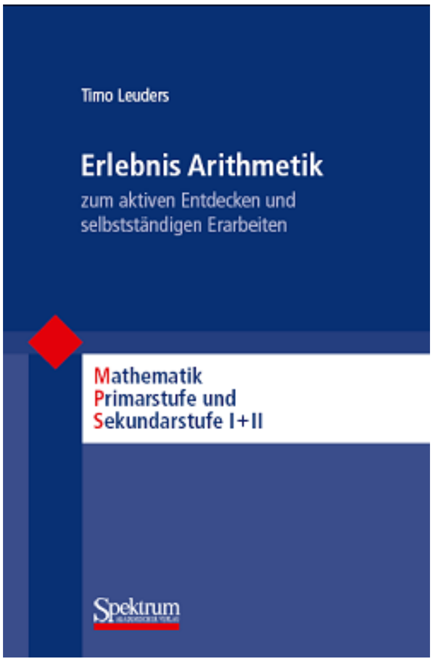


Kapitel 4: Hinweise und Lösungen

Erkundung 4.1 / 4.1a

Lösungshinweise:

Probieren Sie verschiedene Interpretationen: Zerlegen in gleiche Summanden, in zwei oder drei Summanden, in verschiedene Summanden. Die Summanden können ganze Zahlen sein, man kann aber auch einmal probieren, was passiert, wenn man negative Zahlen, die Null oder Brüche zulässt.

Natürlich kann man auch in Faktoren zerlegen. Auch hier kann man wieder verschiedene Bedingungen durchprobieren.

Je nach Interpretation kann die Fragestellung unsinnig, trivial oder sehr spannend werden. Suchen Sie sich eine Interpretation aus, bei der es keine naheliegende Lösung gibt.

*

Erkundung 4.2

Lösungsbeispiele:

Teiler von 12	1,2,3,4,6,12	6 Teiler
Teiler von 17	1,17	2 Teiler
Teiler von 20	1,2,4,5,10,20	6 Teiler
Teiler von 60	1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60	12 Teiler

Besonders große Teileranzahlen haben 24, 30, 48, 60. Bei sehr großen Zahlen werden die Stückchen allerdings zu klein. Aus rein mathematischen Gründen ist es schwierig zu sagen, wann eine Lösung „optimal“ ist.

Bei der Suche nach mathematischen Aussagen können sie probieren, verschiedene Fragen stellen: „Wie viele…?“, „Wann ist….?“, „Ist das immer so….?“, „Für welche….?“. Sie können nach besonders einfachen, oder nach komplizierten Fällen suchen. Gibt es Sonderfälle? Gibt es Regelmäßigkeiten, Muster, Strukturen?

*

Erkundung 4.3:

Lösungen:

1. Die 1 zwar die 1 und sich selbst als Teiler, aber sie hat nur 1 Teiler. Reparieren könnte man so: „Jede natürlich Zahl größer 1…“ oder „Jede natürlich Zahl hat als Teiler auf jeden Fall 1 und sich selbst“.
2. 16 hat eine 15 Teiler, also eine ungerade Zahl. Dasselbe passiert bei allen Quadratzahlen. Reparieren könnte man das so: Jede Quadratzahl hat eine ungerade Anzahl von Teilern, jede Nicht-Quadratzahl hat eine gerade Anzahl von Teilern.

*

Erkundung 4.4:

Lösungsbeispiele:

Einige verbale Begründungen könnten wie folgt lauten. Allerdings kommt man so in jedem Fall zu unterschiedlichen Antworten!

„0 passt unendlich oft in die Fünf“ „0 kann man noch so oft nehmen, es ist wird nie 5“, „Die 5 kann man nicht in 0 aufteilen“, „Die 5 kann man auf 0 Personen aufteilen, dann bekommt keiner bzw. jeder 0“, „5:0 darf man nicht, aber warum?“

„5 ist kleiner als 0, kann also nicht hineinpassen“, „5 passt 0 mal in die 0“, „Wenn man 0 auf 5 Personen aufteilt, bekommt jeder 0“, „0:5 = 0“

„0 passt einmal in 0“, „Wenn man 0 auf 0 Personen aufteilt, bekommt jeder 0“, „0:0 darf man nicht, oder doch?“, „0:0=1, weil für alle Zahlen gilt x:x=1“, „0 ist nichts und man kann sie nicht verteilen, auch nicht auf 0 Personen“

*

Erkundung 4.5:

Lösungsbeispiele:

- 3 teilt 120, weil $120 = 3\cdot 40$
- $1 \mid 3$, weil $3 = 3\cdot 1$.
  3 ist kein Teiler von 1, weil $1 = 3\cdot x$ für keine natürliche Zahl x lösbar ist
- 0 ist kein Teiler von 3, weil $3 = 0\cdot x$ für keine natürliche Zahl x lösbar ist
- $3 \mid 0$, weil $0 = 3\cdot 0$.
  0 ist ein Teiler von 0, weil $0 = 0\cdot 0$ (auch $0 = 0\cdot 10$ wäre eine Begründung)

*

Erkundung 4.6:

Lösungsbeispiele:

- Teiler von x^5: 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5
  Teiler von 2x+2: 1, 2, x+1, 2x+2
  Teiler von x^2+2x+1: 1, (x+1), x^2+2x+1
  Teiler von $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$: 1, (x+1), $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(x+1)^4$
- Genau die Polynome der Form $a_nx^n + \ldots + a_1x$, also Polynome, bei denen der konstante Term $a_0=0$ ist, haben x als Teiler.
- Keinen Teiler außer 1 und sich selbst haben:
  - Alle Zahlen 1,2,3,5,… die keinen weiteren Teiler haben - diese sind ja auch Elemente der Polynome.
  - Das Polynom x (aber nicht seine Potenzen, denn $x^2 = x \cdot x$)
  - Quadratische Polynome wie x^2+1, wenn sie nicht in Linearfaktoren mit natürlichen Zahlen zerlegbar sind, also z.B. nicht $x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$. Die Polynome dürfen keinen Koeffizienten ≠1 vor der höchsten Potenz von x haben.
  - Auch dazu gehören Polynome wie x^2+3x+1, weil es nicht als (x+a)(x+b) mit *natürlichen* a und b zu zerlegen ist. Im Raum R[x], also bei Polynomen mit reellen Koeffizienten, sähe schon wieder anders aus.

*

Übung 4.7:

Lösungshinweise:

Gewinnen Sie eine Übersicht mithilfe von Beispielen. Da es keine anschauliche Begründung für Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$ gibt, muss man jeweils die Definition nutzen, um sich abzusichern:

- $3 \mid -12$, weil $-12 = (-4)\cdot 3$
- $-3 \mid -12$, weil $-12 = 4\cdot(-3)$
- $-3 \mid 12$, weil $12 = (-4)\cdot(-3)$

Es scheint allgemein zu gelten:

- $\pm a \mid \pm b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $a \mid b$

oder anders formuliert:

- $a \mid b$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn in $\mathbb{N}$ gilt $|a| \,\big|\, |b|$

*

Erkundung 4.8:

Lösungshinweise:

Prüfen Sie einzelne Zahlen drauf, ob sie Primzahlen sind, indem Sie sie einzeln streng nach jeder der drei Definitionen anschauen.

Lösungsbeispiele:

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, …

Definition A: *die keine natürlichen Teiler außer 1 und sich selbst hat*
Definition B: *die höchstens 2 Teiler hat.*
Definition C: *die genau zwei natürliche Teiler hat.*

Definition A und B sind gleichwertig.
Die 0 hat alle Zahlen als Teiler, ist also nach Definition keine Primzahl.
Nach Definition A und B ist 1 eine Primzahl, nach Definition C nicht.

*

Übung 4.9:

In Erkundung 4.6c) wurden schon die Primzahlen aus $\mathbb{N}[x]$ nach Definition A beschrieben: Zu den „Primzahlpolynomen" gehören u.a.:

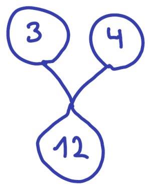
- Die Primzahlen: 2, 3, 5, …, nach Definition A und B auch die 1
- Das Polynom x, das nur die Teiler 1 und x hat
- Quadratische Polynome wie x^2+1 und Polynome höheren Grades, wenn sie nicht in Linearfaktoren mit natürlichen Zahlen zerlegbar sind

Ganz anders wird die Situation, wenn Sie die Definitionen in $\mathbb{Z}$ ausprobieren. Dann ist z.B. $2 = (-2)\cdot(-1)$ nach keiner Definition mehr Primzahl. Will man hier sinnvoll weiter kommen, muss man bei Definitionen die Teiler 1 und -1 als triviale Teiler, die immer gehen, ignorieren.

*

Erkundung 4.10:

Lösungshinweise:



Untersuchen Sie erst einmal eine ganze Reihe von Bäumchen, die sie miteinander vergleichen können.

Versuchen Sie auch einmal, möglichst viele verschiedene Bäumchen mit derselben Zahl in der Wurzel zu erzeugen. Wie viele verschiedene gelingen Ihnen? Worin unterscheiden sich die Bäumchen, worin sind sie gleich?

Versuchen Sie, Bäumchen zu erzeugen, die in ihrer Struktur gleich sind, obwohl sie verschiedene Zahlen in der Wurzel haben. Worin gleichen sich die Wurzelzahlen?

Wie unterscheidet sich die Aufgabe, je nachdem, ob auch Blätter mit 1 zugelassen sind oder nicht? Was hat das mit der noch ungeklärten Frage zu tun, ob 1 eine Primzahl ist oder nicht?

Lösungsmöglichkeiten:

- Das Wachsen der Bäume kann man natürlich auch durch eine rein symbolische Schreibweise darstellen, bei der man schrittweise in Faktoren zerlegt:
  $120 = 30\cdot4 = 6\cdot5\cdot2\cdot2 = 3\cdot2\cdot5\cdot2\cdot2$
- Die Bäumchen wachsen nicht bis in den Himmel – jedenfalls wenn man eine Verzeigung der Form $5=5\cdot1$ nicht zulässt. Wenn man sie *doch* zulässt, wuchert es ohne Ende. In diesem Urwald gibt es allerdings nicht viel Spannendes zu entdecken.
- Zerlegt man immer nur in echte Teiler (5 und 1 fasst man nicht als „echte" Teiler von 5 auf, sondern nennt sie „triviale" Teiler), so stehen in den Blättern, also den letzten Enden der Bäume, nur noch Primzahlen.

- Bei manchen Zwiebeln kann es ganz unterschiedliche Bäume geben, je nach Zerlegung z.B. $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 6$. Am Ende sehen die Bäume eventuell ganz verschieden aus, aber die Anzahl der Blätter ist *gleich*.
- Man kann sogar sagen: Egal, wie ein Baum wuchert, am Ende haben alle Bäume mit derselben Zahl an der Wurzel, gleich viele 2er-Blätter, gleich viele 3er-Blätter usw.

*

Übung 4.11:

Wie in ℕ kann man auch in ℕ[x] Zahlen immer weiter in Faktoren zerlegen, bis man auf Primfaktoren stößt. Auf diese Weise erhält man eine Primfaktorzerlegung, auch wenn das sehr mühselig sein kann, da man dafür Linearfaktoren von Polynomen finden muss.

Beispiel: $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = 2(x+1)(x^2+1)$

Ist die Zerlegung auch eindeutig? Gilt der Fundamentalsatz der Arithmetik auch für Polynome? Dass das schon in ℕ keine triviale Behauptung ist, zeigt der komplexe Beweis. Man kann versuchen, ihn Zeile für Zeile auf Polynome zu übertragen.

Beweis: Wir nehmen an, die PFZ sei nicht eindeutig.

Dann gibt es mindestens ein $n \in \mathbb{N}[x]$, für das es mindestens zwei verschiedene vollständige Zerlegungen in Primfaktoren gibt.

> Achtung: n ist jetzt keine natürliche Zahl mehr, sondern ein Polynom, z.B. x^5+2x^2+4, für das angenommen wird, es gebe zwei verschiedene Zerlegungen.

Nehmen wir von diesen $n \in \mathbb{N}[x]$ das kleinste.

