbeit	Kooperatives Lernen, Stärkung von Eigenverantwortung	Verantwortungsübernahme
Kommunikation		Direkte Kommunikation zwischen Schüler, echte Frage, Mathematiklernen als Austauschprozess		Gesprächskultur,
Bewertung	Erkennbar beurteilungsfreie Arbeitsatmosphäre, wo Fehler Lernanlässe sind	Fehler als notwendige Begleiterscheinung und Anlässe zum Nachdenken	Transparente Trennung von Lern und Leistungssituationen, Fehler produktiv nutzen	Transparente Leistungserwartung
Heterogenität	Behandlung offener Aufgaben mit breitem Differenzierungspotential		differenzierendes Lernen auf unterschiedlichen Komplexitätsniveaus, Förderung von Mädchen und Jungen	Individuelles Fördern
Offenheit	Behandlung offener Aufgaben mit breitem Differenzierungspotential, Erarbeiten vielfältiger Lösungen, Vergleichen und Bewerten von Lösungen	Offen Aufgaben mit mehreren vernünftigen Lösungen, Raum für Umwege, Offenheit für Verläufe, Lösungswege als Zugangweisen begrüßt	multiple Lösungen	
Reflexivität	Reflexionen über das Vorgehen und über Mathematik	Gemeinsame Reflexion über mathematisches Tun		
fachliche Prozesse	Modellieren, Argumentieren & Begründen, Vorstellungsaktivierung, Verstehen (vs. Kalkül)	Mathematiklernen als Erkundungsprozess, Spielerisches Erproben, Stufen der Annäherung an Erkenntnis, vorläufige Gedanken erwünscht, Verstehen vor technischer Beherrschung und Formalisierung		Inhaltliche Klarheit
Methoden	Durchgängige geistige Schüleraktivitäten, Methodenvariation, mit vielen Schüler-Kooperationsphasen	Gelegenheit, aktiv zu werden	Selbstreguliertes Lernen	Methodenvielfalt und -variabilität

Fachbezogene Modelle führen naturgemäß mehr fachspezifische Prozesse als bedeutsame Kategorien an und heben Aufgaben als „Trägermedium“ qualitätvollen Lernens hervor (s.a. 3.5). Sie betonen zudem die Bedeutsamkeit des Umgangs mit Fehlern – was mit Blick auf die epistemologische Sonderstellung der Mathematik (s. 1.1) zu verstehen ist. *Fachübergreifende* Modelle hingegen weisen meist keine hinreichend differenzierte Kategorien auf, um solche Aspekte zu erfassen.

3.1.3 Professionelle Kompetenzen und epistemologische Überzeugungen

Die Frage der Lehrerkompetenzen als Qualitätsdeterminanten für Unterricht wird zurzeit auch unter normativen Gesichtspunkten im Rahmen der Setzung von Standards für die Lehrerbildung diskutiert. Die Fachdidaktik ist hier gefragt *fachspezifische* Standards beizusteuern und zu validieren Dies bedarf allerdings einer empirischen Auseinandersetzung mit der bislang wenig aufgeklärten Wirkungskette: Lehrerbildung ⇒ Lehrerhandeln ⇒ Schülerlernen (Terhart 2002). Mit Blick auf die in 3.1.2 dargestellten Modelle sollten u.a. folgende Dimensionen fachbezogener Lehrerkompetenz betrachtet werden:

- Fachwissen zu schulmathematischen Inhalten (z.B. Vielfalt von Lösungen, fundamentale Ideen)
- Epistemologisches Wissen (z. B. Begriffsbildung, Problemlösen, Beweisen)
- Wissen zur Konstruktion von Lernarrangements zur Initiierung von Lernprozessen (z.B. Darstellungsmöglichkeiten, begriffserschließende Probleme)
- Moderative Kompetenzen zur Initiierung und Aufrechterhaltung von Kommunikation von Schülerinnen und Schülern über Mathematik (z.B. in Phasen mathematischen Argumentierens)
- Handlungkompetenzen in kritischen Unterrichtssituationen (z.B. flexibles Eingehen auf Schüleransätze, Umgang mit Fehlern)
- Diagnostische Kompetenzen (z. B. Erkennen von Schülervorstellungen, Interpretation von Schülerfehlern, valide Leistungsüberprüfung)

Solche differenzierten Modelle fachbezogener professioneller Kompetenz liegen bereits einigen aktuellen Studien zu Grunde (s. z.B. CoActiv, Krauss u.a. 2004).

Neben den genannten Wissens- und Handlungselementen umfasst der Kompetenzbegriff auch Einstellungen und Haltungen. Hierzu gehören etwa die epistemologischen und unterrichtsbezogenen Überzeugungen (Weltbilder, *beliefs*) von Lehrerinnen und Lehrern (z. B. Grigutsch/Raatz/Törner 1998). Demnach spiegeln die Bilder von Mathematik aus der Sicht von Lehrkräften die verschiedenen Aspekte der Disziplin (s. 1.1) wider: Mathematik als streng-deduktives System, als nützliches Modellierungs- und Problemlösewerkzeug, als Prozess des Entdeckens und Erfindens, als Repertoire von Regeln und Verfahren. Man kann postulieren, dass die so festgestellten Mathematikbilder von Lehrkräften einerseits durch ihre Erfahrungen als Schüler und Studierende geprägt sind und wiederum deren eigene Unterrichtsgestaltung beeinflussen – Studien, die dieser Kausalkette differenzierter nachgehen, stehen noch aus.

Auch durch den internationalen Vergleich im Rahmen ethnographisch angelegter Studien, ergeben sich vertiefte Kenntnisse: Deutsche Mathematiklehrkräfte sehen demnach in der Mathematik eher einen systematischen Wissensbestand, der an Schülerinnen und Schüler weitergegeben werden muss, während andere Kulturen Mathematik eher als „Werkzeug zur Problembewältigung“ auffassen – mit entsprechenden Konsequenzen für die Unterrichtsgestaltung.(vgl. z.B. Knipping 2003).

3.2 Lernmodelle

Mathematiklernen kann im Kern aufgefasst werden als ein gestufter *Begriffsbildungsprozess*. Das in der Fachdidaktik wohl immer noch einflussreichste Modell stammt von Freudenthal

(1976, 1991) im Rückgriff auf die van Hiele'schen Begriffsstufen.

