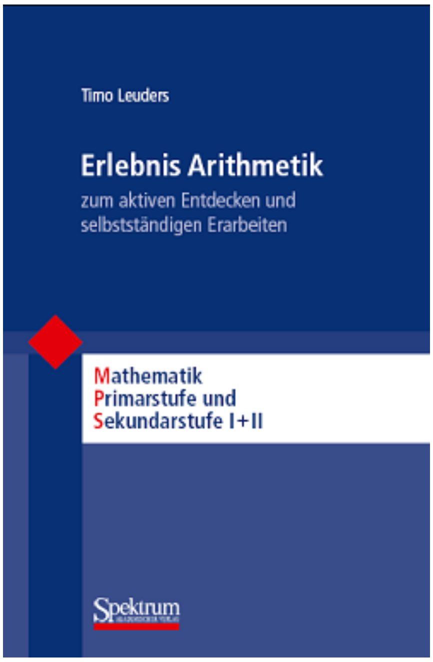


Lösungshinweise Erkundung 2.1

Achten Sie bei der Reflexion über Ihren Lösungsweg darauf, wo und wie Sie Bündelungen vorgenommen haben, um das Zählen zu beschleunigen.

Diese Bündelungen können je nach Bild sehr unterschiedlich sein.

Lösungshinweise Erkundung 2.2

Sie können zu jedem Bild eine Rechnung aufschreiben, die illustriert, wie sie gezählt haben. An der Rechnung kann man vielleicht die einzelnen Schritte und die Komplexität Ihrer Strategie ablesen. Sie können Ihre Denkweise auch bildlich skizzieren.

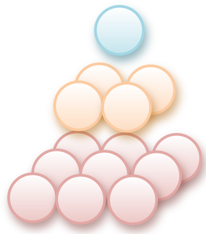
Überlegen Sie, wo Ihre Zählweise die Struktur der Bilder vielleicht schon ganz intuitiv nutzt und wo Sie bewusst erst eine Strategie erarbeiten müssen.

Spannend ist auch die Frage: Welche Struktur „steckt" in den Bildern? Welche interpretieren Sie „von außen" hinein?

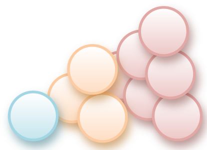
Lösung Übung 2.3

Es ist hilfreich, wenn man zu jeder Rechnung versucht, ein Bild zu zeichnen. Zu jedem Summanden und zu jedem Klammerausdruck gehört ein Teilbild. Nachfolgend sind jeweils die Teilbilder für die ersten drei Summanden gezeichnet.

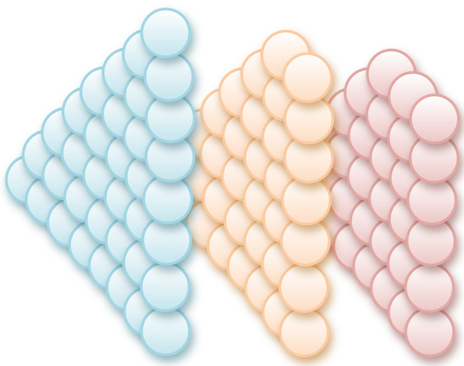
a) $1+4+9+16+25+36+49+64 = 204$



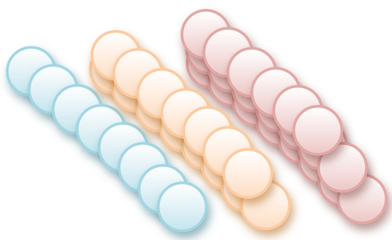
b) $1+3+6+10+15+21+28+36+28+21+15+10+6+3+1 = 204$



c) $36+(36-1)+(36-3)+(36-6)+(36-10)+(36-15)+(36-21)+(36-28) = 204$



d) $8+(8+7)+(8+7+6)+(8+7+6+5)+\ldots+(8+7+6+5+4+3+2+1) = 204$



Lösungshinweise Erkundung 2.4

Dies sind einige Strategien, die – nicht nur bei Zählproblemen – weiter helfen:

- *Schreibe zuerst einzelne Beispiele auf, um das Problem zu verstehen.*
- *Versuche alle einzelnen Möglichkeiten systematisch aufzuschreiben.*
- *Finde eine vereinfachende Schreibweise.*
- *Zerlege das Problem in (möglicherweise) einfachere Teilprobleme.*
- *Schreibe das Problem in einer anderen Darstellung (z.B. als Graph oder Tabelle)*

Vorsicht: Lesen Sie die einzelnen Gänge genau und überlegen Sie, was mit den Speisen gemeint ist. Wer einfach nur die Zeilen zählt, fällt herein!

Lösung Übung 2.5

Beginnen Sie am besten mit einem Beispiel, am besten mit Mengen, die möglichst willkürlich sind, z.B.: $M_1= \{1,2,5,7\}$, $M_2=\{2,3,4\}$ und überlegen Sie, was die Regeln für diese Mengen bedeuten könnten.

$|M_1 \cup M_2|=|M_1|+|M_2|$ - Diese Gleichung funktioniert nicht. Das Beispiel führt auf: $M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5,7\}$ und damit auf $6 = 4 + 3$. Korrekt ist die Gleichung nur dann, wenn M_1 und M_2 keine Schnittmenge besitzen, also wenn $M_1 \cap M_2 = \{\}$. Man kann die Formel aber retten, indem man diese Schnittmenge berücksichtigt: $|M_1 \cup M_2|=|M_1|+|M_2| - |M_1 \cap M_2|$ oder noch schöner geschrieben:

$$|M_1 \cup M_2|+|M_1 \cap M_2| =|M_1|+|M_2|$$

$|M_1 \cup M_2|=|M_1|\cdot|M_2|$ - auch diese Gleichung funktioniert nicht: $6 = 4 \cdot 3$. Interessant ist zu fragen: Bei welchen besonderen M_1 und M_2 ist sie denn trotzdem richtig? Nach der obigen Umformung für $|M_1 \cup M_2|$ kann man fragen: Für M_1 und M_2 gilt:

$$|M_1|+|M_2| - |M_1 \cap M_2|= |M_1|\cdot|M_2|$$

Dazu muss auf jeden Fall schon einmal $|M_1|+|M_2| \geq |M_1|\cdot|M_2|$ gelten, und das ist ja nicht für allzu viele natürliche Zahlen zu erfüllen. Eigentlich geht das nur, wenn für eine Menge gilt: $|M_i|= 0$ oder $|M_i|=1$. Schaut man sich alle Möglichkeiten an, so bleibt nur noch: $M_1=M_2 =\{\}$ oder $M_1=M_2$ mit genau einem Element. In allen anderen Fällen gilt $|M_1|\cdot|M_2|\geq|M_1 \cup M_2|$– eigentlich ein ziemlich langweiliges Resultat.

