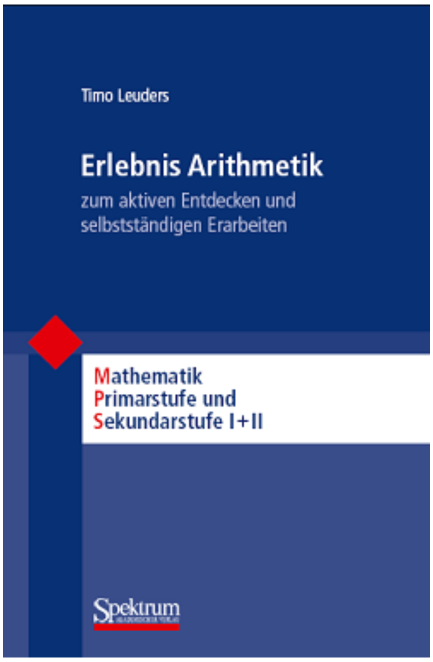


Übung 5.3:

Lösungsmöglichkeit:

1) Pyramidenzahl:

   Schritt 1: Induktionsbehauptung: $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $A(n)$

   $A(n)$: $p_n=1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

   Schritt 2: Induktionsanker: $n=1$

   $A(1): 1=1^2$ ✓

   Schritt 3: Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

   $A(n+1)$: $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$

   $\underbrace{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}_{n^2}+2n+1=(n+1)^2$

   $+2n+1=n^2+2n+1$

2) Kettenreaktion:

   Schritt 1: Induktionsbehauptung: $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $A(n)$

   $A(n)$: $k_n=2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

   Schritt 2: Induktionsanker: $n=1$

   $A(1): 2^0=2^1-1$ ✓

   Schritt 3: Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

   $A(n+1)$: $2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}+2^{n+1-1}=2^{n+1}-1$

   $\underbrace{2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}}_{2^n-1}+2^{n+1-1}=2^{n+1}-1$

   $+2^n \quad =2\cdot 2^n-1$

*

Übung 5.5:

Lösungsmöglichkeit:

Beispiele:

$s_1=1$

$s_2=4$

$s_3=13$

$s_4=40$

$s_5=121$

Allgemein:

$$s_n=1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{3-1}$$

*

Übung 5.7:

Lösungsmöglichkeit:

a) Die letzte Zahl, die noch ein ungestrichenes Vielfaches unter 100 besitzt ist die Sieben.

b) Wenn man die Primzahlen bis 1000 finden möchte, so ist die letzte Zahl deren Vielfachen man streichen muss die 97. Die 98 und die 100 wurde schon beim Streichen der Vielfachen von Zwei gestrichen und die 99 beim Streichen der Vielfachen von Drei. Alle Zahlen $p>100$ haben einen Komplementärteiler q, mit $q<100$ und wurden somit schon beim Streichen der Komplementärteiler aussortiert.

c) Werden die Primzahlen bis n gesucht, so reicht es alle Primzahlen $p\leq\sqrt{n}$. Alle Zahlen, die größer $\sqrt{n}$ sind haben einen Komplementärteiler $q\leq\sqrt{n}$ und wurden somit schon als Vielfache gestrichen.

*

Übung 5.8:

Lösungsmöglichkeit:

- Jede zweite Spalte enthält keine Primzahlen, da hier alle Vielfachen von Zwei stehen, also Zahlen der Form $2\cdot n$, mit $n\in\mathbb{N}$.

- Jede fünfte Spalte enthält keine Primzahlen, da hier alle Vielfachen von Fünfstehen, also Zahlen der Form $5\cdot n$, mit $n \in \mathbb{N}$.
- Zwei Primzahlen, die genau hintereinander stehen gibt es nur einmal (2, 3). Der Grund hierfür ist, das die Zahl Zwei die einzige gerade Primzahl ist. Da jede zweite Zahl gerade ist, also ein Vielfaches von Zwei ist, existieren keine weiteren solcher direkt benachbarten Primzahlen. Aus dem gleichen Grund können auch keine drei Primzahlen direkt benachbart sein.
- Allerdings gibt es in unregelmäßigen Abständen Primzahlzwillinge. Primzahlzwillinge sind Primzahlen, zwischen denen sich nur eine Nicht-Primzahl befindet, also Primzahlen der Form $(n, n+2)$, mit $n \in \mathbb{N}$.