– Stufe 0, die prämathematische Vorstufe, ist auf die gegenständliche Welt gerichtet. Schülerinnen und Schüler sammeln Erfahrungen durch handelndes Umgehen mit konkreten Objekten.
– Stufe 1 ist bereits eine erste (informelle) Theoriebildung. Schülerinnen und Schüler reflektieren ihre praktischen Erfahrungen, ordnen sie gedanklich, bilden neue Begriffe.
– Stufe 2 hat als Gegenstand nunmehr das theoretische Wissen der ersten Stufe. Schülerinnen und Schüler entdecken und begründen nun Zusammenhänge zwischen den Begriffen der ersten Stufe.

Dieses Stufenmodell hat einen rekursiven Charakter. Die Handlungen einer Stufe sind auf die Objekte der vorangehenden Stufe gerichtet. Auf den folgenden Stufen kann ein lokales Ordnen und Präzisieren der Begriffe stattfinden z.B. durch eine formale Definition, auf wieder höherer Stufe die Axiomatisierung durch Reflexion unterschiedlicher Definitionen. In Konsonanz mit Lernmodellen von Piaget, Aebli oder Wygotski sieht ein solches Modell das Entstehen *jeder* Mathematik aus konkreten Anschauungen. Freudenthal postuliert daher die Bedeutung *realer und anschaulicher Probleme* als Initialzündungen für jede mathematische Begriffsentwicklung.

Man kann Mathematiklernen auch als fortwährenden Prozess des Problemlösens auffassen – dies ist eine zum Begriffsbilden komplementäre aber nicht widersprechende Sichtweise. Immer noch einflussreich ist Polyas Plädoyer für ein problemlösendes, authentisches Mathematiktreiben in der Schule (Polya 1945). Viele Phasenmodelle des Problemlösens sind seitdem aufgestellt worden (s. Neuhaus 2002), aber ein breit akzeptiertes Modell des mathematischen Problemlösenlernens ist zurzeit nicht in Sicht. Zwei wesentliche Faktoren sind aber unstrittig: das Angebot von Gelegenheiten zum aktiven Problemlösen und das Reflektieren von Lösungswegen. Zur Frage, wie das Individuum sich Problemlösestrategien am besten aneignet, gibt es verschiedene Modelle, z.B. das Entwickeln mathematischer Strategien aus Alltagsstrategien (Gürtler u.a. 2002) oder das Lernen an Lösungsbeispielen (Renkl/Schworm/vom Hofe 2001)

Neben diesen Lernmodellen, die bestimmte mathematische Prozesse ins Zentrum stellen, gibt es auch Ansätze, die die für das Mathematiklernen relevanten Kognitionen untersuchen, wie z.B. die sprachlogische oder kognitive Komplexität von Denkvorgängen (Cohors-Fresenborg/Sjuts/Sommer 2004) oder die Klassifizierung prädikativer und funktionaler kognitiver Strukturen (Schwank 1996).

Viele neuere Lehrkonzepte berufen sich auf ein konstruktivistisches Lernmodell. Man kann „Konstruktivismus" hierbei auffassen als fluktuierendes Gefüge von Argumenten zwischen radikaler Erkenntnisphilosophie (z.B. Glasersfeld 1992), Kognitionspsychologie (Gerstenmaier/Mandl 1995) und reformpädagogischen Grundgedanken. Dazu fließen auch Befunde aus der Biologie und Neurobiologie (Maturana/Varela 1987, Roth 1997) und der neuronalen Modellierung ein (Amit 1992). Von einer systematischen Neurodidaktik (Friedrich/Preiß 2003) sind wir dennoch ein gutes Stück entfernt und bleiben eher im Bereich einer auf naturwissenschaftliche gewonnene Befunde zurückgreifenden Erkenntnisphilosophie. Konkretisiert man die verschiedenen konstruktivistischen Konzepte für den Mathematikunterricht, so resultieren meist Lernauffassungen, die in der Fachdidaktik bereits eine lange Tradition schon vor der Entdeckung konstruktivistischer Perspektiven vorweisen können. Die folgende Tabelle stellt die Argumentationslinien skizzenhaft dar (s. auch Dubs 1995):

Radikaler Konstruktivismus	Neurobiologie	Pädagogische Interpretation	Konsequenzen für das Mathematiklernen
Es gibt keine analogen Repräsentationen externer Realität	Information ist im Gehirn verteilt und hoch verarbeitet abgelegt, nicht als Abbild von Wirklichkeit	Lernen geschieht nicht durch Belehrung, Wissen ist kann nicht transportiert werden. Lernen ist vielmehr ein Prozess des aktiven Aufbaus von Wissen durch das Individuum.	Selbsttätige intensive Auseinandersetzung mit bedeutsamen oder interessanten Problemen
Wissen wird nach dem Kriterium der Viabilität konstruiert, angeregt durch Perturbationen	Lernen findet als neuronale Selbstorganisation statt	Wissensaufbau wird stark beeinflusst durch das kommunikative Aushandeln von Bedeutungen in einem sozialen Kontext.	Vorläufige Begriffsbildungen, Sprache des Verstehens, Bezeichner transportieren nicht Begriffe
Das Gehirn (der menschliche) Geist ist ein selbstreferentielles, autopoietisches System	Neuronen des Gehirns sind im wesentlichen untereinander vernetzt, Sinneseindrücke sind sekundär	Wesentlichen Einfluss auf das Lernen hat nicht die fachliche Struktur des Stoffes sondern die beim Lernenden vorhandene individuelle Struktur	Berücksichtigen individueller Schülervorstellungen und Alltagserfahrungen, Zulassen individueller Deutungen Interpretationen, Nutzen multipler Repräsentationen
	Erfahrungen sind über das limbischen System immer mit Emotionen gekoppelt	Die Qualität des Gelernten ist eng mit der Situation verbunden (also auch mit deren emotionalen Wertigkeit), Lernen ist stark durch den Kontext mitbestimmt.	Situationen als Lernanker nutzen, Abstraktionen mit Prototypen und paradigmatischen Situationen vernetzten, Freude am mathematischen Arbeiten ermöglichen