Lösung Übung 2.6

$$B = \{1,2,\ldots,10\},\ H = \{1,\ldots,21\}$$

$$R = B \times H$$

Um die Anzahl der Elementen zu erhalten, welche in einem Rechteck der gegebenen Maße liegen, muss nun die Anzahl der Elemente, welche durch die Höhe und Breite gegeben sind, entsprechend der Formel für den Flächeninhalt in einem Rechteck, miteinander multipliziert werden.

Um aber die Anzahl der Elemente in der Produktmenge zu erhalten, darf nicht die ganze Menge B und H betrachtet werden, sondern die Anzahl der Elemente in diesen beiden Mengen. Wir betrachten also die Mächtigkeit von A und B, was in der Mathematik mittels senkrechten Strichen gekennzeichnet wird.

$$|R| = |B \times H| = |B| \cdot |H| = 10 \cdot 21 = 210$$

Allerdings ist das der Fall, wenn die ganzzahligen Koordinaten auf den Kanten des Rechtecks liegen. Schiebt man das Rechteck ein wenig nach rechts oben, so bleibt nur

$$B = \{2,\ldots,10\},\ H = \{2,\ldots,21\}$$

Und

$$|R| = |B| \cdot |H| = 9 \cdot 20 = 180$$

Lösung Übung 2.7

Wie oft bei kombinatorischen Problemen, gibt es schwierige und leichte Lösungswege, je nachdem von welcher Seite man das Problem betrachtet.

Hierzu zunächst ein naheliegender Weg, der die Rechnung allerdings umständlich macht. Der Einfachheit halber wird nur ein dreigängiges Menü betrachtet.

Wenn man *keinen* Gang auslässt, hat man $6 \cdot 15 \cdot 5$ Möglichkeiten.

Wenn man *einen* Gang auslässt, so kann man das bei jedem der 3 Gänge tun:
Ohne 1. Gang: $15 \cdot 5$ Möglichkeiten.
Ohne 2. Gang: $6 \cdot 5$ Möglichkeiten.
Ohne 3. Gang: $6 \cdot 15$ Möglichkeiten.

Aber man kann auch *zwei* Gänge auslassen, und zwar auf drei Arten:
Ohne 1. und 2. Gang: 5 Möglichkeiten.
Ohne 2. und 3. Gang: 6 Möglichkeiten.
Ohne 1. und 3. Gang: 15 Möglichkeiten.

Das macht insgesamt:

$$6 \cdot 15 \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 15 + 5 + 6 + 15$$

Wenn man diesen Term nicht einfach ausrechnet, sondern erst umformt, erhält man:

$$\begin{aligned}
&= (6+1) \cdot 15 \cdot 5 + 6 \cdot (15+5) + (15+5) + 6 \\
&= (6+1) \cdot 15 \cdot 5 + (6+1) \cdot (15+5) + (6+1) - 1 \\
&= (6+1)(15 \cdot 5 + 15 + 5 + 1) - 1
\end{aligned}$$

$= (6+1)(15 \cdot (5+1) + 5+1) - 1$
$= (6+1)(15+1)(5+1) - 1$

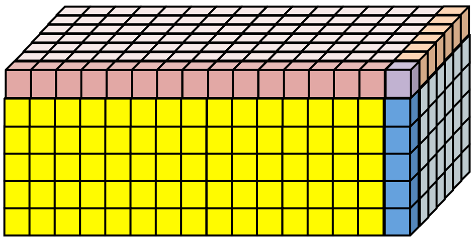
Soweit ein recht klarer, aber langatmiger Lösungsweg mit einer erstaunlich einfachen Endformel. Oft fragt man sich nach einer solchen Berechnung: Hätte man das nicht schneller haben können? Ist die einfache Endformel nicht unmittelbar verständlich? Und hier ist es tatsächlich so: Die Anzahl der Möglichkeiten aus drei Gängen unter Auslassung auszuwählen lautet nämlich:

$$(6+1)(15+1)(5+1) = 6 \cdot 15 \cdot 5 + 6 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 6 + 15 + 5 + 1$$

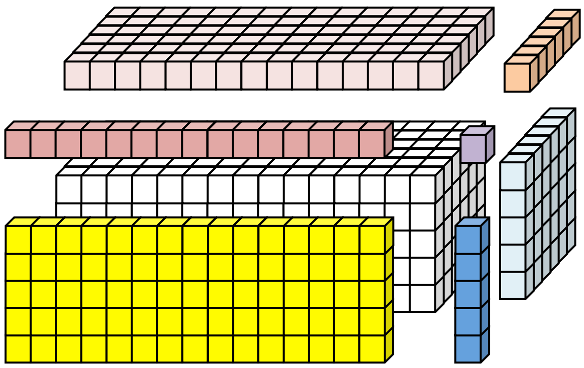
Diese Formel kann man auch so interpretieren: Im Ersten Gang gibt es nicht nur 6 Wahlmöglichkeiten, sondern 7. Man stelle sich vor, auf der Speisekarte stünde am Ende jedes Ganges noch eine weitere Wahlmöglichkeit, nämlich „*niente*“. In dem Produkt kann muss man schon beim Ausmultiplizieren (nicht erst beim Essen) entscheiden, ob man eine 6 also eine der Speisen oder eine 1, die „Nicht-Speise“ wählt.

Übrigens ist die linke und rechte Seite der Formel auch grafisch einsichtig:

$(6+1)(15+1)(5+1)$



Zu jedem Summanden von $6 \cdot 15 \cdot 5 + 6 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 6 + 15 + 5 + 1$ gehört ein Quader:



Das Produkt der drei Faktoren lässt allerdings auch zu, dass man alle Gänge überspringt, also dreimal die 1 wählt. Will man das ausschließen, muss man den einen Fall wieder abziehen.
Für das komplette fünfgängige Menü ergibt sich also schließlich:

$$(6+1)(15+1)(5+1)(8+1)(5+1) - 1 = 7 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6 - 1 = 36287$$

Lösungshinweise Erkundung 2.8

Wenn Sie systematisch alle Fälle notieren, bekommen Sie vielleicht eine Einsicht in die Struktur. Die Namen der jungen Damen könnten beispielsweise einfach durch Ziffern ersetzt werden. Dann lässt sich eine systematische Übersicht gut darstellen.

