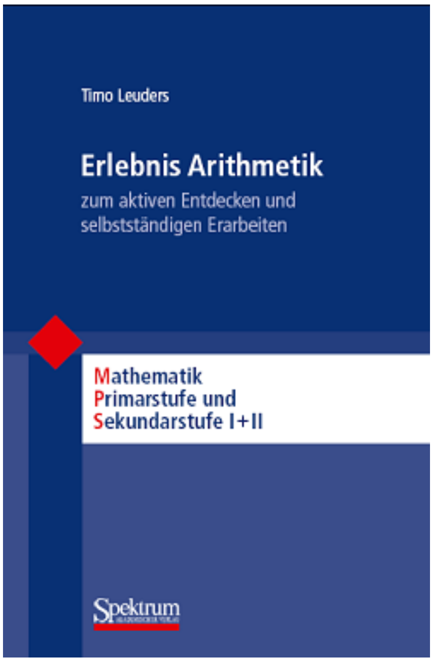


Erkundung 8.2

Lösungsmöglichkeiten:

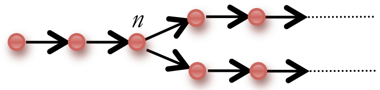
Silja versteht die stabile Reihenfolge der Zahlworte und kann diese auch bis zu einem gewissen Punkt auswendig aufsagen. Diese Reihenfolge ist jedoch nur als Ganzes vorhanden. Um eine Anzahl zu bestimmen, muss Silja die Zahlenreihenfolge also immer von vorne beginnen. Das Kind ist noch nicht in der Lage von einem anderen Zahlwort als Eins weiterzuzählen. Eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zu den zu zählenden Objekten ist nicht möglich da Silja die einzelnen Wörter der Zahlenreihenfolge nicht voneinander trennen kann. Allerdings kennt das Kind einige Ziffern, wie die Eins oder die Acht, ist jedoch nicht in der Lage ohne Abzählen, diese einer Menge zuzuordnen. Auch ist bei Silja jedes Zählen noch an Objekte, wie Hütchen oder Finger gebunden.

Ein nächster Entwicklungsschritt könnte sein, dass das Kind auch von anderen Zahlenworten wie der Eins weiterzählen kann, ums so Größenvergleiche und einfachen Rechnungen, wie die Addition und die Subtraktion effektiver durchführen zu können. Auch wäre nun eine Förderung des Loslösens des Zählens von konkreten Gegenständen nötig. Auch sollte Silja lernen, mit symbolischen Repräsentationen vorstellungsbezogen umzugehen. Diese Fähigkeit wird spätestens dann notwendig, wenn komplexere Rechnungen durchgeführt werden sollen. Weiter müsste Silja auch in der Lage sein, Beziehungen zwischen Zahlen zu erkennen, wie beispielsweise in Zweierschritten zu zählen. Diese Beziehungen könnten dann zu einem effektiveren Zählen und Rechnen genutzt werden. Auch wäre eine Weiterentwicklung des Zahlenbegriffs hinsichtlich dessen notwendig, dass Silja lernt Strukturen in Zahlenbildern zu erkennen, zu nutzen und selbst zu entwickeln. Sie muss lernen Zahlen als Ganzes zu sehen. So muss sie bei der Bestimmung einer Menge nicht die Reihenfolge der Zahlworte durchgehen, sondern kann durch Strukturierungen und sinnvolles Zusammensetzen verschiedener Mengen die Anzahl als Ganzes bestimmen. Um dies zu fördern ist es sinnvoll den Kindern immer wieder verschiedenen Strukturierungen von Mengen zu bieten, beispielsweise die Punktbilder von Würfelaugen. Wichtig hierbei ist es aber auch, Kinder immer wieder eigene sinnvolle Strukturierungen finden zu lassen.

