
Foto: S. Prediger

Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag

Stephan Hußmann, Timo Leuders und Susanne Prediger

Immer wieder wird die Bedeutung diagnostischer Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern hervorgehoben. Aber was genau soll im Mathematikunterricht diagnostiziert werden und wie? Im Artikel werden Vorschläge für eine Erweiterung des Diagnoserepertoires im Mathematikunterricht gemacht.

Was ist Diagnose?

In letzter Zeit findet man kaum eine Äußerung zum Stand unseres Bildungssystems, in der nicht auf die Bedeutung diagnostischer Kompetenz hingewiesen wird (z. B. KMK 2003). Erlebt die pädagogische Diagnostik eine neue Renaissance (nach der letzten Mitte der Siebziger)? Was genau soll man unter Diagnostik in der Schule und insbesondere im Mathematikunterricht verstehen?

Eigentlich betreiben wir als Lehrkräfte schon immer Diagnose, denn das Diagnostizieren und Leistungen Erheben begleitet uns ja in jedem Augenblick des Unterrichts: Wenn wir Schülerinnen und Schüler beobachten, Abfragen starten, um Wiederholungsbedarf einzuschätzen, wenn wir Hausaufgaben kontrollieren, Klassenarbeiten schreiben und mündliche Leistungen einschätzen:

Lisa beherrscht die schriftliche Division durch Dezimalzahlen immer noch nicht, das zeigt die Klassenarbeit und ich kann dies berücksichtigen, wenn ich Lisa bei der Aufgabenbearbeitung berate.

Klaus schöpft seine Lernzeit in Arbeitsphasen nicht genügend aus, das sehe ich immer wieder, und ich überlege mir, wie ich ihn unterstützen kann.

Die Tischgruppe hinten links arbeitet besonders produktiv zusammen, das zeigt mir ihr Präsentationsergebnis. Bei der nächsten Gruppenarbeit werde ich sie als Anlaufstation bei Schwierigkeiten einsetzen.

Was Diagnose ist, lässt sich in der folgenden pragmatischen Kurzdefinition festhalten:

Diagnose im Alltag dient dazu, Schülerleistungen zu verstehen und einzuschätzen mit dem Ziel, angemessene pädagogische und didaktische Entscheidungen zu treffen.

Wenn immer wieder auf die Bedeutung von Diagnose hingewiesen wird, so liegt das gerade daran, dass einer so verstandenen Diagnose für das weitere pädagogische Tun eine große Bedeutung zukommt.

Andererseits gibt es Hinweise, dass die bisher vorrangig übliche Diagnose oft die Komplexität des Lernens noch nicht genügend widerspiegelt:

– Es gibt beunruhigende empirische Befunde, dass wir die Leistungen unserer Schülerinnen und Schüler nicht differenziert genug einschätzen: Kurzfristig unterfordern wir sie oft durch zu eng und kleinschrittig geführte und zu rasch durchlaufene Lernsituationen, langfristig überschätzen wir, was nach längerer Zeit von den Leistungen übrig bleibt, die man in Klassenarbeiten unmittelbar nach der Lernphase noch feststellen kann (vgl. etwa Helmke 2003, S. 84ff).
– Eine auf die konkreten Inhalte des Faches bezogene Diagnose wurde bislang in der Lehrerausbildung eher stiefmütterlich behandelt. Viele Lehrkräfte empfinden dies als Ausbildungslücke und wünschen sich eine breitere Kompetenz.
– Die stärkere Betonung inhaltlichen Denkens und allgemeiner Kompetenzen (Problemlösen, Modellbilden, Argumentieren usw.) in Bildungsstandards und neueren Lehrplänen setzt zusätzliche fachliche Signale, die aber mit der Unsicherheit einhergehen, wie man diese Kompetenzaspekte überhaupt feststellt und geeignet bewertet.

Und so zielt der Ruf nach mehr diagnostischer Kompetenz vor allem auf eine *Erweiterung des Diagnose-Repertoires* bzgl. ihrer Zwecke, Zeitpunkte, Gegenstände und Instrumente. Erklärtes Ziel dieser Erweiterung ist es, Schülerleistungen, -vorstellungen und -kompetenzen möglichst sensibel und vielschichtig zu verstehen und dieses Wissens zur Basis eines adaptiven Unterrichts zu machen.

Für eine mathematikspezifische und unterrichtspraktische Konkretisierung dieser allgemeinen Überlegungen wollen wir folgenden Fragen nachgehen:

– Mit welchem konkreten Ziel und zu welchem Zeitpunkt kann die Diagnose stattfinden?
– Welche Wissens- und Könnensaspekte möchte man diagnostizieren?
– Welche Formen (Strategien) der Diagnose kann man dazu einsetzen?

Wann diagnostizieren?

Der Charakter von Diagnose ist erheblich von ihrem Zeitpunkt geprägt (*Abb. 1*). Man spricht hier jeweils von Lernaus-

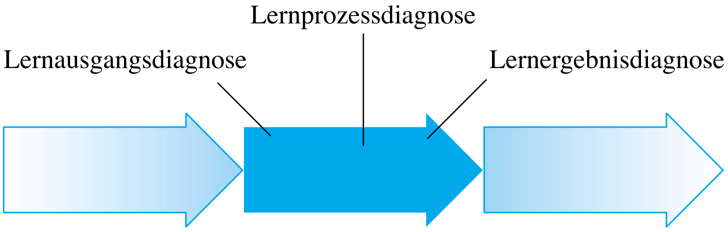


Abb. 1: *Diagnose zu verschiedenen Zeitpunkten des Lernprozesses*

gangs-, Lernprozess- und Lernergebnisdiagnose. Sicherlich ist der Endpunkt eines Lernprozesses auch wieder der Ausgangspunkt für weiteres Lernen, dennoch kann man im Schulalltag recht gut die Phasen des Lernprozesses danach unterscheiden, ob man in ein neues Thema einsteigt oder rückblickend die Leistungen in einem Bereich überprüft.