> Was aber ist das „kleinste" Polynom? Bei den natürlichen Zahlen gab es eine „natürliche" Ordnung: 1<2<3<4<…. Wie aber ist es bei Polynomen? Hier müssen wir eine sinnvolle Anordnung definieren, und zwar möglichst so, dass der Beweis des Hauptsatzes weiterhin funktioniert. Die Idee nach „kleinsten" Elementen zu suchen, hängt natürlich damit zusammen, dass die Elemente bei Zerlegung immer kleiner werden. Das funktioniert auch bei Polynomen, wenn man die Anordnung nach Größe für Polynome beispielsweise so definiert: $5x^5 > 3x^5$ und $x^5 > x^4$, aber auch $x^2 > 10x$. Es bleibt noch festzulegen, wie man z.B. $x^5 + 3x + 10$ und $x^5 + 2x^2$ in Beziehung setzt. Probieren Sie auf der Basis dieser Ideen eine allgemeine Festlegung für die Relation „<" in ℕ[x]. Diese sollte sich möglichst so, wie „<" in ℕ verhalten. Z.B. sollte gelten: $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$. Oder: $a<b \Rightarrow a+c<b+c$.

und schreiben zwei verschiedene vollständige PFZ von n auf:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdots q_m \qquad (1)$$

Wenn nun eines der p mit einem der q identisch wäre, z.B. $p_i = q_j$, dann könnte man diese Gleichung durch dieses Polynom teilen und hätte zwei verschiedene PFZ für das Polynom $n:p_i = n:q_j$. Das steht im Widerspruch zur Annahme, dass n das kleinste Polynom mit zwei verschiedenen PFZ ist.

> Dieses Argument setzt voraus, dass bei der Zerlegung von Polynomen die beiden Bestandteile „kleiner" sind, als das Original. Sie sollten also prüfen, ob die Definition für „<" auch in ℕ[x] die Eigenschaft hat: $a = b \cdot c \Rightarrow a \geq b$ und $a \geq c$.

Das bedeutet, *keines* der q_i ist mit einem der p_j identisch.

Wir haben jetzt gezeigt, dass für die PFZ des gewählten n insbesondere gilt:

$$p_1 \mid n, \text{ d.h. } p_1 \mid q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m, \text{ aber } p_1 \neq q_i \text{ für } i = 1,\ldots, m \qquad (2)$$

Zu dem gefundenen kleinsten n bilden wir ein neues Polynom n'.

$$n' = n - p_1 \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) \qquad (3)$$

Dabei gilt o.B.d.A., dass $p_1 < q_1$.

Es gilt $n' < n$ und man kann n' gemäß Gleichung (1) auf zwei Weisen schreiben:

$$n' = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_k - p_1 \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) \qquad = p_1 \cdot (p_2 \cdot \ldots p_k - q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) \qquad (4)$$

und

$$n' = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m - p_1 \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) \qquad = (q_1 - p_1) \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) \qquad (5)$$

In der Form (4) kann man den zweiten Faktor $(p_2 \cdot \ldots p_k - q_2 \cdot \ldots q_m)$ wieder weiter in Primfaktoren zerlegen. Man erhält also eine PFZ von n', die den Faktor p_1 enthält.

In der Form (5) kann man den ersten Faktor $(q_1 - p_1)$ wieder in Primfaktoren zerlegen. Diese PFZ enthält allerdings nicht den Faktor p_1, denn wenn p_1 die Zahl $(q_1 - p_1)$ teilen würde, müsste p_1 ja auch q_1 teilen. Das geht bei Primzahlen nur, wenn sie gleich sind, aber wir hatten weiter oben ausgeschlossen, dass von den q_i und p_j zwei gleich sind.

> Auch hier wäre zu prüfen, ob dieses Argument auch für Polynome gilt: $p_1 \mid (q_1 - p_1) \Rightarrow p_1 \mid q_1$. Diese Aussage lässt sich aus der allgemeinen Definition von „Teilen“ und den Rechenregeln (vor allem dem Distributivgesetzt) herleiten. Beides gilt in $\mathbb{N}[x]$ ebenso wie in $\mathbb{N}$.

Auch der zweite Faktor in (5) $(q_2 \cdot \ldots \cdot q_m)$ enthält entsprechend kein p_1.

Die Zahl n' besitzt also eine PFZ, die einen Faktor p_1 enthält (aus (4) gewonnen) und eine PFZ, die kein p_1 enthält (aus (5) gewonnen). Außerdem ist sie kleiner als n und damit ist n *nicht* die kleinste Zahl mit mehrdeutiger PFZ. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, es könne überhaupt ein Polynom mit mehrdeutiger PFZ geben, womit der Beweis abgeschlossen ist.

*

Übung 4.12:

Die Menge $\mathbb{H} = \{4n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen:

$$(4n+1)(4m+1) = 16mn+4n+4m+1 = 4(4mn+m+n)+1 = 4k+1$$

Um eine Übersicht über die besondere Multiplikationsstruktur zu bekommen, kann man versuchen, die die ersten Zahlen auf mögliche Zerlegungen zu untersuchen und umgekehrt dazu einige Produkte zu berechnen.

Die kleinsten Zahlen, die man durch Multiplikation erzielen kann sind (abgesehen von den Produkten mit 1):

$5 \cdot 5 = 25 \qquad 5 \cdot 9 = 45 \qquad 5 \cdot 13 = 65 \qquad 9 \cdot 9 = 81 \qquad 9 \cdot 13 = 117$

Es gibt also nur vier Zahlen unter 100, die mehr als nur die trivialen Teiler 1 und sich selbst besitzen. Alle anderen Zahlen, also

{ 5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, 49, 53, 57, 61, 65, 67, 71, 75, 79, 83, ...}

besitzen nur zwei Teiler in ℍ. Die 1 besitzt, wie auch in ℕ nur 1 Teiler und ist wie dort auch als Primfaktor auch ungeeignet, weil man mit ihr beliebig multiplizieren kann. Es gibt in ℍ also sehr viele Primzahlen und nur sehr wenige zusammengesetzte Zahlen.

Die Rechnung $441 = 21 \cdot 21 = 9 \cdot 49$ enthält tatsächlich nur Elemente aus ℍ. Wie eben gesehen sind, 21, 9 und 49 in ℍ auch nicht weiter zerlegbar, also ist sowohl $21 \cdot 21$ als auch $9 \cdot 49$ eine Primfaktorzerlegung von 441.

Das Beispiel zeigt, dass es Räume gibt, in denen man sehr wohl Primzahlen und Zerlegungen in Primzahlen finden kann, dass aber eine solche Zerlegung durchaus nicht eindeutig sein muss. Das ist ein Privileg von Räumen wie ℕ oder ℕ[x], wie wir bewiesen haben - und übrigens auch noch anderen Räumen.

Nun könnte man noch nachfragen, warum der Beweis der Eindeutigkeit der PFZ in ℍ nicht funktioniert. Auch in ℍ kann man die Elemente der Größe nach Ordnen und bei der Primfaktorzerlegung werden sie immer kleiner. Dennoch können sie ganz offensichtlich auf verschiedene Weisen kleiner werden. Wenn Sie den Beweis durchgehen, werden Sie auf diese Stelle treffen:

$$n' = n - p_1 \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m)$$

Hier wird aus zwei Zerlegungen einer Zahl n eine kleinere Zahl n' konstruiert, von der dann gezeigt wird, dass sie auch zwei Zerlegungen besitzt. Dieses Verfahren ist in ℍ nicht anwendbar, weil man in ℍ nicht Addieren oder Subtrahieren kann. Zu zwei Elementen wie 5 und 9 aus ℍ ist beispielsweise die Summe 5+9=14 oder die Differenz 9-5=4 nicht mehr Element von ℍ. Um die Eindeutigkeit der PFZ zu beweisen, braucht man also einen Zahlenraum, in dem man Multiplizieren *und* Addieren kann.

Nun könnte man auf die schlaue Idee kommen, und eine „Ersatzaddition" definieren, die lautet $(4m+1)\oplus(4n+1)=(4mn+1)$. Dann wäre $5\oplus9=13$ und $9\ominus5=5$. Dann aber scheitert der Beweis spätesten bei:

$$n' = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_k \ominus p_1 \cdot (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m) = p_1 \cdot (p_2 \cdot \ldots p_k \ominus q_2 \cdot \ldots \cdot q_m)$$

Denn um so zu rechnen, braucht man auch noch Distributivgesetze, die besagen, dass Multiplikation und Addition miteinander zusammenhängen. Probieren Sie also einmal eine Multiplikation und eine Addition in ℍ zu definieren, die auch noch über Distributivgesetze zusammenhängen und sie werden feststellen, warum der Beweis der Eindeutigkeit der PFZ nicht zu retten ist.

*

Erkundung 4.13:

Lösungshinweise:

Insgesamt scheint eine „geheimnisvolle" Struktur in den Teilermengen zu stecken, die sich durch die schlichte Aufzählung nicht erschließt.

$T_1 = \{1\}$
$T_2 = \{1,2\}$
$T_3 = \{1,3\}$
$T_4 = \{1,2,4\}$
$T_5 = \{1,5\}$
$T_6 = \{1,2,3,6\}$

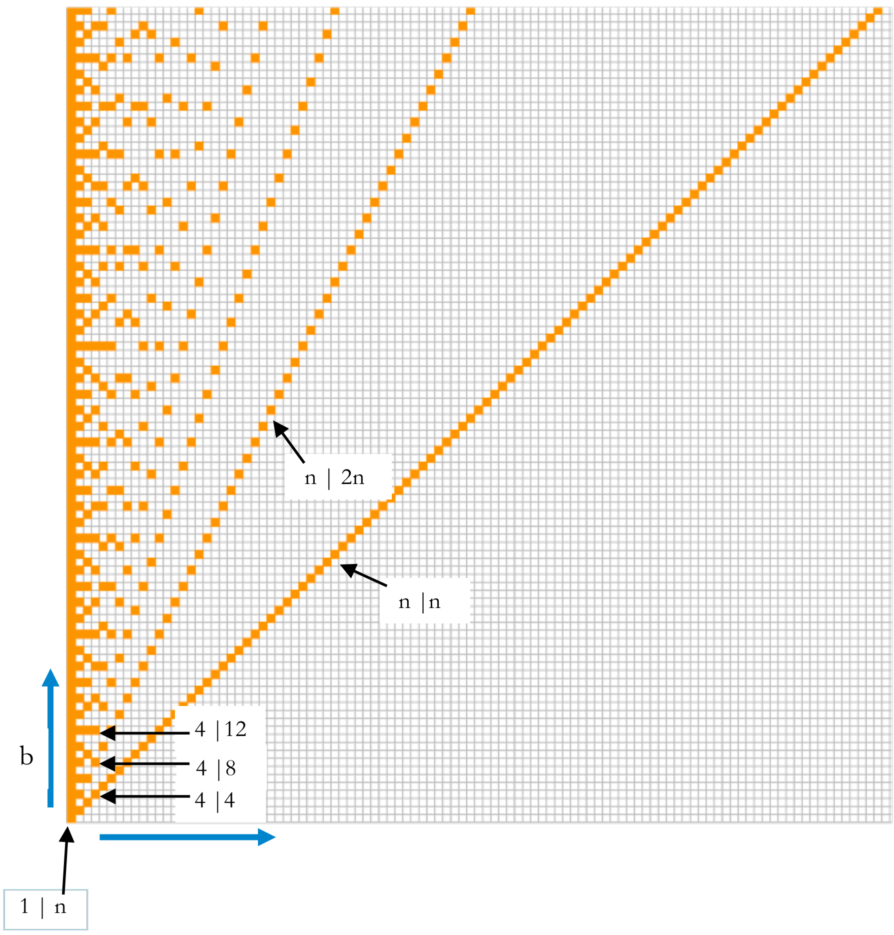
$T_7 = \{1,7\}$
$T_8 = \{1,2,4,8\}$
$T_9 = \{1,3,9\}$
$T_{10} = \{1,2,5,10\}$
$T_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$
$T_{100} = \{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$

Die Anzahl der Teiler wird recht sprunghaft größer und wieder kleiner. Auf Anhieb scheint es nicht möglich zu sein vorauszusagen, wie viele Teiler etwa 120 hat. Es braucht eine Einsicht in die Struktur der Teilermengen, um ihre Größe zu verstehen.

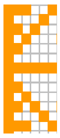
Versuchen Sie darzustellen, wie die Teiler einer Teilermenge miteinander zusammenhängen. Dazu können Sie auch grafisch vorgehen. Das ist gerade der Inhalt der nachfolgenden Erkundung.

Übung 4.15

Lösungshinweise:
In dem nachfolgenden Bild ist die Teilerbeziehung a|b dargestellt. Ein Punkt mit den Koordinaten (a | b) ist genau dann gefärbt, wenn a Teiler von b ist.



Wenn man dem Geheimnis der Muster auf die Spur kommen will, notiert man am besten die darin enthaltenen Teilerbeziehungen konkret:



1|60, 2|60, 3|60, 4|60, 5|60, 6|60
Nun kann man vorhersagen, wann der nächste lange horizontale Streifen kommen wird und wie lang er sein wird.

1|60, 2|58, 3|57, 4|56, 5|55, 6|54
Hier erkennt man, wieso mit einem horizontalen Streifen auch Diagonalen verbunden sind und warum sie symmetrisch in beide Richtungen abstehen.

Zu einer der ersten Raketen gehören z.B. die Teilerbeziehungen
3|15, 4|16, 5|15. Zur nächsten Rakete gehören:
4|24, 5|25, 4|24.
Wenn man diese Beziehungen mit einer Variablen x und den Termen x-1, x und x+1 ausdrückt, sieht man eine allgemeine Beziehung, die aus der Schule sehr vertraut ist. Man erkennt auch, dass die Raketen allesamt entlang einer Parabel liegen.