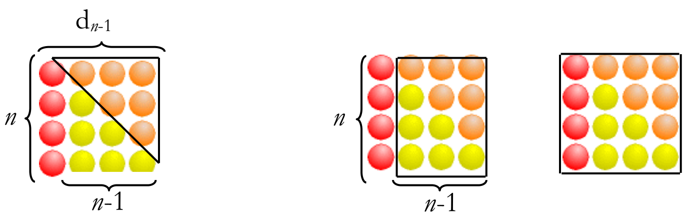
*

Übung 5.10:

Lösungsmöglichkeit:

a) Erklären Sie die Formel anhand des Bildes.

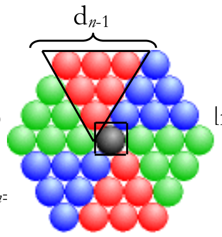
$$q_n = n + 2\cdot d_{n-1} \quad = \quad n + (n-1)\cdot n \quad = \quad n^2$$

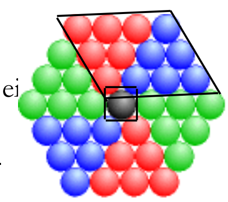


b) Finden Sie mit Hilfe der Figuren eine Formel für die Hexagonalzahlen h_n.

$$h_n = 6\cdot d_{n-1}+1 \quad = \quad 1+3\cdot n\cdot(n-1)$$

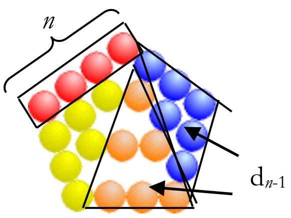
Die Raute kann mit Hilfe einer Scherung in ein Rechteck der Flächeninhaltsformel $n\cdot(n-1)$ überführt werden.





c) lfe der Figur ei

$p_n = n+3\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

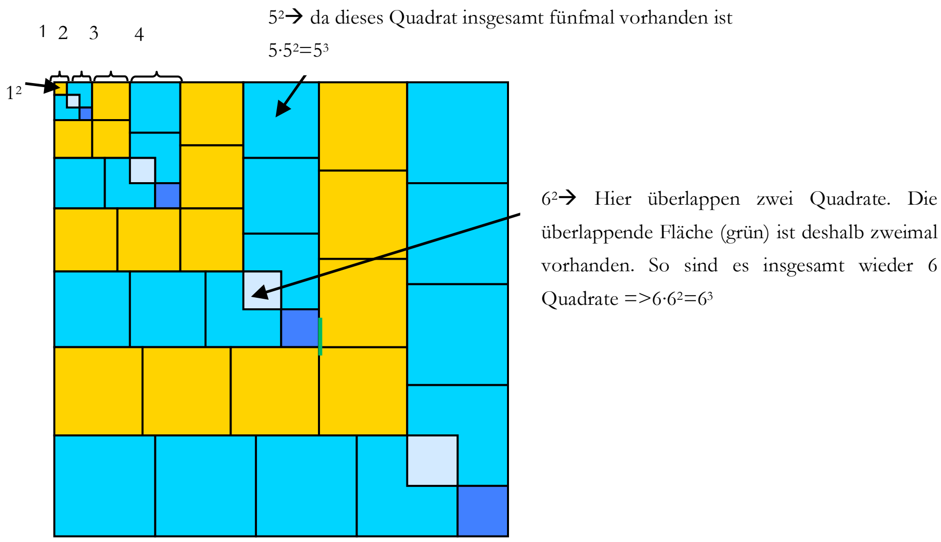


*

Übung 5.11:

Lösungsmöglichkeit:

a)



Die linke Seite der Gleichung zeigt also die einzelnen Quadrate. Die rechte Seite der Gleichung steht für das große Quadrat insgesamt.

b)

Schritt 1: Induktionsbehauptung: $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $A(n)$