Die wohl am breitesten praktizierte Diagnoseform ist die *Lernergebnisdiagnose* (die klassische Leistungsdiagnose). Dazu werden Lernergebnisse in Form von Schülerleistungen *am Ende* einer Lernphase überprüft.
Eine Erweiterung des Diagnose-Repertoires meint bei der Lernergebnisdiagnose vor allem, die bewährten Klassenarbeiten durch andere Diagnose-Mittel zu ergänzen, z. B. Referate oder Poster, offene Problemlöseaufgaben und viele andere Möglichkeiten (vgl. Fröhlich/Smolinski 2006 in PM Heft 10 für vielfältige Formen der Leistungsmessung).
So wichtig es ist, dass sich Lehrende und Lernende ein abschließendes Bild vom Lernerfolg verschaffen, so fatal ist es, wenn es zeitlich keine Möglichkeit mehr gibt, auf noch nicht genügende Leistungsergebnisse durch Einleitung weiterer Lernschritte zu reagieren. Dies ist wohl auch ein Grund, warum die Nachfrage nach Strategien der Prozessdiagnose immer größer wird.

Eine *Lernprozessdiagnose* zeichnet sich durch die *kontinuierliche* Auswertung des Lernprozesses aus und soll die Lehrkraft in die Lage versetzen, den Unterricht noch im Prozess zu steuern und den Bedürfnissen der Lernenden anzupassen, und nicht erst bei Misserfolgen in der Abschlussarbeit.
Als Diagnosemittel dienen Zwischenchecks (vgl. Hußmann/Selter in diesem Heft), Schülerselbsteinschätzungen (vgl. Reiff 2006), die Durchsicht von Hausaufgaben und Lerntagebüchern und vor allem die gründliche Beobachtung von Arbeitsprozessen und Einzelgesprächen mit Schülerinnen und Schülern. Zeit dafür findet, wer Unterrichtsgespräche im Klassenverband zumindest zeitweise zugunsten Phasen selbstständigen Arbeitens zurücknimmt.
Hier könnten allerdings Zweifel aufkommen: Steht das Plädoyer für Lernprozessdiagnose nicht der oft geforderten Trennung von Leistungs- und Lernphasen entgegen (BLK 1997)? Die geforderte Trennung sollte nicht als Verbot verstanden werden, sich während der Lernphasen Eindrücke von den Lernenden zu verschaffen und diese im Sinne einer prozessorientierten Leistungsfeststellung auch in die Bewertung einfließen zu lassen. Richtig an der Forderung nach Trennung von Lernen und Leisten ist jedoch, dass bei den Lernenden in ihren Arbeitsprozessen durch die Beobachtung kein Leistungsdruck entstehen darf. Ein solcher ist meist jedoch eher einem unglücklichen Umgang mit Fehlern und Lernschwierigkeiten geschuldet als der Tatsache, dass auch die Prozesse in Diagnose und Bewertungen mit einfließen.

Für die oben beschriebene Zielsetzung von Diagnose, sich an die Bedürfnisse der Lernenden besser anpassen zu können, ist die *Lernausgangsdiagnose* von entscheidender Bedeutung, also die Erfassung der Lernausgangslage *zu Beginn* einer Lernphase zwecks besserer Passung des darauf folgenden Unterrichts. Was können meine Schülerinnen und Schüler schon? Worauf kann ich aufbauen? Mit welchen Schwierigkeiten muss ich rechnen? Diese Form der Diagnose ist wohl die am wenigsten ausgeprägte. Oft genug gehen wir ins Klassenzimmer im Glauben, über die Fähigkeiten unserer Schülerinnen und Schüler sowie über die zu erwartenden Schwierigkeiten oder Fehler gut Bescheid zu wissen. Zu oft stehen wir unter dem Eindruck, zu wenig Zeit für eine längere Einstiegsdiagnose zu haben. Beides kann sich als schwerwiegender Irrtum herausstellen, der im Weiteren viel Zeit für „Reparaturarbeiten" kostet.
Vor allem bei Übernahme einer neuen Lerngruppe kann es für Schülerinnen und Schüler wie für die Lehrkraft hilfreich sein, durch Standortbestimmungen Transparenz über die Ausgangslage zu erreichen. Dies ist beispielsweise das Ziel der Standortbestimmungen von Hußmann/Selter (in diesem Heft) oder eines Eingangstestes wie der „Diagnose von Basiswissen und Problemlösen" für den Beginn der gymnasialen Oberstufe (MSWF 2001). Ähnliches beschreiben Fernholz und Prediger (in diesem Heft) für eine Selbstdiagnose durch die Lernenden, denn nicht nur die Lehrkraft sollte sich über Lernausgangslagen bewusst sein, gerade die Lernenden selbst können dadurch ihre Arbeitsprozesse besser verstehen und mitgestalten.
Verschiedene Unterrichtskonzepte bauen auf eine konsequente Integration von Lernausgangsdiagnosen.
So startet etwa Bell (1983) in seinem Konzept des *diagnostic teaching* mit Aufgaben zur Erhebung typischer Fehler und Verständnislücken, um diese im darauffolgenden Unterricht durch Erzeugung kognitiver Konflikte zu bearbeiten.
Lengnink (2005) geht in ihrem Konzept noch weiter, indem sie die Lernenden durch geeignete Handlungssituationen nicht nur typische Fehler, sondern auch individuelle lebensweltliche Vorstellungen formulieren lässt, z. B. „In welchen Situation würdet ihr sagen, dass eine Größe von einer anderen abhängig ist? Wann würdet ihr das nicht sagen?" Diese Vorstellungen werden zum Ausgangspunkt eines Lernprozesses im Spannungsfeld zwischen Mathematik und Lebenswelt.
Auch auf andere Könnens- und Wissensaspekte bezieht sich die Diagnose der Lernausgangslagen, wie sie im Konzept dialogischen Lernens methodisch konsequent in den Unterrichtsgang integriert sind (z. B. beschrieben von Gallin/Hußmann 2006 in PM Heft 7): Neue unterrichtliche Themen werden mit einem relativ offenen Auftrag begonnen, der individuell in Lerntagebüchern bearbeitet wird. Die Durchsicht der Lerntagebücher wird