Lösungshinweise Übung 2.9

Hier finden Sie einige Aspekte, denen Sie weiter nachgehen können

- Wie hängen benachbarte Zahlen rechnerisch zusammen? Gibt es ein System?
- Woher kommt Ihnen 1, 2, 1 und 1, 3, 3, 1 vielleicht bekannt vor? Hat das einen tieferen Grund?
- Rechnen Sie einmal die Summen in jeder Zeile aus. Fällt Ihnen etwas auf?

Das Pascal'sche Dreieck ist eine Anordnung von Zahlen in Dreiecksform, welches nach einem Bildungsgesetzt konstruiert wird.

												0.Spalte
0.Zeile						1						**1.Spalte**
1.Zeile					1		1					**2.Spalte**
2.Zeile				1		2		1				**3.Spalte**
3.Zeile			1		3		3		1			**4.Spalte**
4.Zeile		1		4		6		4		1		**5.Spalte**
5.Zeile	1		5		10		10		5		1	**…**
…												**m.Spalte**
n.Zeile												

Begonnen wird in der nullten Zeile mit einer Eins. Nun schreibt man darunter in der ersten Zeile zwei Einsen, so dass die obere Eins in der Mitte darüber steht. Jede folgende Zeile beginnt und endet mit einer Eins. Die Zahlen dazwischen ergeben sich als Summe der beiden darüber liegenden Zahlen. Das Pascalsche Dreieck kann beliebig fortgesetzt werden.
Im Pascalschen Dreieck stehen die Binomialkoeffizienten, es beinhaltet also alle möglichen Kombinationen aus einer Menge von n verschiedenen Objekten gleichzeitig m verschiedene Objekte auszuwählen. So gibt der Wert in der n-ten Zeile und der m-ten Spalte die Anzahl der möglichen Kombinationen m aus n Objekten auszuwählen an.

Wie erklärt sich nun das Phänomen, dass jede Zahl die Summe der beiden Zahlen darüber ist. Betrachtet wir nun die Anzahl der Kombinationen 3 aus 5 auswählen (5.Zeile, 3.Spalte). Dieser Wert entsteht laut des Bildungsgesetzes des Pascalschen Dreiecks durch Addition der beiden Werte darüber, also 10=4+6. Für die Kombinatorik bedeutet dies, dass gilt: Anzahl der möglichen Kombinationen 3 aus 5 auszuwählen = Anzahl der Kombinationen 2 aus 4 auszuwählen + Anzahl der Kombinationen 3 aus 4 auszuwählen.
Dies ist leicht zu verstehen, wenn man betrachtet, wie sich die Auswahl 3 aus 5 zusammensetzt werden kann. Hierbei können zwei Fälle betrachtet werden: Beim ersten Fall nimmt man an, dass das 5. Objekt auf jeden Fall ausgewählt werden soll. Dann müssen nun nur noch 2 aus 4 Objekten ausgewählt werden um insgesamt 3 aus 5 Objekten auszuwählen. Beim zweiten Fall nimmt man an, dass das 5. Objekt auf keinen Fall mit dabei sein soll. So müssen in diesem Fall nun noch 3 Objekte aus 4 Objekten ausgewählt werden.

1, 2, 1 und 1, 3, 3, 1 kommt Ihnen vermutlich bekannt vor, wenn Sie sich an die Binomischen Formel erinnern. Es sind die Vorfaktoren für die Potenzen eines Binoms. In der 0. Zeile finden sie die Vorfaktoren eines Binoms von 0. Grade, in der 1. Zeile stehen die Vorfaktoren eines Binoms von 1.Grade, in der 2. Zeile stehen die Vorfaktoren eines Binoms von 2. Grade, …
Betrachten wir beispielhaft die dritte Zeile. Hier stehen also die Vorfaktoren eines Binoms von 3. Grade.

$$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3$$

Wenn man beim Ausmultiplizieren auf den Faktor a^3 kommen möchte, so gibt es nur eine Möglichkeit, nämlich dass man aus jedem Faktor dass a auswählt. Da es hierfür also nur eine Möglichkeit gibt, hat der Faktor a^3 den Vorfaktor 1. Wenn man beim Ausmultiplizieren auf den Faktor a^2b kommen möchte, so wählt man zwei Mal ein a aus und einmal ein b. Hierfür gibt es drei Möglichkeiten, weshalb vor dem Faktor a^2b der Vorfaktor 3 steht. Für die anderen die beiden Faktoren ab^2 und b^3 können die Vorfaktoren analog erklärt werden.

Betrachten wir nun die Summe jeder Zeile.
0. Zeile: $1=2^0$
1. Zeile: $1+1=2=2^1$
2. Zeile: $1+2+1=4=2^2$
3. Zeile: $1+3+3+1=8=2^3$
4. Zeile: $1+4+6+4+1=16=2^4$
5. Zeile: $1+5+10+10+5+1=32=2^5$
…

Es fällt auf, dass die Summe jeder Zeile der Form 2^n, mit $n\in \mathbb{N}$ ist. Dieses Phänomen lässt sich wieder verstehen, wenn man bedenkt, dass in der k. Zeile die Anzahl aller möglichen Kombinationen stehen, aus k Objekten verschieden große Mengen auszuwählen. Dies kann geschehen, indem man die möglichen Kombinationen für jede Gruppengröße einzeln berechnet und dann daraus auf die Gesamtzahl schließt. Die Gesamtzahl aller möglichen Kombinationen kann aber auch berechnet werden, indem man bei den k möglichen Objekten einzeln entschiedet, ob dieses Objekt ausgewählt wird oder nicht. Es muss dann k Mal eine Entscheidung mit zwei Antwortmöglichkeiten getroffen werden.

Somit ergibt sich im Fall der k Objekte eine Gesamtanzahl an möglichen Kombinationen verschiedener Mengen von 2^k.

Lösung Übung 2.10

Da bei einer CD 16 Bit verwendet wird, gibt es 16 Stellen, die mit Nullen oder Einsen besetzt werden können.
Eine mögliche Folge wäre zum Beispiel 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0
Für jede Stelle gibt es zwei Möglichkeiten, diese mit einer Ziffer zu besetzen. Es gibt die Möglichkeit, die jeweilige Stelle mit einer Null oder einer Eins zu besetzen. Es gibt also