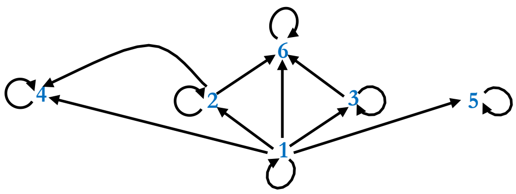
Ganz analog kann man die Struktur und Position der Fledermäuse erklären. Anhand eines Beispiels 3|18, 4|20, 5|20, 3|21 lässt sich ein allgemeiner Zusammenhang aufschreiben, der zu einer Gleichung führt, die weniger vertraut ist, als diejenige der Fledermäuse.

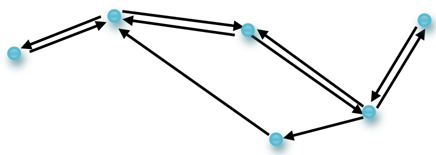
*

Erkundung 4.16

Lösungshinweise:

Untersuchen Sie den Graphen in der Aufgabe und zum Vergleich einige Teilbarkeitsgraphen z.B. auf folgende Eigenschaften:





Gibt es

- Sackgassen?
- Einbahnstraßen?
- Rundwege?
- Abkürzungen?
- andere besondere Verbindungen?
- besondere Stellen/Kreuzungen?
- …?

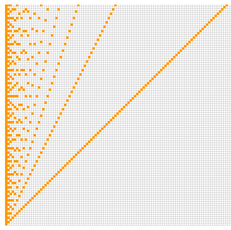
Beschreiben Sie, was diese Eigenschaften mathematisch für die Teilereigenschaft bedeuten.

Wenn Sie Eigenschaften am Teilergraphen entdeckt haben, untersuchen Sie, ob diese Eigenschaften für *jeden* Teilergraphen gelten oder ein Sonderfall für den abgebildeten darstellen.

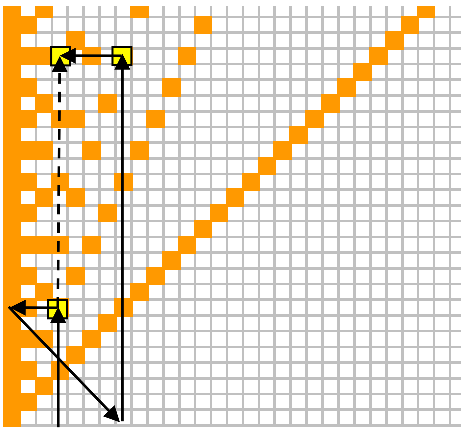
*

Übung 4.17:

Lösungen:

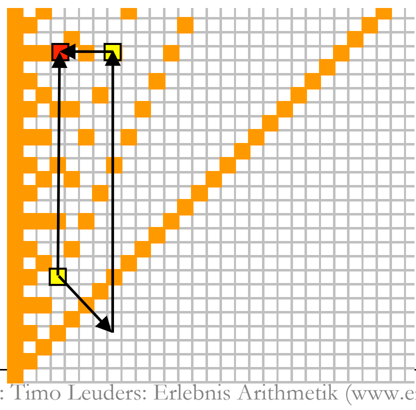


- **Reflexivität** erkennt man im Graphen daran, dass jedes a zu sich selbst in Bezeigung steht, also an der durchgehenden Diagonale.
- **Antisymmetrie** erkennt man daran, dass bei keinem Punkt auf der einen Seite der Diagonalen auch der gespiegelte Punkt auf der anderen Seite der Diagonale existiert. Bei der Teilereigenschaft ist das deswegen so trivial, weil *keiner* der Punkte unterhalb der Diagonalen besetzt ist. Im Prinzip könnte man aber auch a|b so definieren, dass die Relation für einige Punkte b<a gilt. So lange niemals ein Punkt *und* sein Spiegelpunkt *gleichzeitig* enthalten sind, also so lange niemals a|b und b|a für a≠b gleichzeitig gilt, wäre die Relation immer noch antisymmetrisch.
- **Transitivität** ist am Graphen durchaus schwieriger zu erkennen und zu überprüfen, da hier 3 Elemente in Verbindung stehen.



Im Bild ist folgendes Beispiel dargestellt: Es gilt 4|8. Hier ist die 8 das Geteilte, um sie als Teiler zu sehen, muss man sie von der vertikalen auf die horizontale Achse spiegeln. Dort gilt z.B. 8|24. Wegen der Transitivität gilt also auch 4|24 und daher muss die 24 auch oberhalb der 8 markiert sein. Ob die Transitivität für *alle* a,b und c gilt, lässt sich am Graphen also nicht so leicht erkennen.

Vielleicht erkennen Sie in dieser Darstellung eine Vereinfachung?



Transitivität bedeutet also, dass bei allen solchen Trapezen, bei denen die beiden gelben Ecken auf Punkten des Graphen liegen, auch immer die rote Ecke auf einem Graphenpunkt liegt.

Vielleicht finden Sie noch bessere grafische Charakterisierungen von Transitivität?

Übung 4.18:

Lösungen:

(1) Beweis der **Reflexivität** der Teilerbeziehung:

Behauptung: $\forall a \in \mathbb{N}: a \mid a$

Beweis: $\forall a \in \mathbb{N}: a = a \cdot 1$

(2) Beweis der **Antisymmetrie** der Teilerbeziehung:

Behauptung: $\forall a,b \in \mathbb{N}: a \mid b$ und $a \neq b \Rightarrow b \nmid a$

Beweis: Annahme: $a \mid b$ und $a \neq b$ und trotzdem $b \mid a$

$a \mid b$ bedeutet $\exists x \in \mathbb{N}: b = a \cdot x,$

$b \mid a$ bedeutet $\exists y \in \mathbb{N}: a = b \cdot y$

Mit diesem x und y gilt

$a \cdot x \cdot y = (a \cdot x) \cdot y \;=\; b \cdot y = a \;\Rightarrow\; a \cdot (x \cdot y) = a$

$\Rightarrow x \cdot y = 1 \Rightarrow\; x=1$ und $y=1$

$\Rightarrow a \cdot 1 = b \Rightarrow a = b.$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme

(3) Beweis der **Transitivität** der Teilerbeziehung:

Behauptung: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}: a \mid b$ und $b \mid c \;\Rightarrow\; a \mid c$

Beweis: $a \mid b$ bedeutet $\exists\, x \in \mathbb{N}: a \cdot x = b$

$b \mid c$ bedeutet $\exists\, y \in \mathbb{N}: b \cdot y = c$

Mit diesem x und y gilt

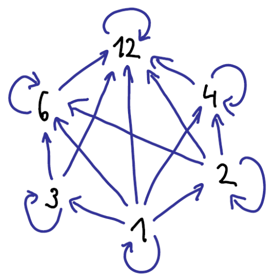
$a \cdot x \cdot y = (a \cdot x) \cdot y = b \cdot y = c \;\Rightarrow\; \exists\, z \in \mathbb{N}: c = a \cdot z$

*

Erkundung 4.19:

Lösungshinweise:

Nehmen Sie sich die zuvor gefundenen Eigenschaften für Teilergraphen zur Hand: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität. Untersuchen Sie dann, in einem konkreten Teilergraphen, welche Informationen Sie sich in dem Graphen sparen können, wenn Sie schon wissen, dass diese drei Eigenschaften gelten.

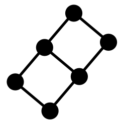


Erkundung 4.20:

Lösungshinweise:

Für diese Aufgabe wäre es sehr hilfreich, wenn Sie einen systematischen Weg hätten, wie sie zu einer gegebenen Zahl deren Teileranzahl fänden. Einen solchen Weg können Sie vielleicht anhand dieses Beispiels entwickeln.

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$
$T_{50} = \{1,2,5,10,25,50\}$



50 hat also auch 6 Teiler – obwohl sie nur 3 Primfaktoren hat! Woran liegt Stellen Sie Ihre Erkenntnisse auf jeden Fall noch an weiteren Beispielen auf die Probe.

Den Unterschied zwischen Teileranzahlen und Anzahl von Tafelformen erkennen Sie vielleicht an diesem Beispiel:

$|T_9| = |\{1,3,9\}| = 3$ → 2 Tafelformen
$|T_{10}| = |\{1,2,5,10\}| = 4$ → 2 Tafelformen

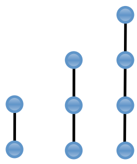
*

Übung 4.21

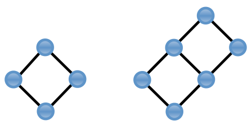
Lösungen:

Alle Primfaktorzerlegungen unter 30 haben eine dieser Formen. Im Folgenden seien p, q jeweils *verschiedene* Primzahlen.

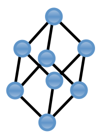
$a = p$ hat 2 Teiler
$a = p^2$ hat 3 Teiler
$a = p^3$ hat 4 Teiler
usw.



$a = p \cdot q$ hat 4 Teiler
$a = p^2 \cdot q$ hat 6 Teiler
$a = p^3 \cdot q$ hat 8 Teiler,
usw.



$a = p \cdot q \cdot r$ hat 8 Teiler



Der letzte Fall ist mit a=2·3·5 auch schon der einzige bis 30 mit drei verschiedenen Primfaktoren. Hier kann man sich eine dritte Dimension vorstellen.

Übung 4.22:

Lösungen:

Wenn Sie in der letzten Aufgabe systematisch vorgegangen sind, haben Sie folgendes herausgefunden:

- vier verschiedene Primfaktoren ($2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$) passen nicht unter 50.
- drei verschiedene Primfaktoren ergeben eine Zahl mit 8 Teilern.
- drei verschiedene Primfaktoren, davon einer doppelt ($2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$), passen nicht unter 50.
- zwei verschiedene Primfaktoren, dafür jeweils doppelt, führen auf 9 Teiler, die einzige Möglichkeit unter 50 ist hier $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
- zwei verschiedene Primfaktoren, einer doppelt, einer dreifach ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$), passen wieder nicht unter 50.
- ein einzelner Primfaktor passt maximal 5 fach ($2^5=32$) unter 50 und führt zu 8 Teilern.

Damit hat die $36 = 2^2 \cdot 3^2$ gewonnen! Dieses Beispiel hat gezeigt, wie man aus der Primfaktorzerlegung alle Teiler gewinnt.

*

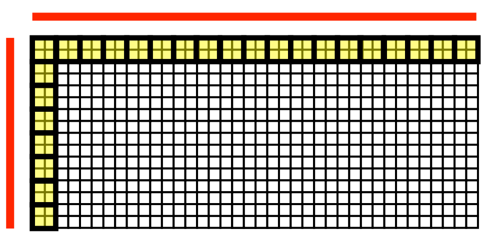
Erkundung 4.23:

Lösungshinweise:

Wenn Sie noch keine konkreten Ideen haben, wie die Fliesenbreite *c* von der Breite *a* und Länge *b* der Fläche abhängen, können Sie sich erst einmal einen zahlenmäßigen Überblick über Beispiele verschaffen:

Breite a	**Länge** b	**Fliesenbreite** c
5	10	5
6	10	2
7	10	1

Beim Auslegen eines Rechtecks durch möglichst große quadratische Fliesen müssen diese sowohl Teiler der Länge *a* als auch der Breite *b* sein.



Legt man die Seitenlängen *a* und *b* als Stäbe nebeneinander

dann stellt sich die Frage nach den passenden Quadraten so: *Was ist die größte Länge c eines Stabes, mit dem man sowohl a als auch b auslegen kann?*

*

Ein Quadrat, dessen Seitenlänge im Beispiel nicht 10 = 125–115 teilt, hat keine Chance zu passen. In symbolischer Schreibweise heißt das:

$c \mid a$ und $c \mid b \;\Rightarrow\; c \mid a-b$

Auch umgekehrt ist das richtig: Ein Quadrat, dessen Länge in die kleinere Seitenlänge und die Differenz passt, passt auch in die größere Länge.

$c \mid a-b$ und $c \mid b \;\Rightarrow\; c \mid a$

Übung 4.24:

Behauptung: $c \mid a$ und $c \mid b \;\Rightarrow\; c \mid a-b$

Beweis:

$c \mid a \Rightarrow \exists x \in \mathbb{N}\colon a = c \cdot x$

$c \mid b \Rightarrow \exists y \in \mathbb{N}\colon b = c \cdot y$

$\Rightarrow a-b = c \cdot x - c \cdot y = c \cdot (x-y)$

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}\colon b = c \cdot z$

Behauptung: $c \mid a-b$ und $c \mid b \;\Rightarrow\; c \mid a$

Beweis:

$c \mid a-b \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}\colon a-b = c \cdot x$

$c \mid b \Rightarrow \exists\, y \in \mathbb{N}\colon b = c \cdot y$

$\Rightarrow a = (a-b)+b = c \cdot x + c \cdot y = c \cdot (x+y)$

$\Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{N}\colon b = c \cdot z$

Beide symbolische Beweise lassen sich auch als ikonische Beweise führen. Alle Bestandteile des ikonischen Beweises sind in den symbolischen bereits enthalten.