zur zentralen Unterrichtsvorbereitung: Wie bearbeiten die Lernenden den Auftrag? Was sind ihre wichtigsten Ideen und Schwierigkeiten? Was davon sind geeignete Anlässe, an denen die ganze Klasse weiter arbeiten kann?
Statt also davon auszugehen, bereits im Voraus zu wissen, welche Voraussetzungen und Schwierigkeiten Schülerinnen und Schüler haben, beginnt in allen drei Konzepten die Lehrkraft erst dann mit dem „Unterrichten", wenn sie hinreichende Informationen über den Stand ihrer Schülerinnen und Schüler gesammelt hat.
Als Diagnosemittel eignen sich vor allem einzelne offene oder auf Reflexion gerichtete Aufgaben oder umfangreichere Aufträge, die allerdings für alle Schülerinnen und Schüler zugänglich und bearbeitbar sein sollten. Die Lehrkraft schöpft ihre Informationen dann aus der Bearbeitung im Lerntagebuch oder aus der Beobachtung von Kleingruppen- und Klassendiskussionen.

Was diagnostizieren?
Vom Fach Mathematik aus gedacht, muss man vor allem die Frage nach dem Gegenstand der Diagnose stellen: Welche Wissens- und Könnensaspekte sollen diagnostiziert werden? Natürlich ist Diagnose nicht auf das Überprüfen von Kenntnissen und Fertigkeiten beschränkt, sondern sollte das ganze Spektrum der relevanten affektiven und kognitiven, fachspezifischen und überfachlichen Aspekte berücksichtigen, also alle für den Lernprozess wichtigen Könnens- und Wissensaspekte (vgl. *Abb. 2*).
In diesem Artikel wollen wir den Fokus auf die kognitiven und mathematikspezifischen Aspekte legen, die uns helfen, im Einzelfall zu beantworten *warum* sich eine Person mit einer speziellen Anforderung schwer tut. Will man die vorhandenen Ressourcen und Schwierigkeiten sensibel diagnostizieren, muss man über Kenntnisse und Fertigkeiten hinaus das verständige Umgehen mit Begriffen und Verfahren, die zugrunde liegenden inhaltlichen Vorstellungen, Sätze und Regeln und die prozessbezogenen Kompetenzen wie Argumentieren, Modellieren und Problemlösen einbeziehen. Für diese eher bereichsspezifischen Aspekte sollen im folgenden Beispiele geliefert werden – für die Diagnose eher übergreifender mathematischer Denkstile verweisen wir auf Kaune (in diesem Heft).

Verfahren diagnostizieren
Um zu erfahren, ob alle Kinder einer Klasse eine Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl teilen können, wird man sie natürlich eine entsprechende Aufgabe rechnen lassen, z. B.: „Berechne 22,6 : 5."
Als Ergebnis erhält man möglicherweise aber nur den berechneten Wert. Dieser verrät nur wenig über das Verständnis der Vorgehensweise, selbst wenn das Ergebnis korrekt ist.
Mehr erfährt man durch Aufgaben wie die in *Abb. 3*, die um einen informativen Verbalisierungsauftrag ergänzt ist.
Ronnys Erklärung zeugt von Schreibunlust, daran wird er in Bezug auf die prozessbezogene Kompetenz des Verbalisierens noch zu arbeiten haben. Gleichwohl erfasst er den Kern des Divisionsalgorithmus genau. Pias Erklärung (vgl. *Abb. 3*) hörte im ersten Anlauf vor dem „PS" auf. Gerade die Ausführlichkeit der Beschreibung des irrtümlich von der Lehrerin als

***Abb. 2:** Vielschichtige Gegenstände der Diagnose*

Könnens- und Wissensaspekte für Diagnose	
Mathematikspezifische Aspekte	Verfahren Inhaltliche Vorstellungen Begriffe Sätze und Regeln Prozessbezogene Kompetenzen: • Modellieren • Problemlösen • Argumentieren Mathematische Kreativität Mathematische Denkstile Einstellung gegenüber Mathematik
Überfachliche Aspekte	Metakognitive Kompetenzen Arbeitsweisen allgemeine motivationale und affektive Aspekte Soziale und kommunikative Kompetenzen

***Abb. 3:** Diagnose-Aufgabe zum schriftlichen Rechenverfahren*

Aufgabe:

Wie berechnet man 22,6 : 5? Schreibe eine Erklärung für Maja auf, die krank war (und für dich, falls du es nächstes Jahr wieder vergessen hast).

Ronny:

Bei Kommas müssen Komas ins Ergebnis übertragen werden. Am Schluss kann man Nullen ran hängen bis es auf geht. Vorher rechnet man normal.

Pia:

Dividieren

Die Regel: beispiel Aufgabe: 22,6 : 5 = 4,52
so dann rechne ich wie oft die 5 in die 22 passt, weil die 5 nicht in die 2 passt. wie oft passt die 5 in die 22: 4 mal 4·5 sind 20 also schreibe ich 4 neben das gleichzeichen und die 20 unter die 22. 22 − 20 = 2 wie oft passt die 5 in die 26? 5 mal also schreib ich neben das Gleichzeichen eine 5. 5·5 sind 25 das schreibe ich unter die 26. 26 − 25 = 1. Wie oft pass die 5 in die 10? 2 mal also schreibe ich die 2 neben die 5 hinter dem Gleichzeichen. Und 2·5 = 10 Das schreib ich unter die Zehn. 10 − 10 = 0 also sind 22,6 : 5 = 4,52.