$$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^{16}= 65536$$

Möglichkeiten eine sechzehnstellige Binärcode zu erstellen. Damit können

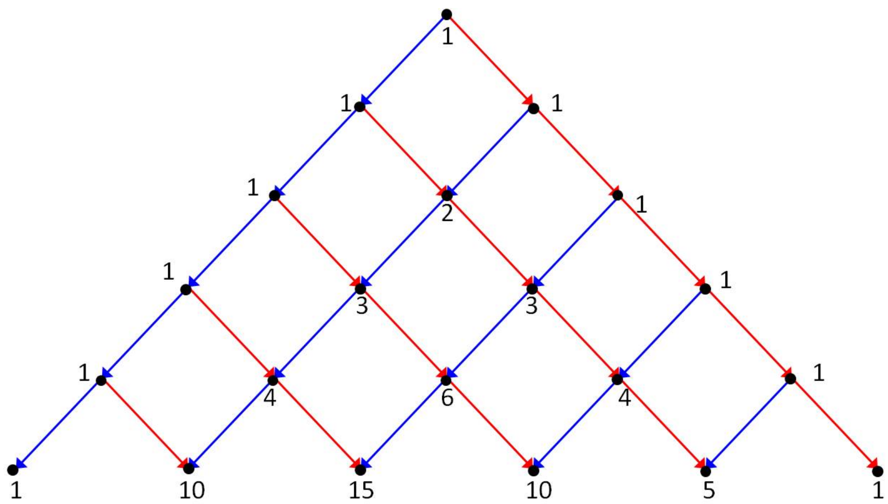
$$2^{16}= 65.536$$

Lautstärkewerte codiert werden.
Eine Codierung, bei der man zwanzigstellige Codes verwendet hat $2^{20}=1048576$ verschiedene Abstufungen. Diese Codierung hat jedoch nicht $\frac{1}{4}$ mehr Abstufungen wie ein Code, bei dem man sechzehnstellige Binärcodes verwendet.
Eine Codierung mit zwanzigstelligem Binärcode hat

$$\frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^{20-16} = 2^4 = 16$$

mal mehr Abstufungen als eine Codierung, die nur einen sechzehnstellige Codierung verwendet.

Lösung Übung 2.11:



Die Zahlen an den Knotenpunkten geben an, auf wie viele Wegen man insgesamt zu diesen Knotenpunkten gelangen kann.

Rechnen Sie es ruhig mal nach!

In dieser vereinfachten Darstellung erkennt man wohl schnell das Pascalsche Dreieck wieder.
Begonnen wird mit einer Eins. In der ersten Zeile darunter stehen zwei Einsen, so dass die obere Eins in der Mitte darüber steht. Jede folgende Zeile beginnt und endet mit einer Eins. Die Zahlen dazwischen ergeben sich als Summe der beiden darüber liegenden Zahlen.
Würde man an jeden Notenpunkt im Galtonbrett den Wert vermerken, der angibt, auf wie viele Wege die Kugel zu diesem Knotenpunktpunkt gelangen kann, so erhält man ein Pascalsches Dreieck.
Summiert man die der Werte innerhalb einer Zeile, so erkennt man dass das Ergebnis immer eine Zweierpotenz ist. Dies kann so erklärt werden, dass die Kugel, bei jedem Knotenpunkte im Galtonbrett zwei Möglichkeiten hat, weiterzufallen – entweder nach rechts oder nach links. Befindet sich die Kugel beispielsweise auf der dritten Ebene des Galtonbretts, so hatte die Kugel insgesamt 2^3 Möglichkeiten in diese Ebene zu gelangen.
Die Gesamtzahl der Möglichkeiten, in eine bestimmte Ebene zu gelangen, kann auch einzeln berechnet werden, indem für jeden Knotenpunkt in einer Ebene einzeln berechnet wird auf wie viele Möglichkeiten die Kugel zu diesem Punkt gelangen kann. Betrachtet wird wieder die dritte Zeile. In dieser Ebene befinden sich vier Knotenpunkte. Zu den beiden Knotenpunkten ganz links und ganz rechts gibt es für die Kugel jeweils nur eine Möglichkeit zu diesem Knotenpunkt zu gelangen. Für den rechten Knotenpunkt muss die Kugel bei jedem Knotenpunkt zuvor immer nach rechts abgeleitet worden sein, bei dem Knotenpunkt in der dritten Ebene ganz links muss die Kugel analog dazu zuvor immer nur nach links abgeleitet worden sein. Zum zweiten Knotenpunkt in der

dritten Ebene (von links gezählt) kann die Kugel gelangen, in dem sie zwei Mal nach links fällt und ein Mal nach rechts fällt. Hierfür gibt es drei verschiedene Möglichkeiten- links, links, rechts oder links, rechts, links oder rechts, links, links. Um zum dritten Knotenpunkt in der dritten Ebene zu gelangen muss die Kugel zwei Mal nach rechts und einmal nach links fallen. Auch hierfür gibt es drei Möglichkeiten- rechts, rechts, links oder rechts, links, rechts oder links, rechts, rechts.

Lösung Übung 2.12

An dieser Stelle sei Ihnen verraten, Alighiero Boetti hat sich exakt 720 Briefe geschickt. Hat er dadurch alle Kombinationen berücksichtigt?

An der ersten Stelle hat er 6 Möglichkeiten, die Briefmarken auszuwählen, an zweiter noch 5… Das ergäbe 6! Möglichkeiten die Briefmarken hintereinander auszuwählen. Das sind somit die 720, deren Anzahl an Briefen auch versandt wurde.

Was denken Sie nun, sind das alle Möglichkeiten?

Nein, richtig! Es kam in der Berechnung keine Briefmarke doppelt vor.

Fangen Sie noch einmal von vorne an. An erster Stelle gibt es 6 Möglichkeiten. An zweiter…ebenfalls 6, da ja dieselbe Briefmarke noch einmal folgen kann. An dritter Stelle ebenfalls usw.

Es ergeben sich somit $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6 = 46.656$ mögliche Kombinationen an Briefen.

Nun wissen wir auch, warum Alighiero Boetti auf Wiederholungen verzichtet hat ☺

Lösungshinweise Erkundung 2.13

Die Lösung hängt stark davon ab, wie Sie die Situation interpretieren.

- Will Jana auf jeden Fall drei verschiedene Kugeln haben, oder hätte sie nichts dagegen, auch mal eine Sorte mehrfach zu nehmen?
- Will Jana die Kugeln einfach gemischt in ihrem Becher haben, findet sie, dass ein Eis, bei dem die Kugeln in einer anderen Reihenfolge auf dem Hörnchen stecken, auch anders schmeckt?

Entscheiden Sie sich, was für ein Eistyp Jana ist. Hilfreich ist es auch, verschiedene Interpretationen auszuprobieren und miteinander zu vergleichen.

Lösungshinweise Erkundung 2.14/2.15

Michaela argumentiert, dass die Kassen in unterschiedlicher Reihenfolge besetzt werden können, weshalb die Reihenfolge bedeutsam ist. An dieser Argumentation wird klar, dass Michaela wohl nicht ganz verstanden hat, was mit der Bedingung „Reihenfolge bedeutsam“ gemeint ist. Nur, weil die drei Kassen in unterschiedlichen Reihenfolgen besetzt werden können, wird die Reihenfolge nicht unbedingt bedeutsam. Für das Endergebnis, welche Kassen besetzt werden können, ist die Reihenfolge der Besetzung der Kassen, also welche Kassiererin an welcher Kasse sitzt nicht bedeutsam.