*

Übung 4.25:

*

Übung 4.26a/b:

Lösung:
Die Primfaktorzerlegungen bestimmen bereits, welche Teiler in den beiden Zahlen enthalten sind und damit auch die größten Teiler:

$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Ein Teiler jeder dieser Zahlen besteht aus höchstens den Teilern aus dieser Primfaktorzerlegung. Der größte Teiler, der in beiden enthalten ist, kann also beispielsweise höchstens so viele 2 enthalten, wie diejenige Zahl mit der geringeren Anzahl von 2 in der Primfaktorzerlegung.

$\text{ggT}(720, 108) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Im ggT steckt höchstens zweimal die 2, das in 108 nur 2 mal der Faktor 2 enthalten ist, auch wenn er in 720 dreimal enthalten ist, usw..

Das kann man so verallgemeinern:

Satz: Gegeben sind zwei Zahlen a und b mit der Primfaktorzerlegung

$$a = {p_1}^{n_1} \cdot {p_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{n_k}$$

$$b = {p_1}^{m_1} \cdot {p_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{m_k}$$

Dann gilt $\mathrm{ggT}(a,b) = {p_1}^{\min(n_1,m_1)} \cdot {p_2}^{\min(n_2,m_2)} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\min(n_k,m_k)}$

Dabei sind die p_i die Primzahlen, die in a oder b vorkommen. Für das Beispiel oben, ist $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$. Wenn ein Primfaktor in einer Zahl nicht vorkommt, so stellt das kein Problem dar, denn man kann dann den Exponenten als 0 wählen. Konkret bedeutet das für obiges Beispiel:

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
$108 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$

Die *größte* Potenz einer Primzahl, die in *beide* Zahlen passt, ist damit die *kleinere* der beiden auftretenden Potenzen.

$\mathrm{ggT}(720, 108) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$

Sicher haben Sie erkannt, dass die Formel, die im Buch abgedruckt ist, einen „Schönheitsfehler" hat. Dort stehen für die zweite Zahl scheinbar andere Primfaktoren q_i statt p_i.

$$a = {p_1}^{n_1} \cdot {p_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{n_k}$$

$$b = {q_1}^{m_1} \cdot {q_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot {q_k}^{m_k}$$

Das ist nach dem eben geschriebenen aber gar nicht nötig und so wie es an der Stelle steht auch unsinnig.

*

Erkundung 4.27:

Lösungshinweise:

Sie können die Jahre, in denen die Zikadenarten aufeinandertreffen am besten konkret in einer Tabelle oder am Zahlenstrahl veranschaulichen:

Zikadenart A schlüpft im Jahr 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130, …

Zikadenart B schlüpft im Jahr 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, 170, …

Fressfeind im Jahr: 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 85,

Erst nach so viel Rechenarbeit und so vielen Jahren finden Sie das erste Zusammentreffen! Das sollten Sie systematisch anschauen und dabei auch zum Vergleich andere Rhythmen, z.B. 10 oder 14 Jahre annehmen.

Rhythmus *a* Jahre	**Rhythmus** *b* Jahre	**Erstes Zusammentreffen** *c* Jahre

13	6	
13	4	
14	6	

*

Erkundung 4.28:

Lösungshinweise:

Auch hier verhelfen wieder Beispiele zu einem systematischen Überblick

a	*b*	***a·b***	**kgV(*a*,*b*)**	**„zu groß“ um Faktor**
8	10	80	40	2
8	16	128	16	8
8	9	72	72	1
8	6	48	24	2

Beobachten Sie den „Zu-Groß“-Faktor, vielleicht können Sie in systematisch bestimmen?

Vielleicht können Sie auch eine Formel für die Differenz a·b – kgV(a,b) oder für den Quotienten a·b : kgV(a,b) herleiten?

Möglicherweise hilft Ihnen dabei auch eine Darstellung der auftretenden Zahlen in der Primfaktorzerlegung.

*

Übung 4.29:

Lösung:
Konkret findet man den kgV aus der Primfaktorzerlegung zweier Zahlen,

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
$108 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$

so: Damit eine Zahl Vielfaches einer anderen Zahl ist, muss sie jeden Primfaktor dieser Zahl in *mindestens* der Potenz enthalten. Wenn sie Vielfaches von zwei Zahlen soll, muss sie mindestens die höchste der beiden Potenzen enthalten. Das kleinste gemeinsame Vielfache enthält also jeden Primfaktor jeweils in genau der höheren der beiden Potenzen:

kgV(720, 108) = $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$ = 2160

Allgemein geschrieben sieht das so aus:

Satz: Gegeben sind zwei Zahlen a und b mit der Primfaktorzerlegung

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

$$b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$$

Dann gilt $\mathrm{kgV}(a, b) = p_1^{\max(n_1, m_1)} \cdot p_2^{\max(n_2, m_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(n_k, m_k)}$

Multipliziert man ggT und kgV, so ergibt sich im konkreten Beispiel:

720 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
108 = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$

ggT(720, 108) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0$
kgV(720, 108) = $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$

ggT(720, 108) · kgV(720, 108) =
$2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 5^1 = 720 \cdot 108$

In allgemeinen Formeln geschrieben sieht das allgemeingültiger, aber nicht übersichtlicher aus:

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

$$b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$$

$$\mathrm{kgV}(a, b) = p_1^{\max(n_1, m_1)} \cdot p_2^{\max(n_2, m_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(n_k, m_k)}$$

$$\mathrm{ggT}(a, b) = p_1^{\min(n_1, m_1)} \cdot p_2^{\min(n_2, m_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(n_k, m_k)}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) &= p_1^{\max(n_1, m_1)} \cdot \ldots \cdot p_1^{\min(n_1, m_1)} \cdot \ldots \\ &= p_1^{\max(n_1, m_1) + \min(n_1, m_1)} \cdot \ldots \\ &= p_1^{n_1 + m_1} \cdot \ldots \\ &= p_1^{n_1} \cdot p_1^{m_1} \cdot \ldots \\ &= p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_1^{m_1} \cdot \ldots \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

*

Übung 4.30:

a) Wenn a drei verschiedene Primzahlen p, q, r enthält, dann hat a mindestens die Teiler 1, p, q, r, pq, pr, qp, pqr. Diese sind wegen der Eindeutigkeit der PFZ alle verschieden.

b) Die Zahl 7 lässt sich nicht weiter zerlegen. Daher gibt es nur die Möglichkeit, dass $a = p^6$ ist mit den Teilern 1, p, … p^6. Interpretiert man die Aussage als „mindesten 7 Teiler", so ist sie natürlich falsch und auch nicht besonders interessant.

c) Allgemein kann man so argumentieren: Bei 25 Teilern gibt es 12 Paare von Komplementärteilern und einen, der zu sich selbst komplementär ist. Dessen Quadrat ist dann a. Die Aussage stimmt also. Alternativ kann man auch konkret argumentieren: Bei 25 Teilern hat die Zahl a entweder die Form p^{24} oder $p^4 \cdot q^4$. Im beiden Fällen ist sie eine Quadratzahl, nämlich $(p^{12})^2$ bzw. $(p^2q^2)^2$.

d) Eine Quadratzahl hat immer eine ungerade Anzahl von Teilern. Das kann man entweder mit den Komplementärteilern begründen oder mit der Tatsache, dass die Potenzen in der Primfaktorzerlegung einer Quadratzahl alle gerade sind. Die Anzahl der Teiler ist damit das Produkt von lauter ungeraden Zahlen, also ungerade. Eine Quadratzahl kann also keine 6 Teiler haben. Oder als Kontraposition dieser Aussage formuliert: Wenn eine Zahl 6 Teiler hat, ist sie keine Quadratzahl.

e) Diese Aussage muss keineswegs zutreffen, denn p^{41} hat 42 Teiler, aber nur eine Primzahl.

*

Übung 4.31:

Ein Vielfaches muss mindestens die jeweils größten Potenzen der Primfaktorzerlegungen enthalten. Ein kleinstes gemeinsames Vielfaches genau diese.

$6 = 2 \cdot 3 \qquad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 45 = 3^2 \cdot 5$

$a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Natürlich hätte man 6 als Teiler von 12 gar nicht mehr betrachten müssen.

Wenn Sie das kgV schon kennengelernt haben, dann erkennen Sie an diesem Beispiel, dass man das kgV zweier Zahlen ohne Weiteres auf das kgV von mehr Zahlen erweitern kann.

*

Übung 4.32:

Mit den beiden Stocklängen kann man jede Summe und Differenz von 42cm und 13cm legen. Insbesondere kann man so auch den ggT(13, 42) legen, denn dieser entsteht im euklidischen Algorithmus durch schrittweises Subtrahieren von schon gelegten Längen. Kleinere Längen als den ggT(13, 42) lassen sich so nicht legen, denn 42 und 13 sind beide ein Vielfaches von ggT(13, 42) und deren Summen und Differenzen bleiben auch immer ein Vielfaches von ggT(13, 42).

Das Problem, welche Längen man mit zwei Stöcken legen kann ist also identisch mit der Frage nach dem ggT ihrer Längen. In diesem Fall beträgt die ggT(13,42) =1, man kann also *jede* ganzzahlige Länge legen.

Sie können auch konkret durch probieren herausfinden, wie man die Stangen legen kann. Mit dem euklidischen Algorithmus finden Sie das sogar systematisch, z.B. so:

$42 - 3 \cdot 13 = 3$

$13 - 4 \cdot 3 = 1$

Wenn Sie die Rechnung nun von hinten nach vorne umkehren, so erhalten Sie:

$1 = 13 - 4 \cdot 3$

Die 1 legt man also mit einer 13er-Stange und vier 3er-Stangen in Gegenrichtung. Allerdings hat man ja gar keine 3er-Stangen. Wie man die erhält, steht aber in der Zeile darüber. Das kann man in die letzte Zeile einsetzen:

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot (42 - 3 \cdot 13) \\ &= 13 - 4 \cdot 42 + 12 \cdot 13 \end{aligned}$$

$= 13 \cdot 13 - 4 \cdot 42$

Legen Sie also 13 13er-Stangen nach rechts und dann 4 42er-Stangen nach links, und sie erhalten die Länge 169–168 = 1.

*

Übung 4.33:

Lösungsmöglichkeit:

a) Mit Primfaktorzerlegung geschrieben lautet die Gleichung:
$\text{kgV}(2\cdot 5, x) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$
Damit diese Gleichung gilt muss also folgendes erfüllt sein:
x enthält 2 in der Potenz 2^2
x enthält 3 in der Potenz 3^2
x enthält 5 in der Potenz 5^0 oder 5^1
Somit ergeben sich zwei mögliche Primfaktorzerlegung für die gesuchten Zahl x: (1) $x = 2^2\cdot 3^2$ oder (2) $x = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$

b) 5 ist kgV von a und b. Insbesondere muss a und b ein Teiler von 5 sein. 5 hat aber nur die Teiler 1 und 5. Die möglichen Lösungen sind:
   a. a=1; b=5
   b. a=5; b=5

c) Die Primfaktorzerlegung von 10 ist $10=2\cdot 5$.

In mindestens einer der beiden Primfaktorzerlegungen der beiden Zahlen *a* und *b* müssen also die die Primfaktoren 2 und 5 vorkommen. Die Potenzen der beiden Primfaktoren müssen ≤ 1 sein.

Für $\text{kgV}(a,b)=10$ ergeben sich somit folgende Möglichkeiten:

1. $a=2^0\cdot 5^0=1$; $b=2^1\cdot 5^1$
2. $a=2^1\cdot 5^0$; $b=2^1\cdot 5^1$
3. $a=2^1\cdot 5^0$; $b=2^0\cdot 5^1$
4. $a=2^0\cdot 5^1$; $b=2^1\cdot 5^1$
5. $a=2^0\cdot 5^1$; $b=2^1\cdot 5^0$

Die Primfaktorzerlegung von 24 ist $24=2^3\cdot 3$.

In mindestens einer der beiden Primfaktorzerlegungen der Zahlen *a* und *b* müssen also die die Primfaktoren 2 und 3 vorkommen. Dabei muss der Primfaktor 3 in einer der beiden Zahlen *a* und *b* mit der Potenz 3 vorkommen, in der anderen Zahl kann dieser Primfaktor mit einer Potenz ≤ 3 vorkommen. Der Primfaktor 3 muss in mindestens einer der beiden Zahlen *a* und *b* vorkommen und darf die Potenz 1 nicht überschreiten.