20
26
25
10
10
0

P.S: hinter der 22 ist ja ein komma, das muss man sich wegdenken und beim Ergebnis wieder dazuschreiben. Bei dieser aufgabe setzt man das komma dann hinter die 4.

Aufgabe:

Eine Kerze ist 10 cm lang und brennt laut Packung pro Minute 0,2 cm herunter.
Nach wie viel Minuten ist sie vollständig herunter gebrannt?

10cm -> 0,2cm pro Min
9,8 -> 2min 9,6 -> 3min 9,4 -> 4min
9,2cm -> 5min 9cm -> 6min 8,8cm -> 7min 8cm -> 12min
7cm -> 18min 6cm -> 24min 5cm -> 30min
4cm -> 36min 3cm -> 42min 2cm -> 48min
1cm -> 54min ende -> 60min

Antwort: Die Kerze endet nach 1 Std., also 60min

Abb. 4: *Wieso kann Anna hier nicht dividieren? Strategien einer Neuntklässlerin*

Aufgabe:

Denke dir zu diesem Funktionsterm

$$y = 0{,}2x + 5$$

eine passende Aufgabe aus.

Ein Oberteil wurde auf 0,2 Euro reduziert, wie viel kosten sie, wenn sie 5 Euro teurer wären?
[y = 0,2x + 5]

Abb. 5: *Sachsituationen zu gegebenem mathematischen Ausdruck finden – ein hilfreiches diagnostisches Aufgabenformat (weitere Antwort auf dem Titelbild dieses Heftes)*

gefestigt vorausgesetzten Divisionsalgorithmus für natürliche Zahlen war in diesem Schülerprodukt ein wichtiger Hinweis auf ihre noch fehlende Sicherheit. Zwar konnte Pia nach Erinnerung an das Komma durch die Lehrerin durch ein „PS“ ihre Erklärung auf Dezimalzahlen so ausweiten wie abgebildet, dass sie dennoch an beidem noch würde arbeiten müssen, zeichnete sich hier bereits ab.

Weder bei Pia noch bei Ronny können wir uns sicher sein, dass sie das vorrangig kontextunabhängig gelernte Verfahren auch in Sachkontexten angemessen anwenden können, denn wir wissen aus vielen Studien, dass die Aktivierung in neuen Kontexten eine eigene Herausforderung darstellt, die nicht automatisch mit entwickelt wird.

Zum Beherrschen eines Verfahrens gehört also ebenso die Fähigkeit, zu beurteilen, wann dieses Verfahren anwendbar ist. In welchen Sachsituationen etwa eignet sich überhaupt die Division, und in welchen eine Multiplikation? *Abb. 4* (aus Bronzel/Schmerder 2007) zeigt eine für diese Problematik typische Aufgabenlösung einer Neuntklässlerin, der anscheinend nicht bewusst war, dass sie auch hätte dividieren können, um herauszubekommen, wie oft die 0,2 cm in die 10 cm passen. Sie scheitert dabei nicht an der Nichtbeherrschung des Divisionsalgorithmus, sondern an der fehlenden inhaltlichen Vorstellung des Dividierens als „passen-in“ (vgl. Padberg 2005). Annas Lösungsweg über wiederholtes Subtrahieren hätte zwar auch zum richtigen Ziel führen können, doch hat sie sich beim Zusammenfassen des 50fachen Subtrahierens von 0,2 verrechnet.

Hier müsste man also am Aufbau der inhaltlichen Vorstellungen ansetzen, nicht allein am Kalkül. Bei anderen Verfahren würde man neben einer Erläuterung des Ablaufs auch Begründungen verlangen, um sich einen Eindruck über das dahinter liegende Verständnis zu verschaffen. Die Übersicht in *Kasten 1* zeigt exemplarisch verschiedene Teilaspekte, die für den verständigen Umgang mit mathematischen Verfahren von Bedeutung sind.

Inhaltliche Vorstellungen diagnostizieren

Das Beispiel in *Abb. 4* hat gezeigt, wie wichtig inhaltliche Vorstellungen sind, um mathematische Begriffe und Verfahren in Sachsituationen aktivieren zu können (vgl. vom Hofe 2003). Der Diagnosebogen in Kopiervorlage 2 (Fernholz/Prediger in diesem Heft) gibt ein Beispiel, wie Lernende an Textaufgaben selbst einschätzen können, ob sie über alle wichtigen inhaltlichen Vorstellungen zur Multiplikation und Division verfügen.

Kasten 1

Wichtige Aufgabenformate zur Diagnose von Verfahren	
Was diagnostizieren?	**Mit welchem Aufgabentyp?**
Verständige Beherrschung des Verfahrens	– Erläutere, wie man … berechnet. – Irgendwo im hier durchgeführten Verfahren ist ein Fehler, finde ihn! Hast Du eine Idee, wieso die Schülerin den Fehler gemacht hat? – Hier ist das Ende einer Rechnung, wie könnte der Anfang aussehen? – …
Flexible Anwendung des Verfahrens in Sachsituationen	– Bestimme … (realitätsbezogene Aufgabe, die Verfahren erfordert). – Welches Verfahren müsste man anwenden, um die Aufgabe … zu lösen? (du brauchst es nicht durchzuführen) – Für welche Aufgabe könnte man das Verfahren *nicht* nutzen?
Begründung des Verfahrens	– Erkläre, wieso das Verfahren … hier funktioniert / nicht funktioniert …