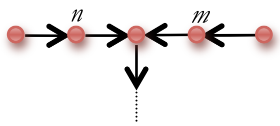
Erkundung 8.4

Lösungsmöglichkeiten:

Die Menge A verstößt gegen das Nachfolgeraxiom: Es gibt einen Nachfolger $\mathcal{N}$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit: $\forall n$: $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{N}(n) \in \mathbb{N}$. Bei dieser Menge lässt sich keine Nachfolgeroperation definieren, da das Element n zwei Nachfolger besitzt.



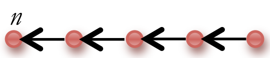
Die Menge B verstößt gegen das Axiom: $\forall n,\ m \in \mathbb{N}: n \neq m \Rightarrow \mathcal{N}(n) \neq \mathcal{N}(m)$: Hier haben also zwei verschiedenen Elemente $n,\ m \in \mathbb{N}$ denselben Nachfolger.



Die Menge C widerspricht dem Axiom: $0 \in \mathbb{N}$. Diese Menge hat also kein kleinstes Element Null. Denn würde hier ein Element als Null bezeichnet werden, so hätte die Null einen Vorgänger, was wiederum Axiom $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{N}(x) \neq 0$ widerspricht.

Die Menge D ist die Menge der natürlichen Zahlen, da sie alle notwendigen Axiome erfüllt.

Die Menge E erfüllt das Axiom $\mathcal{N}$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit: $\forall n$: $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{N}(n) \in \mathbb{N}$ nicht, denn das Element n besitzt keinen Nachfolger.



Lösung 8.6

Beweis:

Schritt 1: Induktionsbehauptung: $\forall\ n \in \mathbb{N}$: A($n$): $\mathcal{N}(n) \neq n$

Schritt 2: Induktionsanker: $n = 0$

A(0): $\mathcal{N}(0) \neq 0$, da $\mathcal{N}(0) = 0+1 = 1$

Schritt 3: Induktionsschritt: A(n)$\Rightarrow$A(n+1)

Zu zeigen ist: A(n+1)$\neq$n+1

$A(n+1) = \mathcal{N}(n+1) = n+1+1 = n+2$

Und damit ist $\mathcal{N}(n+1) \neq n+1$. Dies war zu zeigen.

Lösung 8.7

Behauptung:

$1+1 = 2$

Beweis:

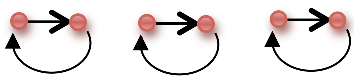
$1 := \mathcal{N}(0)$

$2 := \mathcal{N}(\mathcal{N}(0)) = \mathcal{N}(1) = \mathcal{N}(1+0) = 1 + \mathcal{N}(0) = 1 + 1$

Hiermit kann man nun die 4 so schreiben:

$$4 := \mathcal{N}(\mathcal{N}(\mathcal{N}(\mathcal{N}(0)))) = \mathcal{N}(\mathcal{N}(2)) = \mathcal{N}(\mathcal{N}(2+0)) = \mathcal{N}(2+\mathcal{N}(0))$$
$$= \mathcal{N}(2 + \mathcal{N}(0)) = 2 + \mathcal{N}(\mathcal{N}(0)) = 2+2$$

Lösung 8.8



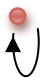
... oder mehr solcher Zweierzykeln.

Wenn (1) und (2) gegeben sind, ist diese Struktur bereits notwendig. (3) gilt in dieser Situation autotmatisch. Man kann dies auch formal beweisen:

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y) \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(y)) \Rightarrow x = y$$

Die zweite Implikation fogt wegen (1). Die Kontraposition hiervon lautet: $x \neq y \Rightarrow \mathcal{F}(x) \neq \mathcal{F}(y)$, damit gilt (3)

(1) und (2) sind allerdings nicht abhängig, denn wenn nur (1) gilt, könnte die Menge auch so aussehen:



Lösung 8.9

Induktive Definition der Multiplikation:

(M1): $m \cdot 1 := m$

(M2): $m \cdot \mathcal{N}(n) := m \cdot n + m$

Damit (M2) ein wenig klarer wird, soll hier ein Beispiel gegeben werden: Ich kann $6 \cdot 8$ berechnen, wenn ich $5 \cdot 8$ berechnen kann. Denn

$\mathcal{N}(5) \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 5$, also $6 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 5$

Beweis der Kommutativität der Multiplikation durch vollständige Induktion (d.h. durch Verwendung des Axioms 5:

Behauptung: $\forall\, n, m \in \mathbb{N}: n \cdot m = m \cdot n$

Den Originalbeweis von Peano findet man unter

https://archive.org/details/arithmeticespri00peangoog

auf S.8 §4, Nr.7. Vielleicht probieren Sie einmal, ihn zu „übersetzen".