Für $\text{kgV}(a,b)=24$ ergeben sich somit folgende Möglichkeiten:

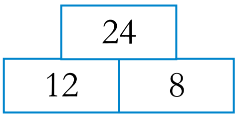
1. $a=2^0\cdot 3^0=1$; $b=2^3\cdot 3$
2. $a=2^1\cdot 3^0$; $b=2^3\cdot 3^1$
3. $a=2^2\cdot 3^0$; $b=2^3\cdot 3^1$
4. $a=2^3\cdot 3^0$; $b=2^3\cdot 3^1$
5. $a=2^0\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^1$
6. $a=2^1\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^1$
7. $a=2^2\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^1$
8. $a=2^3\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^1$
9. $a=2^0\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^0$

10. $a=2^1\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^0$
11. $a=2^2\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^0$
12. $a=2^3\cdot 3^1$; $b=2^3\cdot 3^0$

d) Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Produkt aller Primfaktoren, die in mindestens einer der Zerlegungen vorkommen, jeweils in ihrer höchsten Potenz. Da das kleinste gemeinsame Vielfache selbst eine Primzahl ist, ergeben sich für die beiden Zahlen a und b nur zwei Möglichkeiten:
   1. a=1; b=p
   2. a=p; b=p

e) Wenn kgV(a,b)=a gelten soll, dann ergeben sich für die a und b nur zwei Möglichkeiten:
   1. $b=1$
   2. $b=a$

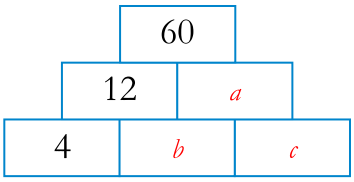
Übung 4.34: In den folgenden Zahlenmauern ist die Zahl im oberen Stein immer das kgV von den beiden Zahlen auf den Steinen darunter.



a) Um die Aufgabe besser lösen zu können, werden die gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt.

   $60=2^2\cdot 3\cdot 5$; $12=2^2\cdot 3$; $4=2^2$

   Um die Zahlenmauer richtig zu lösen, müssen mehrere Bedingungen erfüllt sein:



1. Bedingung: kgV($12,a$)=60

   Mögliche Primfaktorzerlegungen für a:

   1) $a=2^0\cdot 3^0\cdot 5^1$
   2) $a=2^1\cdot 3^0\cdot 5^1$
   3) $a=2^2\cdot 3^0\cdot 5^1$
   4) $a=2^0\cdot 3^1\cdot 5^1$
   5) $a=2^1\cdot 3^1\cdot 5^1$
   6) $a=2^2\cdot 3^1\cdot 5^1$

2. Bedingung: kgV($4,b$)=12

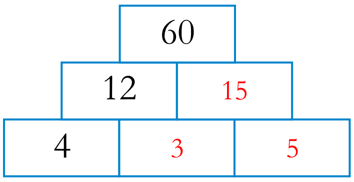
   1) $b=2^0\cdot 3^1$

2) $b=2^1\cdot 3^1$

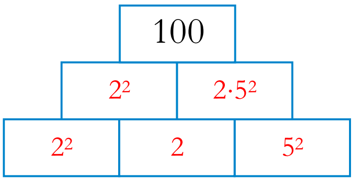
3) $b=2^2\cdot 3^1$

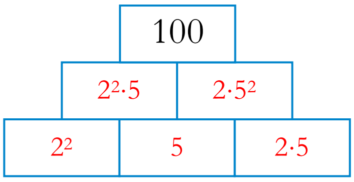
3. Bedingung: kgV(b,c)=a
   Damit alle drei Bedingungen erfüllt sind, ergibt sich für die Primfaktorzerlegung der Zahlen a, b und c nur eine Möglichkeit:

   $a=2^0\cdot 3^1\cdot 5^1$, $b=2^0\cdot 3^1$ und $c=5^0$



b) $100=2^2\cdot 5^2$





Übung 4.35:

Lösungsmöglichkeit:

a) Mögliche Beispiele:
   1. Fliesenlänge: 4 LE
      Fliesenbreite: 3 LE
      ⇒ Kleinstes mögliches Quadrat:
      - Seitenlänge 12 LE
      - Anzahl der Fliesen in der Länge: 3
      - Anzahl der Fliesen in der Breite: 4
      - Anzahl der Fliesen gesamt: 12
   2. Fliesenlänge: 15 LE
      Fliesenbreite: 12 LE
      ⇒ Kleinstes mögliches Quadrat:
      - Seitenlänge 60 LE
      - Anzahl der Fliesen in der Länge: 4
      - Anzahl der Fliesen in der Breite: 5
      - Anzahl der Fliesen gesamt: 20
   3. Fliesenlänge: 5 LE
      Fliesenbreite: 7 LE
      ⇒ Kleinstes mögliches Quadrat:

- Seitenlänge 35 LE
- Anzahl der Fliesen in der Länge: 5
- Anzahl der Fliesen in der Breite: 7
- Anzahl der Fliesen gesamt: 35

b) Die Anzahl n der Fliesen kann mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen durch folgende Formel bestimmt werden:

$$n = \frac{kgV(a,b)}{a} \cdot \frac{kgV(a,b)}{b}$$

Da $a \cdot b = \text{kgV}(a,b) \cdot \text{ggT}(a,b)$ kann die Formel für die Anzahl der Fliesen weiter umgeformt werden:

$$n = \frac{kgV(a,b)}{a} \cdot \frac{kgV(a,b)}{b} = \frac{kgV(a,b) \cdot kgV(a,b)}{kgV(a,b) \cdot ggT(a,b)} = \frac{kgV(a,b)}{ggT(a,b)}$$

c) Für die Grenzfälle kann man vorgehen wie folgt:

1. Fliesenlänge 1 LE
   Fliesenlänge 2 FE

   $$n = \frac{kgV(1,2)}{1} \cdot \frac{kgV(1,2)}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} = 2$$

   ⇒ Kleinstes mögliches Quadrat:
   - Seitenlänge 2 LE
   - Anzahl der Fliesen in der Länge: 1
   - Anzahl der Fliesen in der Breite: 2
   - Anzahl der Fliesen gesamt: 2

2. Fliesenlänge 5 LE
   Fliesenlänge 5 LE

   $$n = \frac{kgV(5,5)}{5} \cdot \frac{kgV(5,5)}{5} = \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} = 1$$

   ⇒ Kleinstes mögliches Quadrat:
   - Seitenlänge 5 LE
   - Anzahl der Fliesen in der Länge: 1
   - Anzahl der Fliesen in der Breite: 1
   - Anzahl der Fliesen gesamt: 1

Diese Formel scheint also auch für Extremfälle zu einen richtigen Ergebnis zu führen.

Übung 4.36:

Lösungsmöglichkeit:

a)

Zahl	Primfaktorzerlegung	Typ
1	1	Ungerade
2	2	Ungerade
3	3	Ungerade
4	2^2	Gerade
5	5	Ungerade
6	$2 \cdot 3$	Gerade
7	7	Ungerade
8	2^3	Ungerade
9	3^2	Gerade
10	$2 \cdot 5$	Gerade
11	11	Ungerade
12	$2^2 \cdot 3$	Ungerade
13	13	Ungerade
14	$2 \cdot 7$	Gerade
15	$3 \cdot 5$	Gerade
16	2^4	Gerade
17	17	Ungerade
18	$2 \cdot 3^2$	Ungerade
19	19	Ungerade
20	$2^2 \cdot 5$	Ungerade

b) Mit Hilfe der Daten kann man erkennen, dass zwischen $G(n)$ und $U(n)$ die Beziehung $G(n)<U(n)$ herrscht. Weiter kann mit Hilfe der gewonnenen Daten erkannt werden, dass alle Quadratzahlen eine gerade Anzahl von Primfaktoren besitzen. Quadratzahlen müssen eine gerade Anzahl an Primfaktoren besitzen da, auf Grund des Quadrierens, jede Primzahl der Grundzahl n in gerader Potenz vorkommt.

Übung 4.37:

Lösungsmöglichkeit:

Um den ggT von drei Zahlen a, b, c zu bestimmen kann man den ggT von zwei Zahlen a, b bestimmen und den ggT von diesem Ergebnis und c bestimmen: $\text{ggT}(a,b,c) = \text{ggT}(\text{ggT}(a,b),c)$

Beispiel:

a) ggT(27,120,300)
ggT(27,120):
Primfaktorzerlegung:
$27=3^3$
$120=2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$\Rightarrow \text{ggT}(27,120)=3$

b) ggT(3,300):
Primfaktorzerlegung:
$3=3$
$300=2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$\Rightarrow$ ggT(3,300)=3

Aus a) und b) folgt, dass ggT(27,120,300)=3

Nun muss noch gezeigt werden, dass diese Behauptung allgemein gilt.

Behauptung:

$\text{ggT}(a,b,c) = \text{ggT}(\text{ggT}(a,b),c)$

Beweis:

Sei $x = \text{ggT}(\text{ggT}(a,b),c)$. Nach Definition des größten gemeinsamen Teilers gilt:

- $x|\text{ggT}(a, b)$ und $x=\max(T_{\text{ggT}(a,b)}) \Rightarrow x=\text{ggT}(a,b)$
- $x|c$ und $x=\max(T_c)$

$\Rightarrow x=\text{ggT}(a,b,c)$

$\Rightarrow \text{ggT}(a,b,c)=\text{ggT}(\text{ggT}(a,b),c)$, was zu zeigen war.

Ebenso gilt, dass $\text{ggT}(a,b,c)=\text{ggT}(\text{ggT}(a,b),c)=\text{ggT}(a,\text{ggT}(b,c))$

Übung 4.38:

Lösungsmöglichkeit:

a) Vermutung:

$a|b$ und $b|a \Rightarrow a=b$

Beweis:

Voraussetzung:

$a|b \Rightarrow \exists\, q_1 \in \mathbb{N}$, sodass $a\cdot q_1=b$

$b|a \Rightarrow \exists\, q_2 \in \mathbb{N}$, sodass $b\cdot q_2=a$

Folgerung:

Einsetzen der Gleichung I. in Gleichung II.:

$a\cdot q_1\cdot q_2=a \Rightarrow q_1=q_2=1 \Rightarrow a=b$,

was zu zeigen war.

b) Beispiel:

$6|12$ und $6|36 \Rightarrow 12|24$

Vermutung:

$a|b$ und $a|(b+c) \Rightarrow a|c$

Beweis:

Voraussetzung:

I. $a|b \Rightarrow \exists\, q_1 \in \mathbb{N}$, sodas $a\cdot q_1=b$

II. $a|(b+c) \Rightarrow \exists\, q_2 \in \mathbb{N}$, sodas $a\cdot q_2=b+c$

Folgerung:

$a\cdot q_2=a\cdot q_1+c \qquad |- a\cdot q_1$

$a\cdot q_2-a\cdot q_1=c$

$\Leftrightarrow a \cdot (q_2 - q_1) = c$
$\Leftrightarrow a \cdot q_3 = c$
$\Leftrightarrow a \mid c$,
was zu zeigen war.

c) Vermutung:
$a \mid 1 \Rightarrow a = 1$
Beweis:
Voraussetzung:
$a \mid 1 \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{N}$, sodas $a \cdot q = 1 \Rightarrow q = a = 1$,
was zu zeigen war.

d) Vermutung:
$0 \mid a \Rightarrow a = 0$
Beweis:
Voraussetzung:
$0 \mid a \Rightarrow \exists\, q \in \mathrm{N}$, sodas $0 \cdot q = a$
$\Leftrightarrow a = 0$,
was zu zeigen war.

Übung 4.39:

Lösungsmöglichkeit:

1. Zahlen, die genau 3 verschiedene Teiler haben:
Beispiele:
$T_{25} = \{1; 5; 25\}$
$T_4 = \{1; 2; 4\}$
$T_9 = \{1; 3; 9\}$
Vermutung:
Zahlen, die genau drei verschiedene Teiler haben müssen die Form p^2, mit p prim, besitzen.
Begründung:
Zahlen dieser Form haben die Teiler 1, p, p^2. Es können immer nur drei Teiler sein, da p als Primzahl selbst keine Teiler besitzt.

2. Zahlen, die eine ungerade Anzahl an Teiler haben:
Beispiele:
$T_{25} = \{1; 5; 25\}$
$T_{81} = \{1; 3; 9; 27; 81\}$
$T_{64} = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$
Vermutung:
Zahlen, die eine ungerade Anzahl von Teiler haben sind Quadratzahlen.
Begründung:
Sei a eine Quadratzahl mit der Form $a = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Teilermenge einer Zahl lässt sich paarweise zu Teiler und Komplementärteiler ordnen. Zu jedem Teiler $t = t_1, \ldots, t_i$ von a existiert also ein Komplementärteiler: $(1, a)$, $(t_1, \frac{t_1}{a})$,…Für den Teiler $t = n$ gilt allerdings, dass der Komplementärteiler $\frac{a}{n} = n$ ist. n ist also zu sich selbst komplementär, wodurch Quadratzahlen eine ungerade Anzahl an Teilern besitzen.