Wichtige Aufgabenformate zur Diagnose inhaltlicher Vorstellungen	
Was diagnostizieren?	**Mit welchem Aufgabentyp?**
Vorstellungen nutzen können zur Mathematisierung	– Gegeben ist eine Sachsituation – wie kann man sie mathematisieren? – Typische falsche Mathematisierung – was hat sich das Kind wohl dabei gedacht, wieso ist das falsch? – …
Vorstellungen nutzen können zur Veranschaulichung und Interpretation	– Gegeben ist ein mathematisches Objekt (z. B. Gleichung, …): Finde Sachsituation dazu! – Gegeben ist ein mathematisches Objekt, male ein Bilddazu, das das Phänomen erklärt (z. B. male ein Rechteckbild um zu zeigen, dass zwei Brüche gleichwertig sind.) – Welche Mathematisierung (z. B. Term, Begriff, …) passt zu welcher Sachsituation? – …

Kasten 2

Noch aussagekräftiger (aber für die Selbsteinschätzung eher ungeeignet) ist die Umkehrung des Aufgabenformats: Gegeben ist ein Rechenterm, finde dazu eine Sachsituation. Mit diesem offeneren Aufgabenformat erfährt die Lehrkraft nicht nur, ob die Lernenden über bestimmte Grundvorstellungen verfügen, sondern Genaueres über die individuellen Vorstellungen der Lernenden, auch wenn sie den mathematischen Grundvorstellungen nicht entsprechen.

Abb. 5 und das Titelbild dieses Heftes zeigen Versuche von Lernenden einer 9. Klasse, zu einer linearen Funktionsgleichung eine Sachsituation anzugeben (Bronzel/Schmerder 2007). Sabeth (*Abb. 5*) ignoriert die Bedeutung der Variable. Clara (*siehe Titelbild*) dagegen zeigt in ihrer Antwort, dass sie die 5 als Anfangswert und die 0,2 als Änderung deuten kann. Dass sie aber sich über die Richtung der Änderung und die Zeitskala nicht genügend Rechenschaft ablegt, wäre im umgekehrten Aufgabenformat vermutlich nicht aufgefallen.

Begriffsbildungen diagnostizieren

Das Umgehen mit Begriffen gehört zu den Kerntätigkeiten des Mathematikunterrichts. Sie sind die „wichtigsten Werkzeuge, um die Phänomene der natürlichen, sozialen und geistigen Welt zu ordnen" (Freudenthal 1983, S. IX). Um so wichtiger ist es, dem Umgang mit Begriffen in seinen unterschiedlichen Facetten nachzuspüren und ihn zu fördern (vgl. Winter 1983).

Die wohl elementarste Art, Begriffe zu bestimmen, ist die *Angabe von Beispiel und Gegenbeispiel*. Insbesondere bei Kindern ist diese Art der Begriffsbestimmung häufig zu beobachten. Dabei lassen sich zwei Richtungen beschreiben: das Identifizieren (es muss entschieden werden, ob Beispiele unter einen Begriff fallen) und das Realisieren (zu einem Begriff muss ein Beispiel oder Gegenbeispiel erzeugt werden). Typische Diagnoseaufgaben für diesen Bereich stellen die folgende Fragen dar:

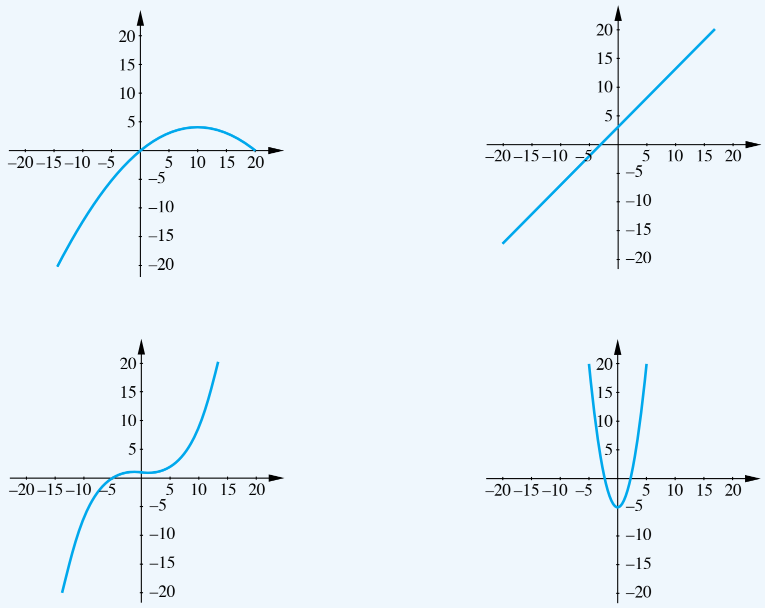
Wenn man zu einem Begriff Beispiele nennen kann, so bedeutet das noch nicht, dass man dessen Eigenschaften explizit benennen kann. Eine Möglichkeit, dies zu überprüfen, ist sicher die Aufforderung, die Wahl des jeweiligen Beispiels zu erklären. Doch statt auf den Begriffsumfang zu zielen, kann man auch dazu auffordern, die charakterisierenden Eigenschaften eines Begriffs zu nennen, oder ihn gegen andere Begriffe abzugrenzen.

Nenne zwei unterschiedliche Definitionen/Beschreibungen der Parabel. Erkläre deren Unterschiede.
Wieso sind die beiden Definitionen/Beschreibungen gleichwertig?

Ist durch die folgende Definition tatsächlich eine Parabel beschrieben: „Eine Parabel ist eine Funktion mit genau einem Hochpunkt oder Tiefpunkt." Erkläre.