Wie Sie an der Aufgabe und Michaelas Lösung feststellen werden haben, ist es nicht immer leicht, klar zu sagen, was „Wiederholung zugelassen“, „Wiederholung bedeutsam“, „Reihenfolge bedeutsam“, „Reihenfolge egal“ usw.. bedeuten. Versuchen Sie verschiedene passende und unpassende Interpretationen zu der Aufgabe zu beschreiben.

Lösung Übung 2.16

Jeder Würfel hat 6 Ergebnisse. Beim Würfeln mit fünf Würfeln gäbe es

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$$

verschiedene mögliche Ergebnisse. Alle Ergebnisse sind gleichwahrscheinlich. Allerdings werden durch diese Berechnungsformel zwei Ergebnisse, wie 11.234 und 12.341, als verschieden gewertet.

Für das Spiel ist jedoch nur wichtig, welche Augenzahlen zu sehen sind und nicht, auf welchen Würfeln die Zahlen stehen. Fasst man diese zusammen, so muss man je nach Häufigkeiten der Doppelungen verschieden vorgehen:
Mögliche Ereignisse:

a) Alle Augenzahlen verschieden:
Beispiel: 2, 3, 4, 5, 6
Da nur verschiedene Augenzahlen zugelassen sind gibt es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ mögliche Würfelkombinationen, bei einem Wurf mit fünf Würfeln.
Das Ergebnis kann jedoch in $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ möglichen Reihenfolgen vorkommen. Da bei dem Spiel „Mäxchen“ nur die Augensumme zählt, werden die verschiedenen möglichen Reihenfolgen nicht betrachtet. Es gibt also $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$ mögliche Kombinationen, bei denen alle Augenzahlen verschieden sind.

b) Nur ein Paar gleicher Augenzahlen, alle anderen Augen zum Paar und untereinander verschieden:
Beispiel: 2, 2, 4, 5, 6
Bei diesem Ereignis gibt es auf jeden Fall ein Paar gleicher Augenzahlen. Für dieses Paar gibt es 6 Möglichkeiten. Nun kann man sich vorstellen, anstatt mit fünf Würfeln nur noch mit drei Würfeln zu werfen, bei denen alle Würfelaugen unterschiedlich sein müssen. Es gibt also nur noch $5 \cdot 4 \cdot 3$ Mögliche Kombinationen. Allerdings spielt die Reihenfolge keine Rolle, weshalb dann nur noch $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ Möglichkeiten übrig bleiben. Zusammen mit den zuvor berechneten 6 Möglichkeiten für das Paar gleicher Würfelaugen gibt es also $6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 60$ Möglichkeiten das Ereignis „nur ein paar gleiche Augenzahlen“ zu würfeln.

c) Zwei verschiedene Paare gleicher Augenzahlen, die letzte Augenzahl dazu verschieden:
Beispiel: 2, 2, 4, 4, 6
Bei diesem Ereignis gibt es zwei verschiedene Paare gleicher Augenzahlen. Für das erste Paar existieren 6 Möglichkeiten der Wahl der Augenzahl, für das zweite Paar gibt es nur noch 5 mögliche Augenzahlen. Da die Reihenfolge wieder beliebig ist muss durch 2! dividiert werden. Es gibt dann $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$ Möglichkeit. Hinzu kommen dann noch die 4 Möglichkeiten die einzelne Augenzahl zu wählen. Insgesamt gibt es also $\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 4=60$ Möglichkeiten für dieses Ereignis.

d) Ein Paare Augenzahlen und ein Triple gleicher Augenzahlen, wobei sich die Augenzahlen des Paares und des Tripels unterscheiden müssen:
Beispiel: 2, 2, 4, 4, 4
Für das Paare gleicher Augenzahlen hat man 6 verschiedene Möglichkeiten, für das Triple hat man dann nur noch drei Möglichkeiten. Insgesamt sind bei diesem Ereignis also $6 \cdot 5=30$ Kombinationen möglich.

e) Nur ein Triple gleicher Augenzahlen, die anderen beiden Augenzahlen zum Triple und untereinander verschieden:
Beispiel: 2, 2, 2, 4, 6
Bei diesem Ereignis gibt es auf jeden Fall ein Triple gleicher Augenzahlen. Für diese Triple gibt es 6 verschiedene Möglichkeiten. Nun kann man sich vorstellen anstatt mit fünf Würfeln nur noch mit zwei Würfeln zu werfen, bei denen die Würfelaugen untereinander und zum Triple unterschiedlich sein müssen. Es gibt somit noch $5 \cdot 4$ mögliche Kombinationen. Allerdings spielt die Reihenfolge keine Rolle, weshalb dann nur noch $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}$ Möglichkeiten übrig bleiben. Zusammen mit den zuvor berechneten 6 Möglichkeiten für das Triple gibt es also $6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 60$ Möglichkeiten das Ereignis „nur ein Triple gleiche Augenzahlen“ zu würfeln.

f) Ein Quartett gleicher Augenzahlen, die letzte Augenzahl dazu verschieden:
Beispiel: 2, 2, 4, 4, 6
Bei diesem Ereignis gibt es für das Quartett 6 Möglichkeiten und für die weitere Augenzahl dann nur noch fünf Möglichkeiten eines Ergebnisses. Insgesamt existieren für dieses Ereignis also $6 \cdot 5=30$ verschiedene Kombinationen.

g) Nur gleiche Augenzahlen (Fünferpasch):
Beispiel: 2, 2, 2, 2, 2
Für dieses Ereignis gibt es, entsprechend der verschiedenen Augenzahlen 6 verschiedene Möglichkeiten.

Bei dem Spiel „Mäxchen“ kann es folglich insgesamt 6+60+60 30+60+30+6 = 252 mögliche Ergebnisse geben.

Lösung Übung 2.17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Um dieses Problem zu lösen betrachten wir zunächst alle Zahlen zwischen 10000 – 99999:

Um den Anteil der Zahlen zu berechnen, welche beim Spiel genannt werden dürfen, sollen zunächst die Zahlen bestimmt werden, die als Ziffer keine Sieben enthalten.

Da zunächst nur die Zahlen zwischen 10.000 und 99.999 betrachtet werden, müssen nur fünfstellige Zahlen untersucht werden.