Übung 4.40:

Lösungsmöglichkeit:

1) Zahlen, welche nur ungerade Zahlen als Teiler haben:
   Beispiele:
   $T_1 = \{1\}$
   $T_{13} = \{1; 13\}$
   $T_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$
   $T_{49} = \{1; 7; 49\}$
   Vermutung: Zahlen, welche nur ungerade Zahlen als Teiler haben, sind genau die ungeraden Zahlen.
   Begründung: Eine ungerade Zahl hat nur ungerade Teiler, denn sie hat niemals die Zahl 2 und somit auch keine Vielfachen der Zahl 2 als Teiler, denn ansonsten wäre diese Zahl ja gerade. Jede gerade Zahl dagegen hat immer die Zahl 2 als Teiler und hat somit auch immer mindestens eine gerade Zahl als Teiler.

2) Zahlen die (fast) nur gerade Teiler haben:
   Beispiele:
   $T_2 = \{1; 2\}$
   $T_4 = \{1; 2; 4\}$
   $T_8 = \{1; 2; 4; 8\}$
   $T_{16} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$
   Vermutung: Zahlen, die (fast) nur gerade Teiler haben, sind Zahlen der Form 2^n, mit $n \in \mathbb{N}$.

   Begründung: Die Einschränkung auf fast nur ungerade Zahlen als Teiler ist nötig, da jede Zahl immer die 1 als Teiler hat. Da die 1 ungerade ist, hat also jede Zahl mindestens eine ungerade Zahl als Teiler.

3) Zahlen, die genauso viele gerade wie ungerade Teiler haben:
   Beispiele:
   $T_2 = \{1;2\}$
   $T_6 = \{1; 2; 3; 6\}$
   $T_{14} = \{1; 2; 7; 14\}$
   $T_{18} = \{1;2;3;6;9; 18\}$

Vermutung: Zahlen, die genauso viele gerade wie ungerade Zahlen als Teiler haben müssen die Form $2^1 \cdot$ beliebige andere Potenzen von anderen Primzahlen (die alle ungerade sind).

Begründung: Wenn 2 in nullter Potenz vorkommt, sind alle Teiler ungerade. Wenn 2 in der Potenz 2^n vorkommt, gibt es zu jedem ungeraden Teiler t insgesamt n gerade Teiler , nämlich $2 \cdot t$, $2^2 t$ .... $2^n t$. Daher muss n=1 sein.

Übung 4.41:

Lösungsmöglichkeit:

a) Um zu untersuchen, wie viele Endnullen eine Zahl $n!$, mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt, wird die Zahl $n!$ in ihre Primfaktoren zerlegt. Nun wird gezählt, wie oft die Primfaktoren 2 und 5 in der Zerlegung enthalten sind. Für jedes dieser Faktorenpaare erhält man eine Endnull. Da der Fak-

tor 5 im Produkt im größeren Abstand als der Faktor 2 vorkommt, genügt es die Anzahl der Fünfen zu bestimmen.
Bei der Zahl 10! kann die Anzahl der Fünfen also folgendermaßen bestimmt werden:

$$10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=2\cdot5\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot2\cdot3\cdot5\cdot2\cdot2\cdot3\cdot2\cdot1$$

10! hat also genau zwei Endnullen.

Diese Strategie führt auf die Vermutung: Die Anzahl $A(n)$ der Endnullen von $n!$ ist $A(n)=\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor$. Allerdings funktioniert die für 30! mit 7 Endnullen nicht, denn $A(30)=\left\lfloor\frac{30}{5}\right\rfloor=6$. Dies liegt daran, dass 30! einen Faktor 25 besitzt, welcher zu einem zusätzlichen Faktor 5 und damit zu einer zusätzlichen Endnull führt. Ebenso verhält es sich mit jeder weiteren 5er-Potenz. Enthält ein $n!$ beispielswiese den Faktor $5^4=625$ so führt dieser Faktor zu insgesamt vier weiteren Endnullen. Ein Ausdruck $A(n)$, der dies für beliebig großes n berücksichtigt, lautet:

$$A(n)=\sum_{i=1}\left\lfloor\frac{n}{5^i}\right\rfloor.$$

b) Für ein $n!$ mit fünf Endnullen benötigt man fünf Mal den Faktor 5. 25! ist die erste Zahl mit fünf Endnullen. Sie besitzt allerdings nicht genau fünf Endnullen, sondern sogar sechs Endnullen, da der Faktor 25 selbst zwei Endnullen liefert.

Übung 4.42:

Lösungsmöglichkeit:

Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 2 teilbar, da mindestens eine der drei aufeinanderfolgenden Zahlen durch 2 teilbar ist Beim Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist auch stets eine der natürlichen Zahlen durch 3 teilbar. Ist das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, dann ist das Produkt auch durch 6 teilbar.

Analog kann gezeigt werden, dass das Produkt vierer aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen immer durch $2\cdot3\cdot4=24$ teilbar ist, da es sowohl durch 2, als auch durch 3 als auch durch 4 teilbar ist. Ebenso gilt für ein Produkt von fünf aufeinanderfolgenden natürlicher Zahlen, dass immer durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 geteilt werden kann, weshalb ein Produkt von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ teilbar ist.

Übung 4.43:

Lösungsmöglichkeit:
Polynom $2x^3$
$T_{2x^3}=\{1; 2; x; 2x^2; x^2; 2x; x^3; 2x^3\}$

Polynom x^3+x^2+x+1
$T_{x^3+x^2+x+1}=\{1; x+1; x^2+1; x^3+x^2+x+1\}$

Polynome mit sechs verschiedenen Teilern
- Alle Polynome der Form: ax^2, mit $a\in\mathbb{P}$.
  Beispiel: $3x^2$
  Teilermenge: $T_{3x^2}=\{1; 3; x; 3x; x^2; 3x^2\}$

Teilermenge, allgemein: $T_{ax^2}=\{1; a; x; ax; x^2; ax^2\}$

- Alle Polynome der Form: a^2x, mit $a \in \mathbb{P}$.
  Beispiel: 2^2x
  Teilermenge: $T_{2^2x}=\{1; 2; 2^2; 2x; x; 2^2x\}$
  Teilermenge, allgemein: $T_{a^2x}= \{1; a; a^2; ax; x; a^2x\}$
- Alle Polynome der Form: x^5
  Teilermenge: $T_{x^5}=\{1; x; x^2; x^3; x^4; x^5\}$
- Alle Polynome der Form: $(x+a)^5$, mit $a \in \mathbb{P}$.
  Beispiel: $(x+1)^5$
  Teilermenge: $T_{(x+1)^5}=\{1; (x+1); (x+1)^2; (x+1)^3; (x+1)^4; (x+1)^5\}$
  Teilermenge, allgemein:
  $T_{(x+a)^5}= \{1; (x+a); (x+a)^2; (x+a)^3; (x+a)^4; (x+a)^5\}$
- Alle Polynome der Form: $a\cdot(x+b)^2$, mit $a, b \in \mathbb{P}$.
  Beispiel: $3\cdot(x+1)^2$
  Teilermenge: $T_{3\cdot(x+1)^2}=\{1; 3; 3\cdot(x+1); (x+1); (x+1)^2; 3\cdot(x+1)^2\}$
  Teilermenge, allgemein:
  $T_{a\cdot(x+b)^2}=\{1; a; a\cdot(x+b); (x+b); (x+b)^2; a\cdot(x+b)^2\}$

Übung 4.44:

Lösungsmöglichkeit:

a) $d\,|\,(a\cdot b) \Rightarrow d\,|\,a$ oder $d\,|\,b$
Gegenbeweis:
$12\,|\,(2\cdot 6)$, aber $12 \nmid 2$ und $12 \nmid 6$

b) $a\,|\,b$ und $a\,|\,c \Rightarrow a\,|\,(b+c)$
Beweis:
$a\,|\,b$ genau dann, wenn $\exists\, x_1 \in \mathbb{N}: a\cdot x_1=b$
$a\,|\,c$ genau dann, wenn $\exists\, x_2 \in \mathbb{N}: a\cdot x_2=c$
Dann gilt: $(b+c)=a\cdot x_1+a\cdot x_2=a\cdot(x_1+x_2)=a\cdot x$
$\Rightarrow a\,|\,(b+c)$, was zu zeigen war.

c) $a\,|\,b$ und $c\,|\,d \Rightarrow (a+c)\,|\,(b+d)$.
Gegenbeispiel:
$1\,|\,3$ und $2\,|\,4$, aber $(1+2) \nmid (3+4)$

d) $a\,|\,b$ und $a\,|\,c \Rightarrow a\,|\,(b\cdot c)$.
Beweis:
$a\,|\,b$ genau dann, wenn $\exists\, x_1 \in \mathbb{N}: a\cdot x_1=b$
$a\,|\,c$ genau dann, wenn $\exists\, x_2 \in \mathbb{N}: a\cdot x_2=c$
Dann gilt:
$(b\cdot c) = a\cdot x_1\cdot a\cdot x_2=a\cdot(x_1\cdot x_2\cdot a)=a\cdot x \quad \Rightarrow \quad a\,|\,(b\cdot c)$,
was zu zeigen war.

Übung 4.45:

Lösungsmöglichkeit:

a) Zahlen der Form a^3-a, mit $a \in \mathbb{N}$ und a ungerade

$a^3 - a = a \cdot (a^2 - 1) = a \cdot (a-1) \cdot (a+1) = (a-1) \cdot a \cdot (a+1)$

Da a ungerade ist, hat a die Form $a=2n+1$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Damit gilt:

$a^3 - a = (a-1) \cdot a \cdot (a+1) = ((2n+1)-1) \cdot (2n+1) \cdot ((2n+1)+1) = 2n + (2n+1) + (2n+2)$

Es handelt sich bei den Zahlen der Form a^3-a, mit $a \in \mathbb{N}$ und a ungerade, also um das Produkt dreier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, beginnend mit einer geraden Zahl.

Beim Produkt dreier aufeinanderfolgender Zahlen ist immer ein Faktor durch 2 teilbar und ein Faktor durch 3 teilbar. Damit ist die größte Zahl, welche alle Zahlen der Form a^3-a, mit $a \in \mathbb{N}$ und a ungerade teilt die Zahl $2 \cdot 3 = 6$.

b) Zahlen der Form a^3-a, mit $a \in \mathbb{N}$ und a gerade

$a^3 - a = (a-1) \cdot a \cdot (a+1)$

Da a gerade ist, hat a die Form $a=2n$, mit $n \in \mathbb{N}$.

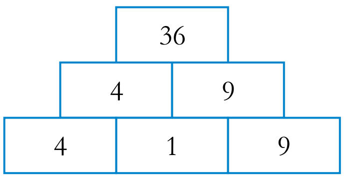
Damit gilt:

$a^3 - a = (a-1) \cdot a \cdot (a+1) = (2n-1) \cdot 2n \cdot (2n+1)$

Es handelt sich bei den Zahlen der Form a^3-a, mit $a \in \mathbb{N}$ und a gerade, wie an der Umformung zu erkennen, um das Produkt dreier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, beginnend mit einer ungeraden Zahl.

Hier gilt ebenso wie in Aufgabenteil a), dass die größte Zahl, die alle Zahlen der Form a^3-a, mit $a \in \mathbb{N}$ und a gerade teilt, die Zahl $2 \cdot 3 = 6$ ist.

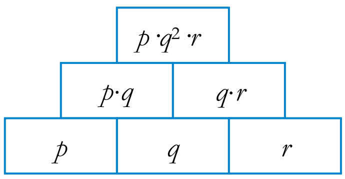
Übung 4.46:



Lösungsmöglichkeit:

a) Zahlenmauern, bei denen keine 1 verwendet werden darf:

Zahlen, die im obersten Stein stehen müssen aus mindestens vier Primfaktoren zusammengesetzt sein, wobei mindestens eine Primzahl (mittlere Primzahl in der untersten Mauerreihe) doppelt enthalten sein muss.



Die Zahl 30 kann somit nicht im obersten Stein stehen, da sich diese Zahl nur aus unterschiedlichen Primfaktoren ($30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$) zusammensetzt.

Im obersten Stein könnte beispielsweise die Zahl $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ stehen.

$2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$2\cdot3$ | $3\cdot5$

2 | 3 | 5

Ebenso könnte die Zahl $2 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5 = 630$ im obersten Stein der Zahlenmauern, bei der keine 1 verwendet werden darf.