Die Fachdidaktik hat diese Impulse an vielen Stellen aufgenommen und bis hin zu Lehrkonzepten entwickelt (Galin/Ruf 1998, s. a. 3.3, Hußmann 2002)

3.3 Lehrmodelle

Einige problematische, obsolete Lehrmodelle wirken unterschwellig in tradierter Unterrichtsgestaltung, fortgeschriebenen Curricula und gängigen Lehrwerken weiter. Hierzu gehört die von Lenné (1969, 35) kritisierte *Aufgabendidaktik*, als eine Form des behavioristischen Aufstiegs vom Einfachen zum Komplexen, bei dem die Mathematik dem Schüler als eine Reihe von isolierten Gebieten mit ihren jeweiligen Aufgabentypen entgegentritt. Ein Indiz sind die z.B. die atomisierenden Übungssequenzen („graue Päckchen", Wittmann 1992). Auch findet man – als noch nicht verklungener Nachhall der „Neuen Mathematik" – immer wieder einen überzogen fachsystematischen, deduktivistischen Aufbau in der curricularen Organisation. Typisch hierfür ist, dass Definitionen, die eigentlich Endpunkt einer fachlichen Begriffsentwicklung sind, wie z.B. der Vektorbegriff, an den Anfang des Lernens gestellt werden

Als zentrales Lehrmodell, das über die letzten Jahrzehnte fachspezifisch in verschiedenen Varianten ausdifferenziert wurde, muss das *genetische Lehrmodell* – gewissermaßen als Konkretisierung entdeckenden Lernens im Fach Mathematik – gelten (s. z.B. Wittenberg 1963, Wagenschein 1970, Freudenthal 1976, Winter 1989 und Wittmann 1974). Zentrale Merkmale sind:

- Die Entwicklung von mathematischen Begriffen geschieht an inner- oder außermathematischen Problemen, die aus sich heraus zur Begriffsentwicklung herausfordern (Problemorientierung)
- Mathematische Begriffsbildung wird im Handeln und in der Anschauung verankert (s. die Freudenthalschen Stufen in 3.2)
- Der angestoßene Entdeckungsprozess ist getragen vom Zutrauen in die aktiven geistigen Kräfte der Schülerinnen und Schüler und ist offen für individuelle Lernwege

Genetisches Lernen impliziert allerdings nicht das *ausschließlich* entdecken-lassende Lernen. Es fordert vielmehr eine aktive und authentische Weise der Begriffsbildung und grenzt sich damit gegen das Lernen durch Darbietung und Nachahmung ab. Ein genetischer Lehrgang bedarf auch der steuernden Funktion der Lehrkraft in Form der Organisation und Moderation der Entdeckungsprozesse und der Einführung extern gesetzter Normen und Systematisierungen, dort wo sie von den Lernenden nicht geleistet werden können. Mathematiklernen muss also stets in einer angemessenen Balance zwischen Konstruktion und Instruktion stattfinden (Hefendehl 2005).

Aus stoffdidaktischer Sicht ist das genetische Lehrkonzept verbunden mir einer bewussten Auswahl exemplarischer Inhalte und Probleme anstelle einer (fach-)systematischen Durcharbeitung von Stoff. Dieses *exemplarische Prinzip* (Wagenschein 1970) lässt sich in der Mathematik anhand geeigneter paradigmatischer Aufgabenstellungen verwirklichen (s. auch 3.5).

Während das genetische Lernen immer noch stark auf den individuellen Lernprozess fokussiert, gibt es neuere Ansätze, die die Bedeutung kommunikativer und sozialer Aspekte des Mathematiklernens stärker berücksichtigen. Am weitesten ausdifferenziert ist hier wohl das Konzept des *dialogischen Lernens* von Gallin/Ruf (1998). Es spezifiziert neben einem konstruktivistischen Bild vom Menschen und vom Lernen einen Satz von Gestaltungsprinzipien, wie z.B. die Unterscheidung zwischen dem *Singulären* (z.B. der Sprache des Verstehens der lernenden Individuen) und dem *Regulären* (z.B. der Sprache des Verstandenen, die der fertigen Mathematik). Zum singulären Bereich des *Lehrenden* gehören so genannte Kernideen, das sind „subjektiv bedeutsame mathematikbezogene Erfahrungen, die Ausgangspunkte für eine tragfähige Auseinandersetzung mit Mathematik und eine für Kommunikation über Mathematik sein können." (z.B. Leuders 2004a). Medium des Anstoßes für den Lernenden werden dann offene Aufträge, also *echte* Fragen des Lehrenden, der z.B. wissen möchte, wie ein Schüler über eine bestimmte mathematische Situation denkt. Zum *singulären Bereich des Lernenden* gehören individuelle, auch emotional geprägte Begegnungen mit solchen offenen Aufträgen. Den Prozess der individuellen Auseinandersetzung hält er in einem Reistagebuch fest , das dann auch als Medium der Rückmeldung über individuelle Sichtweisen und Verständnisschwierigkeiten an den Lehrenden dient. Diese radikale Abkehr von traditionellen Unterrichtsformen praktizieren nur wenige Lehrerinnen und Lehrer, aber ihre Zahl nimmt zu.

3.4 Unterrichtsmethoden

Unterrichtsmethoden als komplexe, konkrete Organisationsformen findet man oft als Thema fachunspezifischer Fortbildungsangebote (z.B. Klippert 1999). Ihre Umsetzung im Fach Mathematik bleibt aber leider meist unbefriedigend, da Spezifika des Faches zu wenig beachtet bzw. konstruktiv genutzt werden (z.B. unterschiedliche Formen des entdeckenden Übens). Entwicklungsfähige Ansätze findet man z.B. in folgenden Bereichen:

- Formen kooperativen Lernens wie z.B. verschiedene Formen des Gruppenpuzzles betonen die die Wirkung des „Lernen durch Lehren" und die Verantwortungsübernahme von Schülern für den eigenen Lernprozess und den der Gruppe (Leuders 2001, 179).