$A(n)$: $1^3+2^3+3^3+\ldots n^3=(1+2+3+\ldots n)^2$

Schritt 2: Induktionsanker: $n=1$
$A(1): 1^3=1^2$ ✓

Schritt 3: Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$\underbrace{1^3+2^3+3^3+\ldots n^3}+(n+1)^3=(1+2+3+\ldots+n+(n+1))^2$$

$$\underbrace{(1+2+3+\ldots n)^2}_{(d_n)^2}+(n+1)^3=(\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{d_n}+(n+1))^2$$

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)+(n+1)\right)^2$$

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\cdot(n+1)+(n+1)^2$$

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+n\cdot(n+1)\cdot(n+1)+(n+1)^2$$

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+n\cdot(n+1)^2+(n+1)^2$$

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)(n+1)^2$$

$$\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

*

Übung 5.12:

Lösungsmöglichkeit:

Der Induktionsschritt funktioniert nicht, wenn man von n=1 auf n=2 schließen will. Man könnte versuchen, den Anker erst bei n=2 zu setzen, aber das wäre ja die Behauptung, dass zwei Elefanten immer gleich sind, was man nicht zeigen kann.

Übung 5.13:

Lösungsmöglichkeit:

c) Die größte Anzahl an Primzahlen, die in ein 2×2-Fenster passen, sind drei Primzahlen. Hier ist auch nur eine Positionierung des Fensters möglich (siehe Graphik). Es gibt nur einen Fall, bei dem zwei Primzahlen direkt nebeneinander stehen (2,3). Zusammen mit der Zahl 13 sind es dann drei Primzahlen. Das ist auch die größtmögliche Anzahl von Primzahlen, die in ein 2×2-Fenster passen. Vier Primzahlen wären nicht möglich. Es müssten dann zwei Paare von Primzahlen existieren, die direkt nebeneinander stehen. Da von zwei direkt benachbarten Zahlen jedoch immer eine gerade ist (Primzahlen könne ja nie gerade sein) ist dies nur in dem Sonderfall (2,3) möglich.
Die größte Anzahl an Primzahlen, die in ein 3×3-Fenster passen, sind fünf Primzahlen. Dieses Fenster beinhaltet abermals das besondere Primzahlpaar (2,3). Zudem muss das Fenster so gelegt werden, dass es zwei Spalten enthält mit ungerade Zahlen, denn nur hier können sich überhaupt Primzahlen befinden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

*

Übung 5.14:

Lösungsmöglichkeit:

a) Das einzige direkt benachbarte Paar von Primzahlen sind die Primzahlen Zwei und die Drei. Ein weiteres direkt benachbartes Paar existiert nicht, da nun jede zweite Zahl einVielfaches der Primzahl 2 ist und somit selbst keine Primzahl mehr sein kann.

   Beispiele für Primzahlzwillinge:
   (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (191, 193), (197, 199), (227, 229), … Ob es davon unendlich viele gibt, ist bis heute nicht bewiesen.

b) und c)

Nach der Definition (n, n+2, n+4) ist der einzige Primzahldrilling die Zahlen folge (3, 5, 7). Es gibt nur diesen einzigen Drilling, da von drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer eine durch drei teilbar ist. Um mehr Drillinge zu erhalten, werden Primzahldrillinge oft folgendermaßen definiert: Primzahldrillinge sind Triplets der Form (n, n+2, n+6) oder (n, n+2, n+6). Nach dieser Definition können viele solcher Drillinge gefunden werden.
Beispiele für Primzahldrillinge: (5, 7, 11), (7, 11, 13), (11, 13, 17), (13, 17, 19), (17, 19, 23), (37, 41, 43), (41, 43, 47), (67, 71, 73), …

*

Übung 5.15:

Lösungsmöglichkeit:

a) Monika könnte 29 Jahre alt. Das letzte Mal war Monika somit mit 23 Jahren eine Primzahl, also vor 6 Jahren.

b)

- Paul feiert heute einen „Pimzahlgeburtstag". Er stellt mit Bedauern fest, dass er nun sechs lange Jahre warten, bis er wieder einen „Primzahl" ist. Glücklicherweise muss er dann nur noch zwei Jahre warten, bis er wieder einen „Primzahlgeburtstag" feiern kann. Wie alt ist Paul?