$2 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5$

$2\cdot7\cdot3$ | $3\cdot5$

$2\cdot7$ | 3 | 5

b)

100

$2\cdot5$ | $2\cdot5$

2 | 5 | 2

100

$2\cdot5$ | $2\cdot5$

5 | 2 | 5

c) Es gibt zu allen Zahlen, die aus mindestens zwei quadratischen Teilern bestehen unterschiedliche Zahlenmauern.

a^2b^2

ab | ab

a | b | a

a^2b^2

ab | ab

b | a | b

Ebenso existieren unterschiedliche Zahlenmauern, bei Zahlen, die aus mindestens drei verschiedenen Primfaktoren bestehen, von denen mindestens einer doppelt vorkommt.

ab^2cd

ab | bcd

a | b | cd

ab^2cd

adb | bc

ad | b | c

d) Wenn in der Zahlenmauer nur verschiedene Zahlen befinden dürfen, so hat die Zahl in der Spitze die Form $a \cdot b^2 \cdot c$, mit $a, b, c \in \mathbb{N}$, mit $a \neq b \neq c$.
Die kleinste Zahl dieser Form ist $3 \cdot 2^2 \cdot 4 = 48$

48

6 | 8

3 | 2 | 4

Übung 4.47:

Lösungsmöglichkeit:
Hassediagramm der Zahl 9:

1 —— 3 —— 9

Alle Zahlen der Form p^2, mit p prim, haben dieselbe Struktur.

1 —— p —— p^2

Ein Hassediagramm der Zahl 16 unterscheidet sich strukturell, da 16 nicht das Quadrat einer Primzahl ist, sondern das Quadrat einer Quadratzahl. Zahlen dieser Art haben die Form $(p^2)^2$, mit p prim.

Das Hassediagramm der Zahl 16 hat folgende Form:

1 —— 2 —— 4 —— 8 —— 16

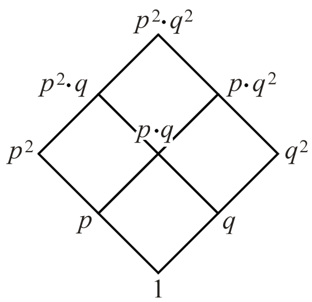
Alle Zahlen der Form $(p^2)^2$, mit p prim, habe ein Hassediagramm folgender Struktur:

1 —— p —— p^2 —— p^3 —— p^4

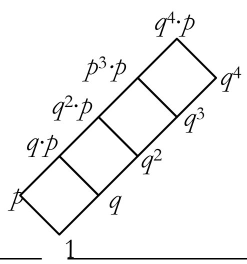
Übung 4.48:

Lösungsmöglichkeit:

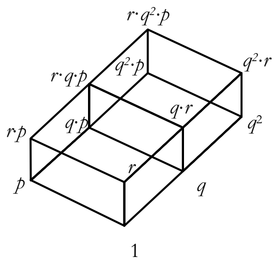
a) Beispiele: 36, 1225, 225,…
Zahlen mit einem Hassediagramm dieser Art haben die Form $p^2 \cdot q^2$, mit p und q prim.



b) Beispiele: 48, 162, 1875,…
Zahlen mit einem Hassediagramm dieser Art haben die Form $p \cdot q^4$, mit p und q prim.



c) Beispiele: 60,140, 350, …
Zahlen mit einem Hassediagramm dieser Art haben die Form $r \cdot p \cdot q2$, mit p, q und r prim.



Übung 4.49:

Lösungsmöglichkeit:

Die 12 hat 7 Kanten hat am meisten.

Form p^n hat n Kanten, also maximal 4 Kanten bei 2^4

Form $p^n q^m$ hat n(m+1)+(n+1)m Kanten, also maximal 7 bei $2^2 3$ oder $2 \cdot 3^2$

Andere Formen findet man nicht unter 20.

Übung 4.50:

Lösungsmöglichkeit:

Die Beziehung „ist kleiner gleich" ist…

1) reflexiv, da $\forall\ a \in \mathbb{N}: a \leq a$
2) antisymmetrisch, da $\forall\ a, b \in \mathbb{N}: a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a=b$
3) transitiv, da $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}: a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Die Beziehung „Untermengenbeziehung" ist…

1) reflexiv, da $\forall\ A \in \mathbb{N}: A \subseteq A$
2) antisymmetrisch, da $\forall\ A, B \in \mathbb{N}: A \subseteq B$ und $B \subseteq A \Rightarrow A=B$
3) transitiv, da $\forall\ A, B, C \in \mathbb{N}: A \subseteq B$ und $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Die Beziehung „X ist verwandt mit Y" ist…

1. reflexiv
   Da eine Person X immer mit sich selbst verwandt ist, kann diese Relation als reflexiv bezeichnet werden.
2. antisymmetrisch
   Wenn eine Person X mit einer Person Y verwandt dann ist die Person Y auch mit der Person X verwandt. Die Relation ist also sogar symmetrisch.

3. transitiv
   Wenn ein Person X mit einer Person Y verwandt ist, und diese Person Y einer Person Z verwandt ist, ist dannauch die Person X mit der Person Z verwandt? Diese Transitivität herrscht in vielen Fällen, jedoch nicht immer.
   Ein Vater ist mit seinem Sohn verwandt und dieser ist mit seiner Mutter verwandt. Aus biologischer Sicht, sind Mutter und Vater jedoch nicht verwandt . Hier muss also unterschieden werden. Aus biologischer Perspektive ist die Beziehung „X ist verwandt mit Y" nicht transitiv, aus juristischer und sozialer Perspektive kann diese Beziehung jedoch als transitiv bezeichnet werden. .

Die Beziehung „X frisst Y" ist…(Die Antworten hängen auch von der Interpretation ab, nämlich ob man „frisst" interpretiert als „frisst Tiere der Art Y " oder frisst das individuelle Tier Y.)

1. reflexiv: Da viele Tiere (beispielsweise die Schnecken) auch Tiere der eigenen Art fressen, könnte man diese Beziehung als reflexiv innerhalb der Schnecken bezeichnen. Innerhalb aller Tiere ist sie es nicht.
2. antisymmetrisch
   Wenn ein Tier X ein Tier Y frisst, so ist es nicht mehr möglich, dass das Tier Y dann auch das Tier X frisst. Die Bedingung für eine Antisymmetrie dieser Relation wäre dann erst gar nicht gegeben.
   Die Beziehung „X frisst Y" ist demnach nicht antisymmetrisch.
3. transitiv
   Wenn beispielsweise eine Katze Y eine Maus Z frisst und ein Hund X genau diese Katze Y frisst, so frisst der Hund X auch die Maus Z, die sich ja im Bauch der Katze Y befindet. Die Beziehung „X frisst Y" ist demnach transitiv.

Übung 4.51:

Lösungsmöglichkeit:

Ebenso wie für ℕ gilt auch für ℤ, dass $a|b$ genau dann, wenn $\exists\ x_1 \in \mathbb{Z}$: $a \cdot x_1 = b$. So hat eine Zahl a in ℤ auch die Teiler, die ihr Betrag $|a|$ in ℕ hat. Diese Teilermenge muss jedoch noch erweitert werden. Jede Zahl $t = t_1, \ldots, t_i$ diese Teilermenge $T_{|a|}$ kommt in ℤ sowohl mit negativem Vorzeichen als auch mit positivem Vorzeichen vor.

Beispiel:

- Bestimme Teilermenge der Zahl 12 in ℤ.
  Teilermenge der Zahl |12| in ℕ:
  $T_{|12|} = T_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

  ⇒ Teilermenge der Zahl 12 in ℤ:
  $T_{12} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

- Bestimme Teilermenge der Zahl (-12) in ℤ.
  Teilermenge der Zahl |(-12)| in ℕ:
  $T_{|(-12)|} = T_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

  ⇒ Teilermenge der Zahl (-12) in ℤ:
  $T_{(-12)} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

Übung 4.52

Lösungsmöglichkeit:

a) Beispiele:

$T_{16} = \{1; 2; 4; 8; 16\}$

$T_{81} = \{1; 3; 9; 27; 81\}$

$T_{625} = \{1; 5; 25; 125; 625\}$

$T_{2401} = \{1; 7; 49; 343; 2401\}$

$T_{14641} = \{1; 11; 121; 1331; 14641\}$

Allgemein gilt, dass alle Zahlen der Form p^4, mit p prim, fünf Teiler besitzen.
Es gilt, dass eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ insgesamt $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_k+1)$ verschiedene Teiler hat. Nach diesem Satz und da die Teileranzahl 5 als Primzahl nur in das Produkt $1 \cdot 5$ zerlegt werden kann, kann eine Zahl mit fünf verschiedenen Teiler nur die Form p^4, mit p prim, besitzen.

$T_{p^4} = \{1; p; p^2; p^3; p^4\}$

b) Beispiele:

$T_{243} = \{1; 3; 9; 27; 81; 243\}$

$T_{12} = \{1; 2\ 3; 4; 6; 12\}$

Allgemein gilt, dass alle Zahlen mit sechs verschiedenen Teilern entweder die Form p^5, mit p prim, oder die Form $p^2 \cdot q$, mit p, q prim besitzen.
Da die Teileranzahl 6 nur in das Produkt $1 \cdot 6$ (Form p^5, mit p prim) und das Produkt $2 \cdot 3$ (Form $p^2 \cdot q$, mit p, q prim) zerlegt werden kann, gibt es nach dem Satz über die Teileranzahl nur diese beiden möglichen Formen für Zahlen mit sechs verschiedenen Teilern.

$T_{p5} = \{1; p; p^2; p^3; p^4; p^5\}$, mit p prim

$T_{q \cdot p^2} = \{1; p; p^2; q; p \cdot q; p^2 \cdot q\}$, mit p, q prim

c) Die Zahl 17 ist eine Primzahl und kann somit nur als das Produkt $1 \cdot 17$ dargestellt werden. Somit haben Zahlen mit 17 verschiedenen Teilern, nach dem Satz über die Teileranzahl immer die Form p^{16}, mit p prim.

Übung 4.53:

Lösungsmöglichkeit:

a) Es gilt, dass eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ insgesamt $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_k+1)$ verschiedene Teiler besitzt.
Alle Zahlen mit zehn verschiedenen Teilern können nach diesem Satz entweder die Form p^9, mit p prim, oder die Form $p^4 \cdot q$, mit p, q prim, besitzen.
Nun können für die Variablen p und q Primzahlen eingesetzt werden. Die kleinste Zahl mit zehn verschiedenen Teilern erhält man mit der Form $p^4 \cdot q$, mit den Primzahlen $p=2$ und $q=3$.
Die kleinste Zahl mit zehn verschiedenen Teilern ist somit die Zahl $2^4 \cdot 3=48$.

$T_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$

b) Eine größte Zahl mit genau sechs Teilern kann es nicht geben, da es unendlich viele Primzahlen gibt, und alle Zahlen der Form p^5 gibt.

Übung 4.54:

Lösungsmöglichkeit:
Eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ besitzt insgesamt $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$ verschiedene Teiler.
Alle Zahlen mit 20 verschiedenen Teilern können nach diesem Satz folgende Formen besitzen:

- p^{19}, mit p prim, da $(19+1)=20$
- $p^4 \cdot q^3$, mit p, q prim, da $(4+1)\cdot(3+1)=20$
- $p \cdot q^9$, mit p, q prim, da $(1+1)\cdot(9+1)=20$
- $p \cdot q \cdot r^4$, mit p, q, r prim, , da $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(4+1)=20$

Also kann eine Zahl mit 20 verschiedenen Teilern höchstens drei verschiedene Primfaktoren p, q, r besitzen.

Übung 4.55:

Lösungsmöglichkeit:
Eine mögliche Definition für den „Teilerreichtum“ einer Zahl könnte man an der Summe ihrer echten Teiler festmachen. Primzahlen haben nur 1 als echten Teiler, bei 30 gilt

$$1+2+3+5+6+10+15 = 42 > 30.$$

Man könnte also von einer „teilerreichen Zahl“ dann gesprochen wird, wenn die Summe ihrer echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.
Die Teilermenge der Zahl 28 ist

$$T_{28=}\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

Damit ist die Summe der echten Teiler gleich der der Zahl 28:

$$1+2+4+7+14=28.$$

Teilerreiche Zahlen sind:
12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102, 104, 108, 112, 114, 120, 126, 132, 138, 140, 144, 150, 156, 160, 162, 168, 174, 176, 180, 186, 192, 196, 198, 200, 204, 208, 210, 216, 220, 222, 224, 228, 234, 240, 246, 252, 258, 260, 264, 270, ... vgl. http://oeis.org/A005101

Übung 4.56:

Lösungsmöglichkeit:

a) Verwandte
Beispiele:
Die Zahlen 15 und 20 sind verwandt, denn sie haben beide die Zahl 5 als Teiler.
Die Zahlen 7 und 14 sind verwandt, denn sie haben beide die Zahl 7 als Teiler.
Die Zahlen 30 und 60 sind verwandt, denn sie haben beide die Zahlen 2, 3, 5, 6, 10, 15 und 30 als Teiler.
Allgemein gilt, dass jede Zahl mit ihren Vielfachen und ihren Teilern verwandt ist.

b) Fremde
Beispiele:
Die Zahlen 9 und 16 sind fremd, denn sie haben außer der 1 keine gemeinsamen Teiler.
Die Zahlen 14 und 55 sind fremd, denn sie haben außer der 1 keine gemeinsamen Teiler.
Die Zahlen 7 und 11 sind fremd, denn sie haben außer der 1 keine gemeinsamen Teiler.