- Spiele im Mathematikunterricht werden immer wieder als Gelegenheiten selbstbestimmten, druckfreien, oft auch impliziten Lernens betrachtet. Ihr Potential als Ausgangspunkt authentischer mathematischer Erkundungen und Begriffsbildungen ist bei weitem nicht ausgelotet.
- Die Großform des Projektes mit allen ihren positiven Merkmalen (z.B. Gudjons 1997) ist geeignet, Mathematiklernen in sinnstiftende Kontexte einzubetten. Leider wird oft genug die Mathematik in eine Zubringerfunktion verdrängt. Viele gute Konzepte beruhen immer noch auf der Kreativität und dem Engagement einzelner Lehrpersonen (z.B. Ludwig 1997).

Kritisch müssen Ansätze gesehen werden, die Unterrichtsmethoden eher unter dem Aspekt ihrer kompensatorischen Funktion („zeitweises Aufheben der Dominanz kognitiven Arbeitens im Mathematikunterricht") sehen.

3.5 Aufgaben

Während Organisationsformen („Methoden") den äußeren Ablauf des Unterrichts determinieren, sind *Aufgaben* bzw. *Probleme* der Träger des inneren Ablaufs. Wesentliche Kriterien für die Reflexion der Qualität einer Aufgabe bzw. für ihre optimierende Konstruktion muss die *Funktion* der Aufgabe sein. J. Neubrand (2002,2) bezeichnet Aufgaben als „Kristallisationspunkt selbstständigen Lernens. Büchter/Leuders (2005) unterscheiden:

(1) Aufgaben mit der primären Funktion, *Lernprozesse* zu initiieren:

(1a) Aufgaben zum *Erkunden, Entdecken und Erfinden* sind offene, Lösungsvielfalt produzierende Aufgaben, die Schülerinnen und Schüler anregen, auf eigenen (auch nach Leistungsfähigkeit differenzierten) Wegen Mathematik zu betreiben. Solche Aufgaben sind in der allgemeinen Didaktik bekannt als „originale Begegnungen" (Roth) und „fruchtbare Momente" (Copei), in der Fachdidaktik als „herausfordernde Fragen" bei Wagenschein (1970), und in neuester Zeit als „produktive Aufgaben" (Wittmann 1992, Jahnke/Herget/Kroll 2001). „Produktive Aufgaben sind Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler zur Eigentätigkeit anregen, sie sehen und wundern, vermuten und irren, suchen und finden, entdecken und erfahren lassen." (ebd.). Auch das Unterrichten mit *rich learning tasks* (Flewelling/Higginson 2001) und open ended problems (Becker/Shimada 1997) stößt in Deutschland auf Interesse.

(1b) Aufgaben zum *Sammeln, Sichern und Systematisieren* (konvergente Prozesse) sind eher ungewöhnlich, da der konvergente Teil deutschen Unterrichts meist im Klassengespräch stattfindet. Alternative Unterrichts- (und Lehrbuch-)konzepte, die auch diese Phase stärker in die Hände der Schüler gibt sind wünschenswert und in Aufgaben umsetzbar (s. Büchter/Leuders 2005, 136).

(1c) Aufgaben zum *Üben, Vernetzen und Wiederholen* bauen auf vorhergehendes Lernen auf und vertiefen und erweitern dieses. Hier gilt es durch Aufgaben behavioristische Übekonzepte aufzubrechen und operative Übeformen, so genannte „produktive" oder „intelligente" Übeformate zu etablieren (Winter 1984, Wittmann 1992, Blum/Wiegand 2000).

(2) Aufgaben mit der primären Funktion, *Leistungen* auszuüben und festzustellen zielen auf das Hervorrufen von erlebbarer oder auswertbarer Performanz und folgen daher anderen Qualitätskriterien.

(2a) Aufgaben zur Diagnose dienen dazu, Informationen für pädagogische Entscheidungen zu gewinnen – geeignet sind also insbesondere solche Aufgaben, die Schüler zur Anfertigung Eigenproduktionen anregen.

(2b) Aufgaben zur Leistungsmessung und -beurteilung sind im (zu Quantifizierungen neigenden) Fach Mathematik in Form ökonomischer, additiv quantifizierender, pseudoobjektiver Instrumente der Leistungsmessung kaum wegzudenken. Viele praktikable, *qualitative* Alternativen (Leuders 2004b) finden im Fach Mathematik nur zögerliche Annahme.

(2c) Aufgaben zum *Leistungserleben* bilden eine wenig geläufige Kategorie. Sieht man aber das Erleben von Kompetenz als, die wesentliche Motivation die Schule zu bieten hat (Baumert 1993), so erkennt man ihre Funktion darin, dass Lernende die Nützlichkeit ihrer Wissens und ihren individuellen Kompetenzzuwachs erfahren (s. BLK 1997). Dazu zählen etwa offene Modellierungs- oder Problemaufgaben wie z.B. so genannte Fermiaufgaben (Leuders 2001, 103), in denen mathematische Fähigkeiten angewendet und vernetzt werden, und die nicht unter dem Zwang der einzig richtigen Lösung stehen.

Aus der Vielzahl von Merkmalen (also potentiellen Qualitätskriterien) für Aufgaben, die je nach Funktion entweder mehr oder weniger starke Ausprägungen haben sollten, seien hier als wesentliche genannt: Offenheit (vgl. Bruder 2000), Differenzierungsvermögen, Verstehens- oder Grundvorstellungsorientierung (statt Verfahrensorientierung), Produktivität und Authentizität. Authentisch können Aufgaben nicht nur hinsichtlich ihres Kontextes sein, sondern auch durch die authentischen mathematischen Prozesse, die sie anregen, wie z.B. das divergente Generieren von Problemen und Vermutungen anregen sollten - etwa nach dem Prinzip der Aufgabenvariation (Schupp 2002).

4 Unterrichts- und schulsystembezogene Innovationen

Dem Schulfach Mathematik ist in den letzten Jahren, wohl auch wegen TIMSS und PISA, besonders viel bildungspolitische Aufmerksamkeit entgegengebracht worden. Daraus resultiert auch eine große Zahl von Initiativen und Modellversuchen, von denen einige in den vorangegangenen Abschnitten bereits zur Sprache kamen. Zudem führt die Orientierung an Standards zu (noch gar nicht absehbaren) Veränderungsprozessen. Das Fach Mathematik profitiert zumindest von der Orientierung an Kompetenzen statt an Inhalten und von dem neuen Gewicht mathematischer Prozesse in den Curricula. Im Folgenden können nur drei Aspekte zur Sprache kommen.