Eine andere Möglichkeit, das Verständnis von Eigenschaften zu diagnostizieren, ist die Aufforderung, das jeweilige mathematische Objekt zu konstruieren. Dies ist bei einigen mathematischen Begriffen möglich und fokussiert im besonderen Maße die Entstehungsgeschichte des Objektes, was wiederum eine gute Reflektion auf den Lernprozess darstellen kann.

Könnten die folgenden Graphen Parabeln darstellen? Erkläre.



Quadratische Funktionen lassen sich erzeugen durch die Multiplikation von linearen Funktionen:
$f(x) = (x - 2) \cdot (2x + 3)$.
Erzeuge auf diese Weise zeichnerisch und rechnerisch einige quadratische Funktionen. Erkläre die Eigenschaften der quadratischen Funktion mit den Eigenschaften der jeweiligen linearen Funktionen.

Eine für die Entstehung von Begriffen typische Tätigkeit ist das Abstrahieren, das Absehen von Eigenschaften von Objekten bzw. die Konzentration auf wenige bestimmte Eigenschaften. Abstrahieren meint insbesondere das Sortieren und Vergleichen von Eigenschaften ausgewählter Objekte und die anschließende Klassenbildung. Damit ist das Abstrahieren als Kompetenz besonders geeignet für eine Eingangsdiagnose.

Erstelle für jede Funktion ihren Graphen. Sortiere dann die Funktionsgleichungen bzw. die Graphen nach verschiedenen Eigenschaften. Erkläre deine Auswahl.
$f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^2 - 4x + 2$,
$h(x) = x + 3$, $k(x) = 3 - (x - 2)^2$,
$m(x) = -x^2 + 5$, …

Ohne um die Verwendung eines Begriffes in Alltagssituationen zu wissen oder ohne seine Wirkung und Funktion in Bezug auf andere Begriffe und Theorien zu kennen, bleibt das Begriffsverständnis isoliert und tot. Zentral für die Relevanz eines Begriffes ist also die genannte pragmatische Begriffsbestimmung. Aufgaben hierzu sind insbesondere Problemkontexte, in denen der Begriff verwendet werden muss. Im Themenfeld der Parabeln sind dies Aufgaben mit Modellierungen von Brückenbögen, Flugbahnen oder auch Satellitenschüsseln.

Modellierungskompetenzen diagnostizieren

Mathematische Kompetenzen wie Argumentieren, Modellieren oder Problemlösen zeigen sich immer nur an konkreten Inhalten. Dennoch ist es möglich, auch ganz gezielt etwas über die prozessbezogenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler zu erfahren, wenn man in den Diagnoseaufgaben bewusst vermeidet, dass zu viel inhaltliches Vorwissen eingebracht werden muss.
Dies soll im Folgenden am Beispiel der Kompetenz des Modellierens dargestellt werden. Diese umfasst eine ganze Reihe von einzelnen Teilkompetenzen, die man sicherlich auch an einer einzigen komplexen Aufgabe überprüfen kann. Manchmal ist es jedoch zweckmäßiger, auf einen bestimmten Aspekt der Kompetenz zu fokussieren. Die folgenden Aufgaben sind allesamt Varianten einer einzigen Aufgabe von Uli Brauner, mit denen man jeweils bestimmte Teilaspekte des Modellierens überprüfen kann (vgl. ausführlicher dazu Büchter/Leuders 2005, S.18ff).
Insbesondere bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen ist es nötig, dass Schülerinnen und Schüler *mit Unsicherheiten umgehen* können, etwa weil zu wenige oder zu viele Daten gegeben sind, oder weil das Ziel nicht genau spezifiziert wurde.

Wie groß ist die Gesamtlänge der Kerzen, die ein Mensch in seinem Leben abbrennt?

Mit dieser Aufgabe lässt sich diagnostizieren, wer bereit und fähig ist, sich auf ein Problem einzulassen, für das kein Lösungsverfahren vorliegt.
Diese Aufgabe gehört zu den so genannten Fermiaufgaben, bei denen Fähigkeiten des Schätzens und Überschlagens eingesetzt werden müssen (Büchter/Herget/Leuders/Müller 2007). Möchte man die Diagnose der Bereitschaft, mit solchen Situationen umzugehen, trennen von der

Kasten 3

Wichtige Aufgabenformate zur Diagnose von Begriffen	
Was diagnostizieren?	**Mit welchem Aufgabentyp?**
Begriffsbestimmung durch Angabe von Beispiel und Gegenbeispiel	– Gegeben sind Beispiele – welche fallen unter den Begriff, welche nicht? – Sortiere die folgenden Beispiele nach selbstgewählten Eigenschaften. – Nenne Beispiele, die unter den Begriff fallen, und welche, die dies nicht tun. – …
Begriffsbestimmung durch durch explizite Angabe von charakterisierenden Eigenschaften	– Nenne Eigenschaften von … – Gegeben ist eine Definition – Ist die Definition korrekt? Werden alle angegebenen Eigenschaften benötigt? Lass eine der Eigenschaften weg, welcher Begriff wird nun beschrieben? – …
Begriffsbestimmung durch Konstruktion	– Erzeuge … – Gegeben ist eine Konstruktion – Beurteile ob durch die Konstruktion ein … erzeugt wird. – …
Begriffsbestimmung durch Abstrahieren	– Vergleiche die Objekte und sortiere nach erkennbaren Eigenschaften. – …
Pragmatische Begriffsbestimmung	– Erläutere, wieso der Begriff besonders geeignet ist, um … – Nenne für einen Begriff eine / mehrere Situation(en), in denen dieser verwendet wird. Wozu braucht man …? – Erläutere, inwieweit der Begriff XX mit den Begriffen YY zusammenhängt.

Diagnose der Fähigkeiten des *Schätzens und Überschlagens*, so kann man die Aufgabe etwas enger stellen:

Wie groß ist die Gesamtlänge der Kerzen, die ein Mensch in seinem Leben abbrennt? Mache Annahmen über Abbrennzeiten und Abbrenngeschwindigkeiten von Kerzen und überschlage ein Ergebnis.