Für die Erstellung einer fünfsteige Zahl, in welcher keine sieben als Ziffer vorkommen darf, hat man für die erste Ziffer genau acht Möglichkeiten: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Es sind also alle zehn Ziffern mit Ausnahme der Sieben und der Null möglich, da zu Beginn der fünfstelligen Zahlen natürlich keine Null stehen darf. Für jede der weiteren vier Stellen der fünfstelligen Zahl stehen dann 9 Ziffern zur Verfügung, da hier, mit Ausnahme der Sieben alle Ziffern des Dezimalsystems erlaubt sind. Damit gibt es $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52.488$ fünfstellige Zahlen, welche keine Sieben enthalten.

Diese Zahlen dürfen jedoch nicht alle bei diesem Kinderspiel genannt werden. Sie haben zwar alle keine Sieben als Ziffer, jedoch können sie dennoch durch sieben teilbar sein und dürfen dann aus diesem Grund nicht laut gesagt werde.

Prinzipiell kann schnell bestimmt werden welcher Anteil dieser Zahlen durch sieben teilbar ist, nämlich $\frac{1}{7}$ aller Zahlen. Somit dürften also nur noch

$52488 - \frac{1}{7} \cdot 52.488 = 44.989$ genannt werden.

Jedoch befinden sich unter diesem Siebtel der Zahlen, welche durch sieben teilbar sind, auch Zahlen, welche eine Sieben als Ziffer enthalten. Diese Zahlen wurden dann nach dieser Berechnung zwei Mal vom Gesamtteil der zu untersuchenden Zahlen abgezogen. Doch welche Zahlen sind gleichzeitig durch Sieben teilbar und enthalten eine Sieben als Ziffer?

Sicherlich sind alle Zahlen, welche eine Sieben enthalten und gleichzeitig durch sieben teilbar sind, alle Zahlen, welche nur aus den Ziffern Null und Sieben bestehen. Für fünfstellige Zahlen hat man für die erste Ziffer nur eine Ziffer zur Auswahl, nämlich die Sieben, da die Null als erste Ziffer wieder auszuschließen ist. Für jede weitere der vier Ziffern gäbe es dann zwei Möglichkeiten der Besetzung: Die Sieben und die Null. Im Zahlenbereich von 10.000–99.999 wären dies $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mögliche Zahlen.

Es müsste nun noch weiter untersucht werde, ob es noch weitere Zahlen gibt, welche sowohl durch sieben teilbar sind als auch eine sieben als Ziffer enthalten.
Geht man davon aus, dass dieser Anteil verschwindend klein ist, so dürfen im Zahlenbereich von 10.000–99.999 bei diesem Spiel also etwa 44.989+8=44.997 Zahlen genannt werden. Nun müsste auch noch untersucht werden, ob der errechnete Anteil der Zahlen, welche für den untersuchten Zahlenbereich bei diesem Kinderspiel nicht genannt werden darf, auch auf alle anderen Bereiche übertragen werden könnte.

Lösung Übung 2.18

Taxi von A nach B:
Für die kürzeste Wegstecke muss das Taxi 4 mal nach oben und 5 mal nach rechts fahren. Die Reihenfolge ist egal, Wiederholungen sind nicht zugelassen!

➔ Wie viele Möglichkeiten gibt es , 4 mal oben und 5 mal rechts auf die insgesamt 9 Wegstücke zu verteilen?

Diese Rechnung ist vergleichbar mit der Lösung einer Anagrammaufgabe. Das Anagramm sehe hier folgendermaßen aus:

r r r r r o o o o   (r = rechts; o = oben)

Wie viele Möglichkeiten gibt es nun die Buchstaben r und o auf die neun Plätze zu verteilen?

$\rightarrow \binom{9}{4} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\cdot(9-5)!} = 126$Möglichkeiten.

Es gibt also 126 kürzeste Möglichkeiten.

Lösung Übung 2.19

Wenn jeder Streifen eine andere Farbe haben muss, so gibt es folgende Möglichkeiten:
Für den ersten Streifen stehen sieben mögliche Farben zur Auswahl. Für den zweiten Streifen stehen dann nur noch sechs mögliche Farben zur Auswahl (Sieben Farben minus die eine Farbe die schon für den ersten Streifen vergeben ist).
Für den dritten Streifen stehen nun noch fünf Farben zur Wahl (Sieben Farben minus die zwei Farben, die schon für die ersten beiden Streifen vergeben wurden).
Somit gibt es $7\cdot 6\cdot 5 = 210$ Möglichkeiten.

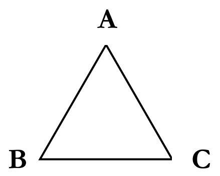
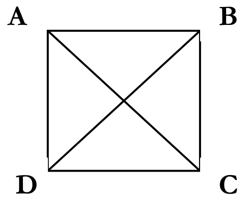
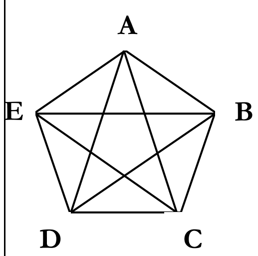
Wenn genau eine Farbe doppelt vorkommen soll, so gibt es im ersten Feld sieben Möglichkeiten eine Farbe zu wählen, im zweiten Feld stehen noch sechs mögliche Farben zur Wahl und an dritter Stelle gibt es nur noch eine Möglichkeit eine Farbe zu wählen. Da sich laut Bedingung eine Farbe wiederholen soll, ist diese Stelle schon durch die Wahl der Farbe des zweiten Streifens festgelegt.
$7\cdot 6\cdot 1 = 42$.
Aber da die Reihenfolge eine Rolle spielt, ist es wichtig wo die Farbe ist, die sich wiederholt. Man kann es sich auch so vorstellen: Es gibt drei mögliche Felder, in denen die Farbe sein kann, die einzeln ist. Daher müssen die zuvor errechneten 42 Möglichkeiten noch mit drei multipliziert werden. Es ergeben

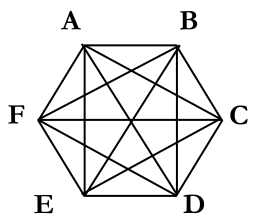
sich also $7 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3 = 126$ Möglichkeiten, eine Flagge aus sieben Farben zu erstellen, bei der genau eine Farbe doppelt vorkommt.

Können Farben auch dreifach vorkommen, also soll auch eine einfarbige Fahne dazu zählen, so gäbe es in diesem Fall $7 \cdot 1 \cdot 1 = 7$ Möglichkeiten, eine einfarbige Flagge zu erstellen. Hier ist die Reihenfolge nicht bedeutsam, da ja alle drei Felder die gleiche Farbe haben.