4.1 Curriculare Entwicklungen

Neue Lehrpläne betonen Erwartungen an prozessbezogene Kompetenzen von Schülerinnen und Schüler, z.B. das Problemlösen, das Argumentieren oder Modellieren (vgl. 1.1, sowie Leuders/Barzel/Hußmann 2005, Blum u.a. 2005). Auf der Ebene der *inhaltlichen* Anforderungen stehen die traditionellen Bereiche des Fachen grundsätzlich nicht in Frage. Allenfals findet eine Neueinschätzung der kalküllastigen Algebra statt und die Stochastik erhält, auch unter dem Gesichtspunkt eines verständigen Umgangs mit Zahlen („numeracy“), ein zunehmendes Gewicht. Für die Oberstufe wird eine grundsätzliche Revision des Grundkurses, etwa nach dem weniger akademischen und eher anwendungsorientierten niederländischen Modell durch föderale Prüfungsfestlegungen (EPA) behindert. Neue Themen, die wie etwa die Diskrete Mathematik, insbesondere die Anwendung von Graphen, scheinen geeignet, reichhaltige Lernprozesse zu initiieren und dies mit einem zeitgemäßen Bild von Mathematik zu verbinden. Sie finden aber nur sporadischen Eingang in die Praxis.

4.2 Innovation durch Neue Medien

Medien – ob digital oder analog – sind eine sinnvolle didaktische Hilfe.“ (Klimsa/Issing 2002, 16). Für den Mathematikunterricht gibt es aber neben den „digitalen Lernumgebungen“, deren Qualitätsfrage hier nicht erörtert werden kann und universeller Software wie z.B. Text- und Grafikverarbeitungen, eine ganze Reihe speziell *mathematischer Werkzeuge*, die die Art und Weise der Befassung mit Mathematik im Unterricht qualitativ und nachhaltig verändern. Zu den wichtigsten gehören Computeralgebrasysteme (CAS), Dynamische Geometriesysteme (DGS) und Tabellenkalkulationen (TK). Sie stehen als technischer Träger möglicher zentraler Innovationen im Zentrum vieler fachdidaktischer Konzepte und Entwicklungen (z.B. Hole 1998, Weigand/Weth 2002, Henn 2004) und sind Gegenstand von Interventionsstudien (z.B.

Barzel 2006). Die wesentlichen Charakteristika und damit potentiellen Einflüsse auf die Qualität von Mathematikunterricht lassen sich grob zusammenfassen (nach Barzel/Hußmann/Leuders 2005, 38): Conputer bieten eine Entlastung von Kalkül und Algorithmen, sie machen insbesondere den Umgang mit Realdaten möglich. Die mögliche Interaktivität sowie dynamische Visualisierung des Mediums bereichern Lernumgebungen und unterstützen insbesondere exploratives und problemlösendes Arbeiten. Auf der anderen Seite kann der Computer zu einer Vernachlässigung von Grundfertigkeiten, einem oberflächlichen Manipulieren führen und echte Handlungen und physische Modelle verdrängen.

Auf praktischer Ebene hat sich die Frage nach der Bedeutung der Neuen Medien im Mathematikunterricht bereits geklärt, im deutschsprachigen Raum gibt es eine große Zahl von Innovationsprojekten und großflächigen Implementationen, bisher jedoch ohne auf die Gesamtheit des Mathematikunterricht an den Sekundarschulen durchzuschlagen.

4.3 Modelle der Schul- und Unterrichtsentwicklung

Aus Sicht des Faches Mathematik werden zurzeit drei Paradigmata der Unterrichtsentwicklung vertreten und mitunter kontrovers diskutiert:

- Das Paradigma der wissenschaftlichen Curriculumentwicklung: Unterrichtsentwicklung „vom Fach aus“, auf dem Wege des „Erschaffens substantieller Lernumgebungen durch die konstruktive Entwicklungsforschung“ (s. z.B. Wittmann 2005)
- Das Paradigma der inneren Schulentwicklung: Unterrichtsentwicklung als administrativ getragene kooperative Unterrichtsentwicklung durch Fachgruppen an der Schule (z.B. in Form von „lesson study“ oder Lehrerforschungsprojekten s. Krainer 2005)
- Das Paradigma der Rechenschaftslegung: Unterrichtsentwicklung durch konsequentes Erheben und Rückmelden messbarer Wirkungen, ggf. sogar verbunden mit Sanktionierung (sog. „data driven school improvement“, s. z.B. Bonsen/von der Gathen 2005, Büchter/Leuders/Bruder 2005)

Wirkungsvoll kann wohl nur eine konstruktive Kombination aller drei Wege sein: Ohne Unterstützung durch die Fachdidaktik tritt die Entwicklung in Fachgruppen der Schulen auf der Stelle, ohne zeitliche und personelle Spielräume für Entwicklungsarbeit in den Schulen prallen empirisch gewonnene Informationen über Veränderungsbedarfe von den überlasteten Schulen wirkungslos ab, ohne ehrlichen und objektiven Blick auf die Wirkungen von Unterricht, gemessen in Schülerleistungen, bleibt der Zyklus der Qualitätsentwicklung offen und ziellos. In der Tat kann erst ein abgestimmtes und ausbalanciertes Gesamtsystem zu produktiven Entwicklungen führen. Letztlich gilt: „Was guter Mathematikunterricht ist, müssen Lehrende ständig selber erarbeiten!“ (Krainer 2005)

Literatur

Aigner, M./Behrends, E. (2002) (Hrsg.): Alles Mathematik. Braunschweig: Vieweg.

Amit, D.J. (1992): Modelling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks. Cambridge University Press.

Baireuther, P. (1998): Konkreter Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Baptist, P./Winter, H. (2001): Überlegungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe. Tenorth, H.E. (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe. Weinheim, Basel: Beltz, S. 54-76.

Barrow, J.D. (1992): Pi in the Sky. Oxford: Oxford University Press.

Barzel, B. (2006): Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion. Evaluation einer Lernwerkstatt im 11.Jahrgang mit integriertem Einsatz von Computeralgebra hinsichtlich der Förderung prozessbezogener Kompetenzen. In Druck.

Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T.(2004): Bildungsstandards und Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen und Baden-Württemberg - zwei Wege zur Umsetzung nationaler Empfehlungen. Der Mathematisch Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 57/3. S. 275-286.

Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T.(2005): Mathematikunterricht mit Computer, Internet & Co. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bauer, L. (1978): Mathematische Fähigkeiten. Paderborn: Schöningh.

Baumert, J. (1993): Lernstrategien, motivationale Orientierung und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen im Kontext schulischen Lernens. Unterrichtswissenschaft, 21, S. 327-355.

Baumert, J. (2002): Deutschland im internationalen Bildungsvergleich. In: Kilius, N./Kluge, J./Reisch, K. (Hrsg.): Die Zukunft der Bildung. Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Baumert, J./Lehmann, R./Lehrke, M./Schmitz, B./Clausen, M./Hosenfeld I./Köller O./Neubrand, J. (1997). TIMSS - Mathematisch - naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Berlin: Leske & Budrich.

Baumert, J./Kunter, M./Brunner, M./Krauss, S./Blum, W./Neubrand, M. (2004): Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und -Schüler und ihrer Lehrkräfte . In Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2003. Münster: Waxmann, S. 314-354.

Becker, J./Shimada, S. (Hrsg.) (1997): The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics. Reston VA: NCTM.

Bender, P. (2005): Die etwas andere Sicht auf PISA, TIMSS und IGLU. Der Mathematikunterricht 2/3–2005. S.36-57.

Beutelspacher, A. (2001): „In Mathe war ich immer schlecht“. Braunschweig: Vieweg.

Biehler R./Heymann H.-W./Winkelmann, B. (Hrsg.) (1998): Mathematik allgemeinbildend unterrichten: Impulse für Lehrerbildung und Schule. Köln: Aulis Verlag.

BLK (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (http://www.blk-bonn.de/papers/heft60.pdf), (15.10.05)

Blum, W./Biermann, M. (2001): Eine ganz normale Mathe-Stunde? In: Mathematik lehren 108/2001, S. 52-54. (auch unter http://www.mathelier.de, 15.10.05)

Blum, W./Drüke-Noe, C./Leiß, D./Wiegand, B./Jordan, A. (2005) Zur Rolle von Bildungsstandards für die Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht. In: Büchter, A./Bruder, R./Leuders, T. (Hrsg.). Quality development in mathematics education by focussing on the outcome: new answers or new questions? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 4/2005. 267-274.

Blum, W./Wiegand, B. (2000): Vertiefen und Vernetzen – Intelligentes Üben im Mathematikunterricht. In: Üben & Wiederholen, Friedrich Jahresheft XVII 2000, S. 106–108.

Bonsen, M./Gathen, J.v.d. (2004): Schulentwicklung und Testdaten – die innerschulische Verarbeitung von Leistungsrückmeldungen. In: Holtappels, H.G./Klemm, K./Pfeiffer, H./Rolff, H.-G./Schulz-Zander, R. (Hrsg.): Jahrbuch der Schulentwicklung, Band 13, Weinheim, München, S. 225-252.

Borneleit, P./Danckwerts, R./Henn, H.-W. /Weigand, H.-G. (2001): Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Tenorth, H.E. (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe. Weinheim, Basel: Beltz, S. 26-53.

Bruder, R. (2000): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In: Flade, Herget. Berlin: Volk und Wissen. S.69-78.

Büchter, A./Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Büchter, A./Leuders, T. (2005b): Zentrale Tests und Unterrichtsentwicklung ... bei guten Aufgaben und gehaltvollen Rückmeldungen kein Widerspruch. Pädagogik, 57 (5), S. 14-18.

Büchter, A./Leuders, T./Bruder. R. (Hrsg.) (2005): Quality development in mathematics education by focussing on the outcome: new answers or new questions? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 4/2005.

Cohors-Fresenborg E./Sjuts J./Sommer N. (2004): Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, M. (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften, S.109-144.

Davis, P. J./Hersh, R. (1985): Erfahrung Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Devlin, K. (2000): The Maths Gene. London: Weidenfeld & Nicolson.

Doll, J./Prenzel, M. (Hrsg.) (2004): Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung. Münster, New York, München & Berlin: Waxmann.

Dubs, R. (1995): Konstruktivismus: Einige Überlegungen aus der Sicht der Unterrichtsgestaltung. Zeitschrift für Pädagogik, (41) 6/95, S.889-903.

Duit, R. (2002). Alltagsvorstellungen und Physik lernen. In Kircher E./Schneider W. (Hrsg.): Physikdidaktik in der Praxis. Berlin: Springer. (S. 1-26).

Erichssohn, C. (2003): Simulation und Authentizität. In: Baum, M./Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchandlung.

Fischbein, E. (1987): Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordrecht Reidel.

Fischer, R./Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Flade, L./Herget, W. (2000). Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Berlin: Volk und Wissen.

Flewelling, G. /Higginson, W. (2003): Teaching With Rich Learning Tasks: A Handbook. AAMT Inc.

Freudenthal, H. (1976): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1991): Revisiting Mathematics Education. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Frey-Elling, A./Frey, K. (1999): Das Gruppenpuzzle. ETH Zürich: http://educeth.ethz.ch/didaktik/puzzle (15.10.05)

Friedrich, G./Preiß, G. (2003). Neurodidaktik. Bausteine für eine Brückenbildung zwischen Hirnforschung und Didaktik. In: Pädagogische Rundschau 57, März/April , S. 181-199.

Gallin, P./Ruf, U. (1998): Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht. Seelze: Kallmeyer

Gerstenmaier, J./Mandl, H.(1995): Wissenserwerb aus konstruktivistischer Perspektive. Zeitschrift für Pädagogik, (41) 6/95, S.867-888.

Glasersfeld, E. v. (1992): Konstruktion der Wirklichkeit und des Begriffs der Objektivität. In: Einführung in den Konstruktivismus. München: Piper.

Grigutsch S./Raatz, U./Törner, G. (1998): Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: Journal für Mathematik-Didaktik 19, Heft 1. S. 3-45.