Der wohl entscheidende Schritt des Modellierens ist der des *Mathematisierens*, d. h. der Auswahl und Entwicklung einer mathematischen Beschreibung.

Wähle für eine dünne lange und eine dicke kurze Kerze sinnvolle Werte für Länge und Abbrenngeschwindigkeit und finde heraus (mit einem Graphen, einer Tabelle oder einer Formel), wann beide Kerzen gleich lang sind. Beschreibe dein Verfahren.

Eingesetzt werden können auch solche Aufgaben, bei denen Schülerinnen und Schüler kein eigenes Modell bilden, sondern „nur“ überprüfen müssen, welches Modell besonders geeignet ist. Dann geht es vor allem um den reflektierten Einsatz alternativer Modelle.

Diese Gleichungen beschreiben, welche Länge y eine Kerze nach x Stunden Brennen noch hat:
$y = 15 - 2x \quad y = 7 - 1{,}5x \quad y = 8 + 2x \quad y = 6$
$y = -x + 5 \quad y = 2x \quad y = 4 - x \cdot x \quad x = 2$
Überprüfe, ob die Gleichungen sinnvoll sind und begründe dein Urteil.

Eng verwandt ist die Tätigkeit des *Realisierens*, d.h. das Angeben einer Realsituation, die zu einem gegebenen Modell passen könnte, dies kommt dem Diagnostizieren inhaltlicher Vorstellungen gleich (s. o.). Nach einer Modellierung müssen Schülerinnen und Schüler beurteilen können, wie plausibel ihr Ergebnis oder wie gut ihre Modellierung war. Man kann auch Diagnoseaufgaben stellen, in denen allein dieses *Validieren* überprüft wird (vgl. *Abb. 6*).
Eine komplexere Validierungsaufgabe ist auf dem Denkzettel auf S. 43 zu finden.

Wichtige Aufgabenformate zur Diagnose von Modellierungskompetenzen	
Umgang mit Unsicherheit	– Aufgaben mit überflüssiger Information – Aufgaben mit nicht spezifiziertem Ziel („Betrache die Situation X. Was könnte man hier sinnvoll fragen?“) – Aufgaben mit fehlenden Größen, für die man plausible Annahmen machen muss.
Schätzen, Überschlagen	– Fermiaufgaben („Wie groß, wie lang, wie schwer …?“), bei denen mit geschätzten Größen weiter gerechnet werden muss
Vereinfachen	– Welche Annahmen musst du machen,damit …? – Welche Vereinfachungen kannst du machen, damit …?
Mathematisieren	– Welcher Ansatz / welche mathematische Beschreibung passt auf die Situation? – Wie würdest du die Situation mit einem Graphen / einem Rechenausdruck / usw... beschreiben?
Realisieren	– Gib verschiedene / eine Situationen an, auf die die Rechnung / der Term usw. … passt.
Validieren	– Ist das Ergebnis plausibel? Begründe dein Urteil. – Wie kann man das Ergebnis / die Gültigkeit des Ansatzes überprüfen? Gib verschiedene Wege an.

Kasten 4

Michael, Jennifer und Erhan haben verschiedene Kerzen beschrieben. Bei allen dreien ist derselbe Abbrenngraph herausgekommen. Bewerte die Lösungen und verbessere sie, wenn nötig.

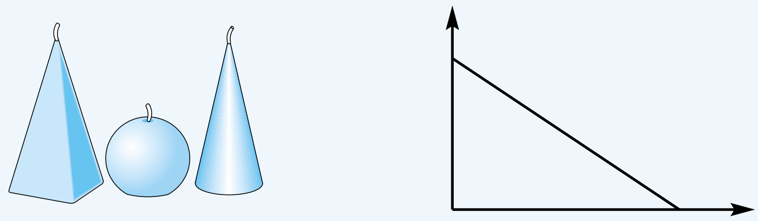


Abb. 6: *Diagnoseaufgabe zum Validieren*

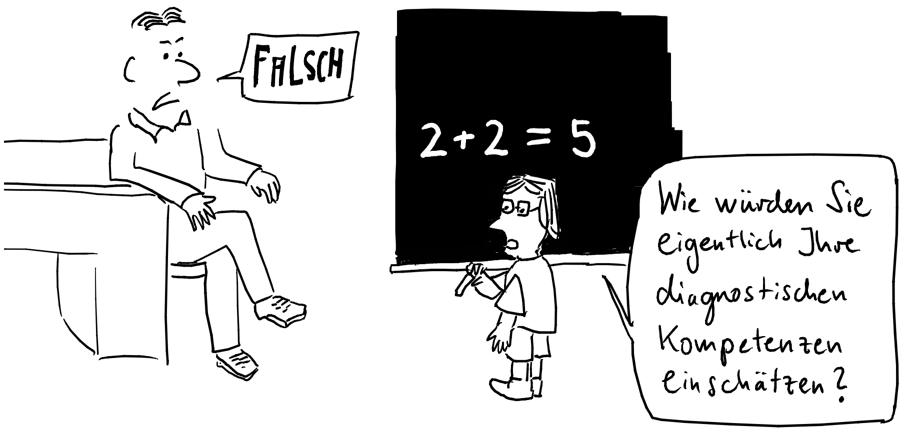
Kasten 5

Wann sind Aufgaben für die Diagnose geeignet?

– Die Aufgaben sollten sich auf bestimmte Kompetenzaspekte **konzentrieren**. Damit wird die Interpretation einer Schülerlösung später einfacher. Will man beispielsweise etwas über prozessbezogene Kompetenzen erfahren, so darf die Bearbeitung nicht zugleich viele oder anspruchsvolle Wissenselemente erfordern.