  Lösungsmöglichkeit: Paul könnte 23 Jahre alt sein.

- Oskar hatte dieses Jahr einen „runden" Geburtstag. Er freut sich schon auf sein nächstes Jahrzehnt. In diesem kommenden Jahrzehnt kann er nämlich vier „Primzahlgeburtstage" feiern. Wie alt ist Oskar?

  Lösungsmöglichkeit: Oskar könnte 10 Jahre alt sein.

*

Übung 5.16:

Lösungsmöglichkeit:

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

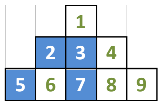
Alle Primzahlen scheinen sich diagonal verlaufenden Linien zu befinden.

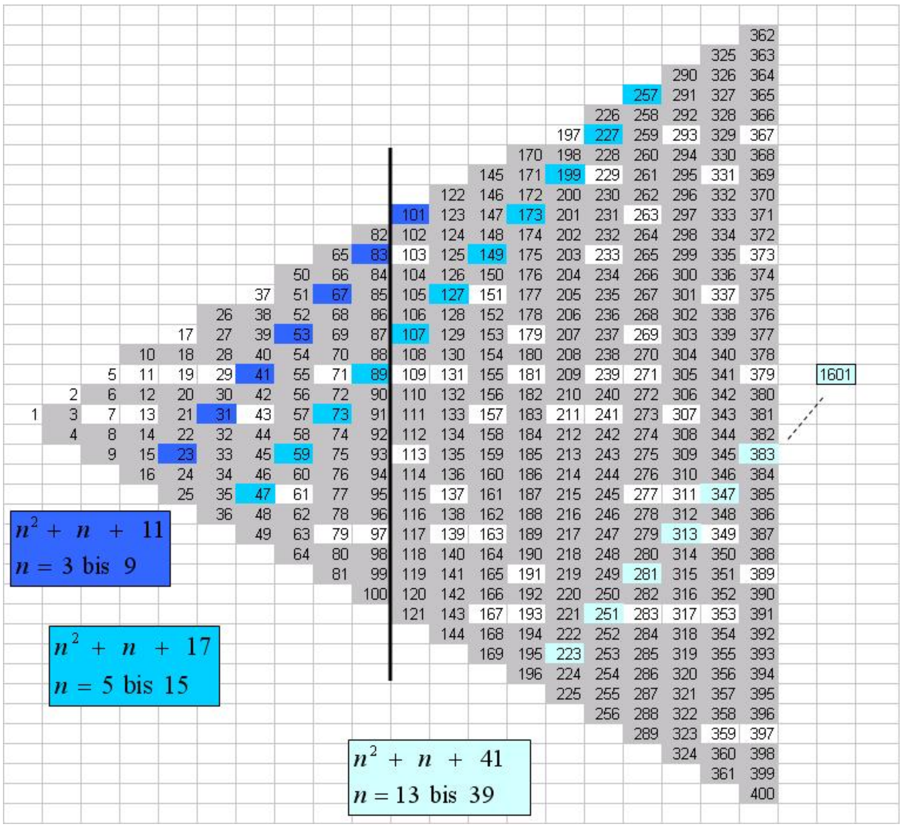
Viele interssante Beobachtungen an Ulams Spirale können Sie hier finden:

http://de.wikipedia.org/wiki/Ulam-Spirale

*

Übung 5.17:





Es liegen einzelne Gruppen von Primzahlen auf Geraden. Interessanterweise sind die Zahlen genau dann nicht mehr prim, wenn die Gerade die obere Treppe verlässt. Das ist auch nicht verwunderlich, wenn man die unteren Treppenzahlen betrachtet. Bedingt durch die Anordnung findet man auf der unteren Treppenstufe der n-ten Spalte gerade die n-te Quadratzahl. Die Quadratzahlen 121, 289 und 1681 wären die nächsten Zahlen auf den Geraden und diese sind natürlich nicht mehr prim. Stöbert man etwas weiter, so stellt man fest, dass die Primzahlen auf den Geraden zu den drei bekannten ‚Primzahlformeln' $n^2 + n + c$ mit $c = 11, 17, 41$ gehören. Auch diese produzieren nur Primzahlen bis $n < c$-1. Die Anordnung veranschaulicht dieses auf interessante Weise. Das Muster stellt eine große Spielwiese für weitere Fragestellungen dar: Für welche Parameter stellt die Gleichung $ax^2 + bx + c$ eine Gerade dar? Ist jede Gerade eine solche Gleichung? Wie lautet eine Übertragung in das Dreidimensionale (n-Dimensionale)? Wie hängt die Darstellung mit den Geraden in der Ulam-Spirale zusammen?