Gritzmann, P./Brandenberg, R. (2004): Das Geheimnis des kürzesten Weges. Berlin: Springer

Gudjons, H. (1997): Handlungsorientiert lehren und lernen. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Gürtler, T./Perels, F./Schmitz, B./Bruder, R. (2002): Training zur Förderung selbstregulativer

Fähigkeiten in Kombination mit Problemlösen in Mathematik. In: M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), Bildungsqualität von Schule. Weinheim: Beltz, S. 222-239.

Hardy, G. H. (1940): A mathematician's Apology. Nachdruck 2002. Cambridge: Cambridge Press.

Hefendehl-Hebeker, L. (2005): Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H. /Ralle, B. /Reiss, K. /Schön, H. /Vollmer, H. (Hrsg.): Konsequenzen aus PISA - Perspektiven der Fachdidaktiken. Innsbruck: Studienverlag.

Heinrich W. (1975): Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 3/1975, S. 106-116.

Heintz, B. (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Wien, New York: Springer.

Heinze, A./Reiss, K. (2004): Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differentieller Perspektive. In: Doll/Prenzel (2004), S. 234-249.

Henn, H.-W. (2004): Computer Algebra Systeme - Alter Wein in neuen Schläuchen? Journal für
Mathematikdidaktik 25, Heft 3/4, 2004, S.198-220.

Herget, W. /Jahnke, T./Kroll, W.(2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen.

Heymann, H-W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim und Basel: Beltz.

Hofe, R. v. /Wartha, S. (2005): Grundvorstellungsumbrüche als Erklärungsmodell für die Fehleranfälligkeit in der Zahlbegriffsentwicklung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2004.

Hofe, R. v./Pekrun, R./Kleine, M./Götz, T. (2002): Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA). Konstruktion des Regensburger Mathematikleistungstests für 5.-10. Klassen. Zeitschrift für Pädagogik, 45, S. 83-100.

Hofe, R. v. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hole, V. (1998): Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer. Methodische und didaktische Grundfragen in der Sekundarstufe I. Donauwörth: Auer Verlag.

Hußmann, S. (2002): Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen. Hildesheim: Franzbecker.

Hußmann, S. (2003): Mathematik erfinden und entdecken. Offene Aufgaben für die Sekundarstufe II. Berlin: Cornelsen.

Ingenkamp, K. (1997): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik. Weinheim: Beltz.

Jahnke, T. (2005): Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. Beiträge zum Mathematikunterricht. 2004. Hildesheim: Franzbecker. In Druck.

Kaiser, G./Knoche, N./ Lind, D./Zillmer, W., (Hrsg.) (2001): Leistungsvergleiche im Mathematikunterricht - ein Überblick über aktuelle nationale Studien. Hildesheim: Franzbecker.

Kleine, M. (2004): Quantitative Erfassung von mathematischen Leistungsverläufen in der Sekundarstufe I. Hildesheim: Franzbecker.

Kleine, M. (2005): Latent-Class-Analyse. Ein Bindeglied zwischen Empirie und Theorie zur quantitativen Erfassung mathematischer Leistungen. Journal für Mathematikdidaktik, 26 (2) , S. 97-113.

Klieme, E./Blum, W., u.a. (2004): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Klieme, E./Bos, W. (2000): Mathematikleistung und mathematischer Unterricht in Deutschland und Japan: Triangulation qualitativer und quantitativer Analysen am Beispiel der

TIMSS-Studie. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 3/2000, S. 359-379.

Klieme, E./Neubrand, M./Lüdtke, O. (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich, S. 141-190.

Klimsa, P. /Issing, L.J. (Hrsg.) (2002): Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Weinheim: Beltz.

Klippert, H. (1999): Methoden-Training. Übungsbausteine für den Unterricht. Weinheim und Basel: Beltz.

KMK (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. Bonn: Kultusministerkonferenz.

KMK (2004): Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.12.2004. Bonn: Kultusministerkonferenz (http://www.kmk.org, 15.10.05)

Knipping, Ch (2003): Learning from comparing. A review and reflection on qualitative oriented comparisons of teaching and learning mathematics in different countries. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 35, Nr.6, S. 282-293.

Komorek, E./Bruder, R./Schmitz, B. (2004): Integration evaluierter Trainingskonzepte für Problemlösen und Selbstregulation in den Mathematikunterricht. In Doll J./Prenzel, M. (Hrsg.): Schulische und außerschulische Ansätze zur Verbesserung der Bildungsqualität. Münster: Waxmann, S. 54-76.

Kösel, E. (1997): Die Modellierung von Lernwelten. Ein Handbuch zur Subjektiven Didaktik. Elztal-Dallau: Verlag Laub GmbH & Co.

Krainer, K. (2005): Was guter Mathematikunterricht ist, müssen Lehrende ständig selber erarbeiten! Spannungsfelder als Orientierung zur Gestaltung von Unterricht. In: Kaune u.a. (Hrsg.) Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kraus, S./Kunter, M./Brunner, M./Baumert, J./Blum, W./Neubrand, M./Jordan, A./Löwen, K. (2004): COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. In: Doll/Prenzel, S. 31-53.

Krummheuer, G./Fetzer, M. (2005): Der Alltag im Mathematikunterricht: Beobachten, Verstehen, Gestalten. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Lakatos, I. (1976): Proofs and Refutations. Cambridge: Cambridge Press.

Lange, J. de (1996): Using and Applying Mathematics in Education. In: Bishop, A. J. u. a. (Hrsg): International handbook of mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher. S. 49-98.

Lenné, H. (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart: Klett.

Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leuders, T. (2004a): Kernideen für die Raumgeometrie. Der Mathematikunterricht 50, Heft 1-2, S. 5-27.

Leuders, T. (2004b): Selbstständiges Lernen und Leistungsbewertung. Der Mathematikunterricht 3/2004, S.63-79.

Leuders, T. (2005): Intelligentes Üben selbst gestalten! - Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. Pädagogik. Im Druck.

Leuders, T./Barzel, B./Hußmann, S. (2005): Standards in core curricula – a new curricular orientation for German math teachers focussing on the outcome. In: Büchter, Bruder, Leuders (Hrsg.). Quality development in mathematics education by focussing on the outcome: new answers or new questions? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 4/2005, S. 275-286.