– Die Bearbeitung sollte auf **verschiedenen Niveaus** möglich sein, so dass man nicht nur „ganz-oder-gar-nicht“ Informationen über die Lernenden sammelt. Das erreicht man vor allem durch hinreichend offene Aufgabenstellungen.

– Die Aufgabenstellung sollte zur **Produktion** (d. h. zur Erklärung, Beschreibung des Lösungsweges usw.) auffordern. Das „Ergebnis“ der Aufgabe darf nicht etwa nur eine Zahl sein, sondern eine möglichst ausführliche Beschreibung des Lösungswegs, aber auch eine verbale Beschreibung der Ideen und Ansätze, die auf den Lösungsweg geführt haben.



Fazit

Ziele, Gegenstände und insbesondere die methodische Ausgestaltung des Diagnostizierens sind vielfältig. Alle Beispiele dieses Beitrags haben aber gemeinsam, dass geeignete Aufgabenstellungen nötig waren, um diagnostische Informationen zu sammeln. Solche Aufgaben sollten den in *Kasten 5* abgedruckten Kriterien genügen. Aufgaben aus zentralen Prüfungen verletzen meist die letzten beiden Kriterien. Sie fordern eher geschlossene, einfache Antworten, damit sie ökonomisch auswertbar sind und einen objektiven Vergleich zwischen Klassen erlauben. Auf-gaben ‚zum Lernen' verletzen hingegen nicht selten die ersten beiden Kriterien, da ihr Zweck ein anderer ist. Bei Modellierungsaufgaben beispielsweise, die nicht auf Diagnose angelegt sind, möchte man Schülerinnen und Schülern ermöglichen, viele Modellierungsschritte selbst zu gehen. Bei Aufgaben in Klassenarbeiten hingegen kann es angeraten sein, bewusst Aufgaben mit diagnostischem Potenzial einzusetzen, wenn man nicht nur bewerten will, sondern auch verstehen will, was Schülerinnen und Schüler können.

In diesem Einführungsbeitrag haben wir versucht, einen Einblick in die vielfältigen Aspekte des Diagnostizierens im Mathematikunterricht zu geben (vgl. dazu auch Büchter/Leuders 2005, S. 167ff, Leuders 2006, Landesinstitut für Schule 2006, Prediger 2006, Sjuts 2006). Wir wollen dazu anregen, bei der Beobachtung von Schülerinnen und Schüler oder bei der Auswahl von Aufgaben für Unterricht oder Klassenarbeit, das Augenmerk anhand konkreter Kriterien auf das diagnostische Potenzial der Situation zu lenken. Weitere exemplarische Anregungen aus der Praxis finden Sie in den folgenden Beiträgen des Heftes.

Literatur

Bell, A. (1983): Diagnostic teaching. The design of teaching using research on understanding, in: ZDM 15(2), S. 83–89.

BLK (1997): Gutachten zur Vorbereitung des Programms SINUS, BLK, Heft 60, Bonn.

Bronzel, M./Schmerder, I. (2007): Schülervorstellungen zur Darstellung von Funktionen, Seminarbericht, betreut von S. Prediger, Universität Dortmund.

Büchter, A./Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen, Cornelsen Scriptor, Berlin.

Büchter, A./Herget, W./Leuders, T./Müller, J. (2007): Die Fermi-Box, Friedrich, Seelze.

Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures, Kluwer, Dordrecht.

Fröhlich, I./Smolinski, B. (Hrsg.) (2006): Leistungen rückmelden – mehr als die persönliche Note, PM 48 (10).

Gallin, P./Hußmann, S. (Hrsg.) (2006): Schreiben – Lesen – Rückmelden. Dialogischer Unterricht, PM 48 (7).

Helmke, A. (2003): Unterrichtsqualität. Erfassen – Bewerten – Verbessern, Kallmeyer, Seelze.

Hofe, R. vom (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen, in: Mathematik lehren 118, S. 4–8.

Ingenkamp, K. (1997): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik. Weinheim, Beltz.

KMK (2003): Bildungsbericht für Deutschland. Erste Befunde, Leske + Budrich, Opladen.

Landesinstitut für Schule/Qualitätsagentur (Hrsg.) (2006): Kompetenzorientierte Diagnose, Klett, Stuttgart.

Lengnink, K. (2005): „Abhängigkeiten von Größen" – zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt, in: PM 47 (2), S. 13–19.

Leuders, T. (2006). Erläutere an einem Beispiel … Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern – mit offenen Aufgaben, in: Friedrich Jahresheft, S. 78–83.

Ministerium für Schule, Wissenschaft und Forschung NRW (Hrsg.) (2001): Diagnose von Basiswissen und Problemlösen in Kontexten. Bd. 9035/1, Ritterbach, Frechen. Online unter www.learnline.de/angebote/m-aufgaben.

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik, 3. Auflage, Elsevier, München.

Prediger, S. (2006): Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben, in: PM 48 (11), S. 8–12.

Reiff, R. (2006): Selbst- und Partnerdiagnose im Mathematikunterricht, in: Friedrich Jahresheft, S. 68–73.

Sjuts, J. (2006): Unterrichtliche Gestaltung und Nutzung kompetenzorientierter Aufgaben in diagnostischer Hinsicht, in: Blum, W. et al. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I, Cornelsen-Scriptor, Berlin, S. 96–112.

Winter, H. (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht, in: Journal für Mathematikdidaktik 4 (3), S. 175–204.

Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Universität Dortmund, IEEM
stephan.hussmann@math.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Timo Leuders,
Pädagogische Hochschule Freiburg
leuders@ph-freiburg.de

Prof. Dr. Susanne Prediger,
Universität Dortmund, IEEM
prediger@math.uni-dortmund.de