Addieren wir nun alle Möglichkeiten, so kommen wir auf $210 + 126 + 7 = 343$ Möglichkeiten eine Flagge mit sieben möglichen Farben zu erstellen.
Auf das gleiche Ergebnis kommt man übrigens auch, wenn man annimmt, in jedem Feld können alle 7 Farben vorkommen, womit sich $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343$ Möglichkeiten ergeben.

Lösung Übung 2.20

Anzahl an Teams	Grafik zum Tunier	Kombinationen	Anzahl der Spiele und Runden
3 Mannschaften		AB BC AC 2+ 1	3 Spiele 3 Runden
4 Mannschaften		AB BC CD AC BD AD 3+ 2+ 1	6 Spiele 3 Runden
5 Mannschaften		A B C D B C D E A B C C D E A B D E A E 4 3 2 + + + 1	10 Spiele 5 Runden

6 Mannschaften	 	AB BC CD DE EF AC BD CE DF AD BE CF AE BF AF 5+ 4+ 3+ 2+ 1	15 Spiele 5 Runden
10 Mannschaften		A muss gegen alle weiteren neun Teams spielen. Es muss also jede Mannschaft neun Mal spielen. Es sind somit neun Runden mit je fünf Spielen.	45 Spiele 9 Runden
18 Mannschaften		Je neun Mannschaften können gleichzeitig spielen. Da jeden Mannschaft gegen 17 andere Teams spielen muss, reichen 17 Runden	$17 \cdot 9$ Spiele= 153 Spiele 17 Runden

Allgemein gilt:

N = Anzahl der Mannschaften

<u>Für n gerade</u>

$(n\text{-}1) \cdot \frac{n}{2}$ Spiele

$(n\text{-}1)$ Runden

<u>Für n ungerade</u>

$(n\text{-}1) \cdot \frac{n}{2}$ Spiele

n Runden

Alternativ überlegt man sich, dass immer 2 aus n gegriffen werden, d.h. $(n\text{-}1) \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2}$

Lösung Übung 221

a) Es gibt insgesamt pro Frage vier Antwortmöglichkeiten. Somit gibt es insgesamt 4^{10}=1048576 Möglichkeiten den Test anzukreuzen. Aber nur eine davon schließt alle richtigen Antworten mit ein.

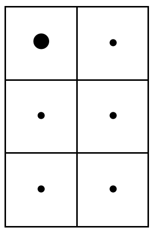
Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1048576}$.

Eine andere Herangehensweise ist, sich zu überlegen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, eine Frage richtig zu beantworten und nun für alle 10 Fragen zu berechnen.

Dann wäre die Lösung $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ und somit die gleiche Wahrscheinlichkeit wie oben.

b) Die Wahrscheinlichkeit eine Frage falsch zu beantworten ist $\left(\frac{3}{4}\right)$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit alles falsch zu machen ist $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0{,}056$.

c) Hierbei kann von b) „alle falsch“ ausgegangen werden.
Die Gegenwahrscheinlichkeit von „alle falsch“ ist „mindestens eins richtig“. Somit wäre die Lösung hier $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 94{,}4\ \%$



Lösung Übung 2.22

0 Punkte: → 1 Möglichkeit

1 Punkt:

An sechs Stellen möglich → 6 Möglichkeiten

2 Punkte:

Stellen Sie sich vor, der erste Punkt bleibt fix an einer Stelle, dann gibt es 5 Möglichkeiten den zweiten Punkt zu setzen. Setzt man nun den ersten Punkt an die zweite Stelle, so bleiben für den zweiten noch 4 Möglichkeiten usw.

5+4+3+2+1=15 Möglichkeiten

Diese Aufgabe entspricht der Aufgabe zwei erhabene Punkte aus sechs Punkten auswählen→$\binom{6}{2}$.

3 Punkte:

Analog zu oben stellt man sich hier vor, die oberen beiden Punkte fix zu halten, für den dritten Punkt bleiben dann noch vier Möglichkeiten. Setzt man nun die beiden festgehaltenen Punkte in die zweite Reihe, so verbleiben für den dritten Punkt wieder vier Möglichkeiten zur Wahl. Genauso verhält es sich für die dritte Reihe. Nun können die beiden erhabenen Punkte auch die beiden Oberen Punkte in der ersten oder zweiten Spalte sein, wodurch sich wieder vier

Möglichkeiten für den dritten Punkt ergeben. Analog können die beiden erhabenen Punkte auch die beiden unteren Punkte in der ersten oder zweiten Spalte sein, wodurch sich wieder zwei Möglichkeiten für den dritten Punkt ergeben. Zuletzt können die beiden erhabenen Punkte auch noch einmal in der rechten und linken Spalte den ersten und letzten Punkt ausmachen, wodurch durch weitere zwei mögliche Kombinationen entstehen.

4+4+4+4+2+ = 20 Möglichkeiten

Diese Aufgabe entspricht der Aufgabe drei erhabene Punkte aus sechs Punkten auswählen $\rightarrow \binom{6}{3}$.

4 Punkte:

Hier ist die Lösung gleich der Lösung für zwei erhabene Punkte! Es spielt keine Rolle ob man vier erhabene Punkte von sechs möglichen Punkten auswählt oder zwei Punkte von sechs möglichen Punkten auswählt, welche nicht erhaben sind.

$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$ Möglichkeiten

5 Punkte:

Hier ist die Lösung gleich der Lösung für einen erhabenen Punkt. Es spielt keine Rolle ob man fünf erhabene Punkte von sechs möglichen Punkten auswählt oder ein Punkt von sechs möglichen Punkten auswählt, welche nicht erhaben sind.

$\binom{6}{5}=\binom{6}{1}=6$ Möglichkeiten

6 Punkte:

Entspricht der Aufgabe keinen erhabenen Punkt: Es gibt also nur eine Möglichkeit.

Lösung Übung 2.23

Für ein Wort mit zehn Buchstaben gibt es $10! = 3.628.800$ Möglichkeiten, die Buchstaben anzuordnen.

Das Programm kann 1000 Annagramme pro Sekunde testen. Dass heißt für die 10! Anagramme braucht es 3.628.800/1000 Sekunden = 3628,8 Sekunden ≈ 60 Minuten 5 Sekunden ≈ 1 Stunde!