Leuders, T./Pallack, A. (2004): Der Grundkurs - Mathematik für alle? In: Mathematik aus Schülersicht. Mathematik lehren 127.

Leutner, D./Klieme, E./Meyer, K./Wirth, J. (2004): Problemlösen. In: PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.): PISA 2003. Münster: Waxmann, S. 147-175.

Lietzmann, W. (1919-1926): Methodik des mathematischen Unterrichts. Leipzig: Quelle & Meyer.

Ludwig, M. (1997): Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Hildesheim: Franzbecker.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.

Maturana, H. R./Varela, F. J. (1987): Der Baum der Erkenntnis. Die biologischen Wurzeln menschlichen Erkennens. Berlin, München: Scherz Verlag.

Muckenfuß, H. (1995): Lernen im sinnstiftenden Kontext. Entwurf einer zeitgemäßen Didaktik des Physikunterrichts. Berlin: Cornelsen.

NCTM (2000): Principles and Standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. In Auszügen auch unter: www.nctm.org/standards/ (15.10.05)

.Neubrand, J. (2002): Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Neubrand, M. (2004): „Mathematical literacy“ und „mathematische Grundbildung“. Der mathematikdidaktische Diskurs und die Strukturierung des PISATests. In: Neubrand, M. (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften, S.15-29.

Neuhaus, C. (2002): Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik. Berlin: Köster.

Parchmann, I./Ralle, B (1998): Chemie im Kontext - ein Konzept zur Verbesserung der Akzeptanz von Chemieunterricht? In: Kometz, A. (Hrsg.): Chemieunterricht im Spannungsfeld Gesellschaft - Chemie - Umwelt, Berlin: Cornelsen.

Pekrun, R. u.a. (2004): Emotionen und Leistung im Fach Mathematik: Ziele und erste Befunde aus dem »Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik« (PALMA). In: Doll/Prenzel (2004), S. 345-363.

Petko, D./Waldis, M./Pauli, C./Reusser, K. (2003): Methodologische Überlegungen zur videogestützten Forschung in der Mathematikdidaktik. Ansätze der TIMSS 1999 Video Studie und ihrer schweizerischen Erweiterung. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (35) 6, S. 265-281.

PISA-Konsortium (2001). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.

PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.) (2004): PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster, New York, München & Berlin: Waxmann.

Polya, G. (1945): How to solve it. Princeton: University Press.

Prediger, S. (2004): Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen? In: Mathematik lehren 123, S.10-13.

Reiss, K./Hellmich, F. /Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In: Prenzel, M, /Doll J. (Hrsg.), Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. Weinheim: Beltz, S. 51-64.

Renkl, A./Schworm, S./vom Hofe, R. (2001): Lernen mit Lösungsbeispielen. Mathematik lehren, Heft 109, S.14.

Rost, J. (2004a): Lehrbuch Testtheorie – Testkonstruktion. Bern: Huber.

Rost, J. (2004b): Psychometrische Modelle zur Überprüfung von Bildungsstandards anhand von Kompetenzmodellen. Zeitschrift für Pädagogik 50 (5), S. 662-678.

Roth, G. (1997): Das Gehirn und seine Wirklichkeit. Kognitive Neurobiologie und ihre Konsequenzen. Frankfurt a. M.

Roth, G. (2004): Warum sind Lehren und Lernen so schwierig? In: Zeitschrift für Pädagogik 4/2004, Heft 4, S. 496 - 506.

Schrader, F.-W./Helmke, A. (2005): Überprüfte Vermutungen. Training der Diagnosefähigkeit von Lehrkräften durch die Nutzung von Vergleichsarbeiten. In G. Becker u. a. (Hrsg.): Standards. Unterrichten zwischen Kompetenzen, zentralen Prüfungen und Vergleichsarbeiten. Friedrich Jahresheft XXIII 2005. Seelze: Friedrich Verlag, S. 120-121.

Schupp, H. (2002): Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 28, Nr.6, S-168-183.

Stewart, I. (1990): Mathematik, Probleme – Fragen - Antworten. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

Stigler, J.W./Hiebert, J. (1999): The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: Free Press

Terhart, E. (2002): Standards für die Lehrerbildung. Eine Expertise für die Kultsministerkonferenz. (ZKL-Texte Nr. 23). Münster: Zentrale Koordination Lehrerbildung

Ulm, V. (2005): Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung

Wagenschein, M. (1962) Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht. Stuttgart: Klett

Wagenschein, M. (1970): Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Stuttgart: Klett

Weigand, H.-G./Weth, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: F. E. Weinert (Ed.), Leistungsmessungen in Schulen. Weinheim und Basel: Beltz, S. 17-31

Weinert, F. E./Helmke, A. (Hrsg.) (1997): Entwicklung im Grundschulalter. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Wille, R. (2002): Kommunikative Rationalität und Mathematik. In: Prediger, J./Siebel, F./Lengnink, K (Hrsg.): Mathematik und Kommunikation. Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft

Winter, H. (1984) : Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. Mathematik Lehren 2/84 S. 4-16

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg

Winter, H. (1992): Sachrechnen in der Grundschule. Berlin: Cornelsen Scriptor 1992

Winter, H. (1995). Mathematik und Allgemeinbildung. Mitteilungen der Gesellschaft für Mathematik, 61, S. 37-46.

Wittenberg, A.I. (1963): Bildung und Mathematik Stuttgart: Klett

Wittmann, E. Ch. (1994): Üben im Lernprozess. In: Müller/Wittmann: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.2. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1992): Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In: Müller/Wittmann: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd.1. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2005): Eine Leitlinie für die Unterrichtsentwicklung von Fach aus: (Elementar-)Mathematik als Wissenschaft von Mustern. Der Mathematikunterricht 51 2/3, S. 5-22

Wittmann, E. Ch. (1976): Grundfragen des Mathematikunterrichts: Braunschweig: Vieweg

Wittmann, E. Ch. (1991): Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis. In: Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung 2002, S. 35-45. In: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Band XII, Festschrift zum 300-jährigen Bestehen der Gesellschaft (Dritter Teil), S. 663-679

Wittmann, E. Ch. (1995): Mathematics Education as a Design Science. Education Studies in Mathematics (29), S. 355–374.