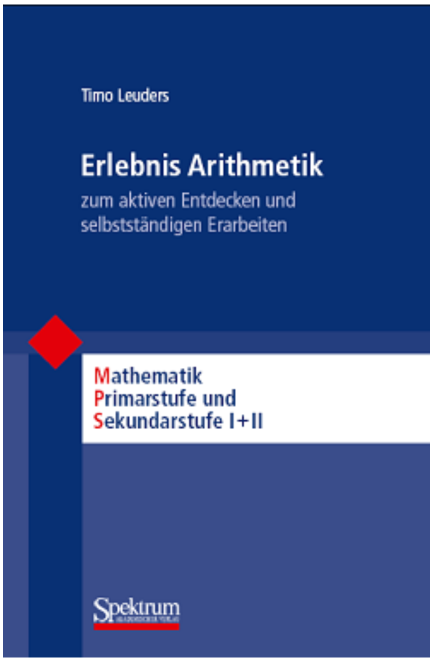

Übung 1.3:

Lösung:

Vorbemerkung: Da die Definition – absichtlich – an einem Beispiel (mit konkreten Zahlen) erfolgte, ist nicht ganz klar, wie sie gemeint ist. Mögliche Interpretationen sind:

- Variante 1: $a \uparrow b = (a+b)b$
- Variante 2: $a \uparrow b = (a+2)b$
- Variante 3: $a \uparrow b = (a+b)2$

In den folgenden Überlegungen soll davon ausgegangen werden, dass Variante 1 gewählt wurde.

Es stellt sich zunächst die Frage nach dem Definitionsbereich, ist $D = \mathbb{R}$ oder nur $D = \mathbb{R}^+$ oder etwa nur $D = \mathbb{N}$?

- Für eine Umkehroperation gilt, dass, wenn diese auf das Ergebnis der Operation angewendet wird, wieder der Ausgangsausdruck dasteht. In unserem Fall gilt also $a \downarrow b = \frac{a}{b} - b$
- Wenn die Operation kommutativ wäre, würde das bedeuten, dass $a \uparrow b = b \uparrow a$ sein müsste. Für die linke Seite gilt:

  $$a \uparrow b = (a+b)b = a \cdot b + b^2$$

  Aus der rechten Seite der Gleichung ergibt sich aber:

  $$b \uparrow a = (b+a)a = b \cdot a + a^2$$

  Damit kann die Operation nicht kommutativ sein.
  (Man hätte hier auch ein konkretes Beispiel mit Zahlen angeben können, denn ein Gegenbeispiel reicht, um eine Aussage zu widerlegen.)

- Analog kann man vorgehen, um zu prüfen, ob die Operation assoziativ ist: Wenn die Operation assoziativ wäre, müsste gelten:

  $$(a \upharpoonleft b) \upharpoonleft c = a \upharpoonleft (b \upharpoonleft c)$$

  Für die linke Seite gilt ausgehend von der Definition der Operation:

  $$\begin{aligned}(a \upharpoonleft b) \upharpoonleft c = [(a + b) \cdot b] \upharpoonleft c = [ab + b^2] \upharpoonleft c = ([ab + b^2] + c) \cdot c \\ = abc + b^2c + c^2\end{aligned}$$

  Für die rechte Seite ergibt sich hingegen:

  $$\begin{aligned}a \upharpoonleft (b \upharpoonleft c) = a \upharpoonleft [(b + c) \cdot c] = a \upharpoonleft [bc + c^2] \\ = (a + [bc + c^2]) \cdot [bc + c^2] \\ = abc + ac^2 + b^2c^2 + bc^3 + bc^3 + c^4\end{aligned}$$

  Damit ist die Operation nicht assoziativ.

Zum Schluss soll geprüft werden, ob es etwas vergleichbares wie eine „Multiplikation“ gibt. Als Zeichen wird $\upharpoonleft\upharpoonleft$ festgelegt. Dazu kann man sich zuerst klarmachen, dass die Multiplikation aus der fortgesetzten Addition entsteht. Entsprechend ist es hilfreich, auch hier zuerst einige Beispiele zu erzeugen:

$$a + a = 2 \cdot a$$

$$a + a + a = 3 \cdot a$$

auf die Abblization angewendet bedeutet das:

$$a \upharpoonleft a = (a + a)a = 2a^2$$

Fügen wir eine weitere Abblization hinzu, ergibt sich

$$a \upharpoonleft a \upharpoonleft a = 2a^2 \upharpoonleft a = (2a^2 + a)a = 2a^3 + a^2$$

für vier Faktoren:

$$a \upharpoonleft a \upharpoonleft a \upharpoonleft a = (2a^3 + a^2) \upharpoonleft a = (2a^3 + a^2 + a)a = 2a^4 + a^3 + a^2$$

Und für fünf Faktoren:

$$a \upharpoonleft a \upharpoonleft a \upharpoonleft a \upharpoonleft a = (2a^4 + a^3 + a^2) \upharpoonleft a = 2a^5 + a^4 + a^3 + a^2$$

Damit kann man vermuten, dass allgemein gilt:

$$n \upharpoonleft\upharpoonleft a = 2a^n + \sum_{i=3}^{n} a^{i-1}$$