Lösung 8.10

Behauptung:

$\forall\, x, y \in \mathrm{M}: (x+y)+n = x+(y+n)$

Beweis:

Dieser Beweis wird mit Hilfe des Induktions-Axiomes (Axiom (5)) bewiesen. Zudem werden die beiden Definitionen der Addition (A1 und A2) benötigt.

(A1) $m+0 := \mathrm{m}$ $\Rightarrow$ Die Null soll also bei der Addition nichts bewirken

(A2) $m + \mathcal{N}(n) := \mathcal{N}(m+n)$ $\Rightarrow$ Das Ergebnis der Additionsaufgabe ($+\,\mathcal{N}(n)$) wird also durch das vorhergehende Ergebnis (+n) der Additionsaufgabe bestimmt.

Für das Induktionsaxiom muss zunächst eine Menge M definiert werden für die das Assoziativgesetz gilt. Dann zeigen wir, dass diese Menge die Voraussetzungen des Induktions-Axiomes

1) $0 \in \mathrm{M}$
2) $\forall n: n \in \mathrm{M}: \mathcal{N}(n) \in M$

erfüllt. Nun können wir daraus folgern, dass M schon $\mathbb{N}$ sein muss und damit das Assoziativgesetz für alle natürlichen Zahlen gelten muss.

Definition der Menge M:

$\mathrm{M} := \{n \in \mathbb{N} : \forall x, y \in \mathbb{N} : (x+y)+n = x+(y+n)\}$

1) $(x+y)+0 = x+(y+0)$
   Da die Null nach (A1) nichts bewirken soll, gilt hier also
   $\mathrm{A}(0)$: $(x+y)+0 = (x+y) = x+y = x+(y+0)$

2) Gezeigt werden soll also:

   $(x+y)+(n+1) = x+[y+(n+1)]$

$(x+y)+(n+1)$ $= [(x+y)+n]+1$, nach Definition (A2)

$= [x+(y+n)]+1$, dieser Schritt darf gemacht werden, da wir das Assoziativgesetz für $n \in \mathrm{M}$ schon annehmen dürfen

$= x+[(y+n+1]$, nach Definition (A2)

$=x+[y+(n+1)]$, nach Definition (A2)

Genau dies war zu zeigen.

Wir haben nun also gezeigt, dass die Menge M die Bedingungen für Axiom 5 erfüllt. Aus diesem Grund muss also M= $\mathbb{N}$ sein und das Assoziativgesetz der Addition für alle natürlichen Zahlen gelten.

Lösung 8.11

Auch für den Induktionsanker $n = 2$ muss die Menge $M := \{n \mid A(n) \text{ wahr}\}$ definiert werden, als die Menge aller *n,* für die die Aussage gilt. Für den Induktionsanker $n=2$ muss nun aber gezeigt werden „A(2) wahr ist", was gleichbedeutend mit der Aussage „$2 \in M$". Zu beachten ist auch, dass die Aussage nun nur für alle natürlichen Zahlen ≥ 2 bewiesen wurde und nicht für die Null und die Eins.

Lösung 8.12

Tatsächlich erfüllt die Menge alle fünf Axiome, stellt also die natürlichen Zahlen dar.
Was uns im ersten Moment stutzig macht, ist, dass die ungeraden Zahlen fehlen. Tatsächlich fehlen sie aber nicht, denn in dieser Menge sind 2, 6, 10 usw.. die ungeraden Zahlen.
Die natürlichen Zahlen haben bei dieser Definition einfach nur andere Namen.