*

Übung 5.18: Ein „geometrischer Eratosthenes“

Lösungsmöglichkeit:

Bei einer Geraden zwischen zwei Punkten (a | a^2) und (-b | b^2) und der Gleichung y = mx+c kann man die Parameter m und c durch diese beiden Glechungen ermitteln:

$$a^2 = ma + c$$

$$b^2 = m(-b) + c$$

Daras folgt:

$$(a^2-b^2) = m(a+b)$$

$$(a-b) = m$$

Daraus folgt

$$c = a^2 – (a-b)a = ab$$

Eine Gerade kreuzt also immer beim Produkt von a und b

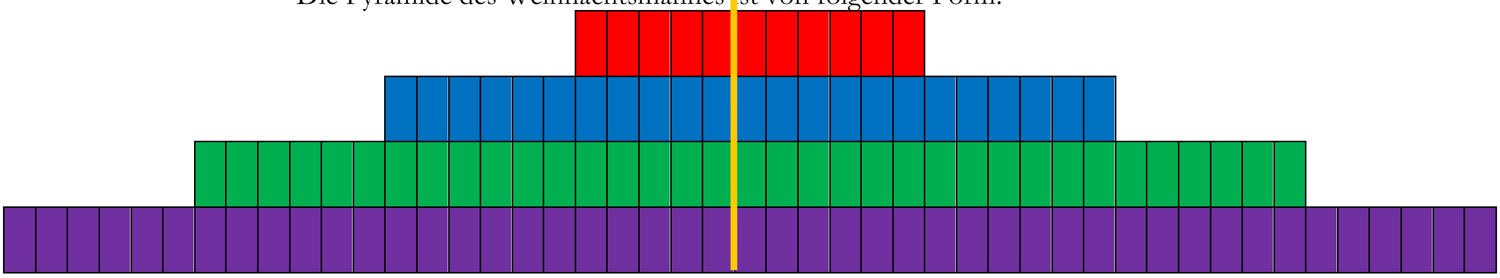
Da a und b beliebige natürliche Zahlen sind, werden alle zusammengesetzten Zahlen gestrichen und alle Primzahlen bleiben übrig

*

Übung 5.19[1]:.

Lösungsmöglichkeit:

Die Pyramide des Weihnachtsmannes ist von folgender Form:



Hat die Pyramide wie in der Abbildung vier Stufen, so besteht sie aus (1·12)+(1·12+2·6)+(1·12+2·6+2·6)+(1·12+2·6+2·6+2·6)+(1·12+2·6+2·6+2·6 +2·6)=1·12+2·12+3·12+4·12 Paketen. Hat die Pyramide allgemein n Stufen, so besteht sie aus 1·12+2·12+3·12+4·12+…+n·12 Stufen.

[1] nach Leufer, Mayer und Meyer, PM Heft 18, 2007

Gibt es eine gerechte Verteilung der Geschenke für den Norden und den Süden, so kommen bei jeder Stufe $6 \cdot a$ Geschenke hinzu. Durch die Verschiebung des goldenen Stockes durch den hinterlistigen Elfen, kommen nun für den Norden bei jeder Stufe $6 \cdot a+1$ Geschenke hinzu und für die armen Menschen des Südens nur $6 \cdot a-1$ Geschenke. Die bei der Veränderung des Stockes entstehenden Folgen sind also $6 \cdot a+1$ und $6 \cdot a-1$. Diese haben den primzahlaffinen Weihnachtsmann so glücklich gemacht, da alle Primzahlen entweder die Form $p = 6 \cdot a+1$ oder $p = 6 \cdot a-1$ haben.