Lösung Übung 2.24

Zunächst einmal sollten Sie sich ein solches Kennzeichen vor Augen führen

F	**R**	**-**	**A**	**B**	**-**	**1**	**2**	**3**

Für die Stadt ergeben sich also folgende Möglichkeiten:

26 (hier für die Stelle A)

27 (Stelle B, eine Möglichkeit mehr als für A, da es auch noch „frei“, also keinen zweiten Buchstaben gibt)

999 Zahlen (es können alle Zahlen zwischen 1 und 999 vorkommen)

Somit gibt es $26 \cdot 27 \cdot 999 = 701.298$ mögliche Kennzeichen für Freiburg-Stadt

Analog zu Freiburg-Stadt gibt es für Freiburg-Land $26 \cdot 27 \cdot 8999 = 6.317.298$ mögliche Kennzeichen. Die 8999 ergibt sich aus $9999-1000$, da Freiburg-Land nur vierstellige Zahlen auf dem Kennzeichen haben darf! Ab 6.317.298 zugelassenen Autos reicht diese Vergabeart nicht mehr aus.

Lösung Übung 2.25

Zu a) Es sind insgesamt 5 Kinder. Also können ganz links alle 5 Kinder stehen. Dann bleiben an zweiter Stelle nur noch 4 Möglichkeiten, an dritter 3, an vierter Stelle 2 und zuletzt nur noch eine Möglichkeit, da nur 1 Kind noch übrig ist.

Somit ergeben sich $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten

Zu b) Wenn Sebastian ganz links stehen will, so verringern sich die Möglichkeiten für die anderen Kinder einen Platz zu wählen.

Es gibt also $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten

Zu c) Die Theorie aus c lautet, dass, wenn jedes Kind an die Stelle ganz links stehen will, wie Sebastian aus b), sich die 24 Möglichkeiten der anderen weitere 4 Mal wiederholen, so dass es $5 \cdot 24 = 120$ Möglichkeiten gibt, diese aber nochmals verdoppelt, da es ja auch noch den rechten Rand gibt, an dem Sebastian oder die anderen stehen können.

Dies ist ein Widerspruch zu a) da hierbei 120 Möglichkeiten wegfallen, die man ja bereits gezählt hat, denn wenn je ein Kind links steht, ein anderes rechts steht und daher keine weiteren 24 Möglichkeiten mehr bieten kann.

Lösung Übung 2.26

- Es soll ein Blumenstrauß mit 4 verschiedenen Blumen gebunden werden. Für jede Blumenart stehen 3 Farben zur Verfügung.

  Die 4 Wände eines Zimmers sollen gestrichen werden. Dabei können die Wände auch jeweils farblich unterschiedlich ausfallen. Dazu stehen 3 verschiedene Farben zur Verfügung.

- 4 Freundinnen gehen zusammen ins Kino und verteilen sich auf die 4 reservierten Plätze.

  Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Autos auf 4 Parkplätze zu verteilen?

- 8 Freunde wollen zusammen ins Theater. Es gibt aber nur noch 4 Karten.

  Von meinen 8 Lieblings-CDs passen nur 4 in den CD-Wechsler in das Auto. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten habe ich?

Lösung Übung 2.27

a) (1) Überlegen Sie, auf wie viele verschiedene Arten sich die 4 Buchstaben anordnen lassen. Dabei werden Sie wohl auf $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Möglichkeiten gekommen sein. Jedoch lässt sich bei dem Wort SUSI nicht unterscheiden, ob Sie jetzt das erste S oder aber das zweite S benutzt haben. Die Möglichkeiten die zwei S anzuordnen sind $2 \cdot 1 = 2! = 2$. Um diese Möglichkeiten wieder auszuschließen, muss man die Anzahl der gesamten Möglichkeiten durch die Anzahl an Möglichkeiten die doppelten Buchstaben anzuordnen geteilt werden.

Somit ergeben sich bei (1) $\frac{4!}{2!} = 12$ Möglichkeiten.

(2) Analog zu (1): $\frac{5!}{3!} = 10$ Möglichkeiten

(3) Analog zu (1): $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ Möglichkeiten

(4) Analog zu (1): $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34.650$ Möglichkeiten

b) Eine allgemein formulierte Regel könnte lauten: Anzahl aller Möglichkeiten zur Anordnung der Buchstaben/ Anzahl der doppelten Möglichkeiten

c) HOEHLEN, TENDENZ, GENOSSE, IRSINN, ROBOTER, LIMETTE, THEATER…

Lösung Übung 2.28

Eine mögliche Fragestellung wäre:

„Wie viele verschiedene Cover müssten bei 6 Finalistinnen und 3 Siegerinnen gemacht werden?“

Es können 6 von den Frauen als erste in die Band gewählt werden, danach noch 5, dann noch 4.

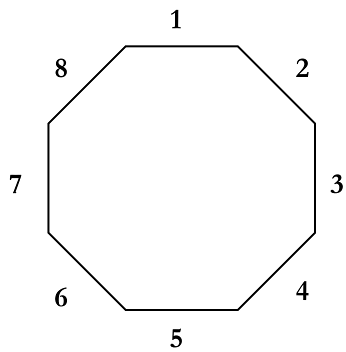
Somit gibt es $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Möglichkeiten.

Betrachten Sie sich nun aber mal wie die 120 Möglichkeiten zustande kommen, dann dürfte Ihnen folgendes auffallen:

Wenn die Auswahl von 3 Frauen ABC heißt, kommen zudem ACB, CAB, CBA, BAC und BCA in der Anzahl der Möglichkeiten vor. Da aber die Reihenfolge wie die Frauen in die Gruppe gewählt wurden unwichtig ist, muss man die Gesamtzahl an Möglichkeiten durch 3! teilen.
Somit mussten $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 24$ Cover erstellt werden.

Lösung Übung 2.29

Zu Beginn mag hier vielleicht eine Skizze hilfreich sein. Dazu nummerieren wir die acht Seiten durch.



Jede Schablone hat 8 Seiten. Die unterste Schablone lässt sich nur auf eine Art hinlegen. Nun gibt es 8 Möglichkeiten, die zweite Schablone darauf zu legen. Also in dem Fall die Reihenfolge $1/1-8$ ergibt somit $1 \cdot 8$ Möglichkeiten bei 2 Schablonen.

Beachtet man jedoch noch, dass sich die Schablone auch auf die andere Seite drehen lässt, so erhöht dies die Möglichkeiten bei 2 Schablonen auf $1 \cdot 16$.

Somit kommen mit jeder weiteren Schablone mal 16 Lagemöglichkeiten hinzu. So ergeben sich insgesamt $1 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16$ also $16^4 = 65.536$ Kombinationen.

Wenn man nun die Reihenfolge wie die Schablonen aufeinanderliegen noch betrachtet, so muss man die Möglichkeiten noch mit $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ multiplizieren.

Somit würden sich $16^4 \cdot 5! = 7.864.320$ Kombinationen ergeben.

Da es aber bei der Durchsicht zur Erzeugung des Häschenbildes nicht auf die Reihenfolge der Schablonen ankommt, kann man dies unberücksichtigt lassen.