Allgemein gilt, dass fremde Zahlen keinen gemeinsamen Teiler, mit Ausnahme der 1, besitzen.
Somit können nur ungerade Zahlen fremd sein, da alle gerade Zahlen miteinander verwandt sind, da diese alle die Zahl 2 als gemeinsamen Teiler besitzen.
Weiter gilt, dass alle Primzahlen fremd mit jeder anderen Zahl sind, da Primzahlen laut Definition nur die 1 und sich selbst als Teiler besitzen.

c) Familien
Beispiele:
Die Zahlen 22, 44 und 242 gehören zu einer Familie, da sie alle nur die Primfaktoren 2 und 11 besitzen.
Die Zahlen 5, 15 und 45 gehören zu einer Familie, da sie alle nur die Primfaktoren 3 und 5 besitzen.
Die Zahlen 42, 84 und 588 gehören zu einer Familie, da sie alle nur die Primfaktoren 2, 3 und 7 besitzen.
Allgemein gilt, dass alle Zahlen zu einer Familie gehören, welche sich in ihrer Primfaktorzerlegung nur in den Potenzen der einzelnen Primfaktoren unterscheiden.

d) Angeber
Beispiele: Die Zahlen 51, 57 und 27 könnte man zu den Angebern zählen.
Angeberzahlen findet man unter den Zahlen, deren Ziffern (oder zumindest die Einerziffer) nur aus einstelligen Primzahlen, also der 3, der 5 oder der 7, gebildet werden.

e) Reiche Zahlen
Beispiele:
Die Zahl 48 ist eine reiche Zahl, da sie die Teilermenge

$T_{48}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

besitzt.
Die Zahl 625 ist eine reiche Zahl, da sie die Teilermenge

$T_{625}=\{1, 5, 25, 125, 625\}$

besitzt.
Die Zahl 162 ist eine reiche Zahl, da sie die Teilermenge

$T_{162}=\{1, 2, 3, 6, 9, 27, 18, 54, 81, 162\}$

besitzt.
Eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ hat insgesamt $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_k+1)$ verschiedene Teiler. Nach diesem Satz gilt allgemein, dass alle Zahlen, deren Primfaktorzerlegung aus mindestens drei Primfaktoren besteht reich sind, da diese Zahlen mindestens vier Teiler besitzen.

f) Arme Zahlen
Beispiel: Die Zahl 4 ist eine arme Zahl, da sie die Teilermenge

$T_4=\{1, 2, 4\}$

besitzt. Die Zahl 49 ist eine arme Zahl, da sie die Teilermenge

$T_{625}=\{1, 7, 49\}$

besitzt. Die Zahl 121 ist eine arme Zahl, da sie die Teilermenge

$T_{162}=\{1, 11, 121\}$

besitzt.
Nach dem Satz über die Anzahl der Teiler gilt allgemein, dass alle Zahlen der Form p^2, mit p prim, arme Zahlen sind.

g) Ganz arme Zahlen
Beispiele:
Die Zahl 2 ist eine ganz arme Zahl, da sie die Teilermenge

$T_4=\{1, 2\}$

besitzt.
Die Zahl 11 ist eine ganz arme Zahl, da sie die Teilermenge

$T_{11}=\{1, 11\}$

besitzt.
Die Zahl 101 ist eine ganz arme Zahl, da sie die Teilermenge

$T_{101}=\{1, 101\}$

besitzt.
Nach dem Satz über die Anzahl der Teiler gilt allgemein, dass alle Primzahlen ganz arme Zahlen sind.

h) Ganz, ganz arme Zahlen
Beispiele: Die Zahl 1 ist eine ganz, ganz arme Zahl, da sie die Teilermenge $T_1=\{1\}$ besitzt. Die Zahl 1 ist die einzige Zahl, welche genau einen Teiler besitzt und damit ganz, ganz arm ist.

Übung 4.57:

Lösungsmöglichkeit:
Eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ besitzt insgesamt $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_k+1)$ verschiedene Teiler.

Die Primfaktorzerlegung der Zahl 1000 ist $1000=2^3 \cdot 5^3$: Damit besitzt diese Zahl $(3+2) \cdot (3+1)= 4 \cdot 4 = 16$ Teiler.

Die Primfaktorzerlegung jeder Zehnerpotenz hat die Form $2^n \cdot 5^n$, mit $n \in \mathbb{N}$. Somit besitzt eine Zehnerpotenz immer $(n+1) \cdot (n+1)$ Teiler. Eine Zehnerpotenz, deren Teileranzahl viermal so groß ist, wie die Teileranzahl der Zahl 100 besitzt $4 \cdot 16 = 64$ Teiler. Damit muss gelten, dass $(n+1) \cdot (n+1)=64$. Durch das Auflösen der Gleichung erhält man $n = 7$. Damit ist die gesuchte Zehnerpotenz die Zahl $2^7 \cdot 5^7=10.000.000$.

Übung 4.58

Lösungsmöglichkeit:
Zahlen haben genau dann die Eigenschaft „$2x$ hat doppelt so viele Teiler wie x“, wenn x kein Vielfaches von 2 ist. Wäre x ein Vielfaches von 2, so hätte es die Form $x=2n$, mit $n \in \mathbb{N}$. $2x$ hat dann die Form $2 \cdot 2n=2^2 \cdot n$. Diese Zahl kann jedoch nicht mehr doppelt so viele Teiler wie x besitzen.

Beispiele:

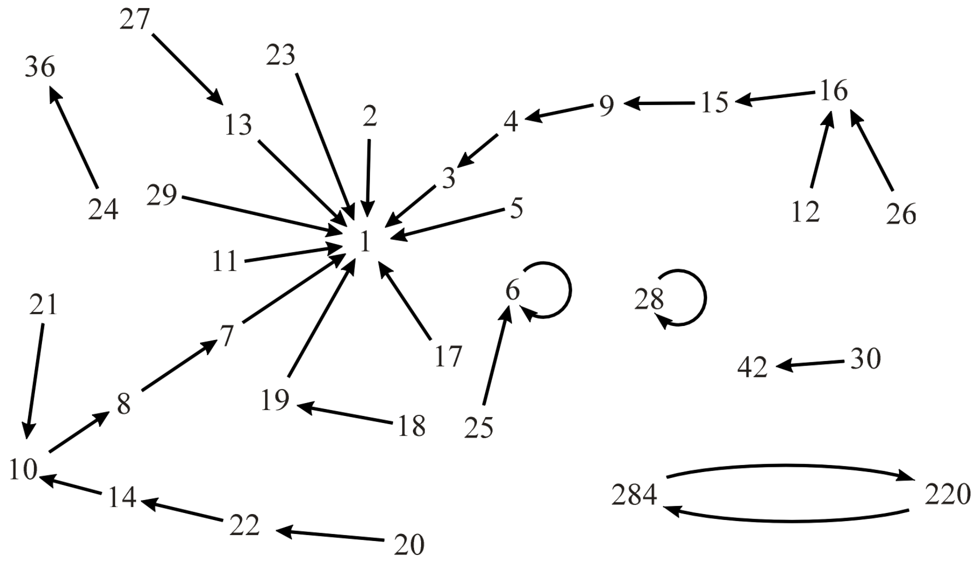
a) x ist kein Vielfaches der Zahl 2:
$x = 3^1 \cdot 5^2$; $|T_x|=(1+1) \cdot (2+1)=6$
$2x = 2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$; $|T_{2x}|=(1+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1)=2\ 6=12$

b) x ist ein Vielfaches der Zahl 2:
$x=2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$; $|T_x|=(3+1)\ (1+1) \cdot (2+1)=24$
$2x=2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$; $|T_{2x}|=(4+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1)=30$

Übung 4.59:

Lösungsmöglichkeit:

a) Zeichnung



Besondere Eigenschaften des Bildes:

- Alle Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29) zeigen nur zur Zahl 1, da Primzahlen als echten Teiler nur die Zahl 1 besitzen.
- Es gibt Zahlen, deren Summe der echten Teiler die Zahl selbst ist (6, 28). Diese Zahlen werden als „vollkommenen Zahlen" bezeichnet.
  Die Teilermenge der Zahl 6 ist $T_{30}=\{1, 2, 3, 6\}$. Damit ist die Summe der echten Teiler $1+2+3=6$.
- Es gibt „teilerreiche Zahlen" (12, 20, 30). Bei „teilerreichen Zahlen" ist die Summe der echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.
  Die Teilermenge der Zahl 30 ist $T_{30}=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Die Summe der echten Teiler ist bei dieser Zahl also größer als die Zahl selbst: $1+2+3+5+6+10+15=42>30$.
- Es gibt „teilerarme Zahlen" (4, 6, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 26, 27). Von „teilerarmen Zahlen" spricht man dann, wenn die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist. Ein Beispiel für eine „teilerarme Zahl" ist die Zahl 25. Die Teilermenge der Zahl 25 ist $T_{25}=\{1, 5, 25\}$. Damit ist die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst: $1+5=6<25$.

a) Die Summe der echten Teiler der Zahl 284 ist $1+2+4+71+142=220$. Die Summe der echten Teiler der Zahl 220 ist wiederum

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284.$$

Wenn die Summe der echten Teiler einer Zahl *a* eine Zahl *b* ist und die Summe der echten Teiler der Zahl *b* dann *a* ist, so spricht man von „befreundeten Zahlen".

Übung 4.60:

Lösungsmöglichkeit:

Eine Zahl 2^n hat immer die Form $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots}_{n\text{-mal}}$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Eine Zahl $n!$ hat immer die Form $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele:

1. $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

   $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

   Gemeinsame Teiler: 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4

2. $2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

   $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

   Gemeinsame Teiler: 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7

3. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

   $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^3 \cdot 3$

   Gemeinsame Teiler: 1, 2, 2^2, 2^3

Für alle Potenzen der Zahl 2 gilt:

$T_{2^n} = \{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}, 2^n\}$

Somit können gemeinsame Teiler der Zahlen $n!$ und 2^n nur Zahlen der Form 2^a, mit $a \in \mathbb{N}$ und $a \leq n$ sein.
Nun muss also untersucht werden, in welcher höchsten Potenz der Faktor 2 in $n!$ steckt.
In den n Faktoren von $n!$ sind $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Faktoren, die einen Faktor 2 enthalten.
In den n Faktoren von n! sind $\left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor$ Faktoren, die einen Faktor 2^2 enthalten, $\left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor$ Faktoren, die einen Faktor 2^3 enthalten,…
Allgemein kann also gesagt werden, dass in den n Faktoren von $n!$ genau
$b = \sum_{i=1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$ mal der Faktor 2 enthalten ist.
Somit sind die gemeinsamen Teiler T von 2^n und $n!$: $T = \{2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^b\}$

Beispiel:
Betrachtet werden 10! und 2^{10}:
10! enthält $b = \left\lfloor \frac{10}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^1} \right\rfloor = 1 + 2 + 5 = 8$ mal den Faktor 2
Gemeinsame Teiler T von 10! und 2^{10} sind damit

$T = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8\}$

Übung 4.61:

Lösungsmöglichkeit:

a) $\sigma(p)$ mit p Primzahl
Für alle Primzahlen p gilt, dass $\sigma(p)=1$. Eine Primzahl p besitzt explizit der Primzahl p selbst nur die Zahl 1 als Teiler. Da die Zahl 2 die kleinste aller Primzahlen ist, ist die Teilersumme immer kleiner als eine beliebige Primzahl selbst. Alle Primzahlen sind daher defizient.

b) $\sigma(p^2)$, $\sigma(p^3)$, …mit p Primzahl
Beispiele:
- für $p=2$
  $\sigma(2^2)=1+2=3<2^2$
  $\sigma(2^3)=1+2+4=7<2^3$
  $\sigma(2^5)=1+2+4+8+16=31<2^5$

- für $p=3$
  $\sigma(3^2)=1+3=4<3^2$
  $\sigma(3^3)=1+3+9=13<3^3$
  $\sigma(3^5)=1+3+9+27+16=121<3^5$

- für $p=7$
  $\sigma(7^2)=1+7=8<7^2$
  $\sigma(7^3)=1+7+49=57<7^3$
  $\sigma(7^5)=1+7+49+343+2401=5602<7^5$

Allgemein gilt, dass alle Primzahlen und deren Potenzen, also Zahlen der Form p^n, …, mit p prim und $n \in \mathbb{N}$ defizient sind.
Es gilt für $\sigma(p^n)$, mit p prim und und $n \in \mathbb{N}$: $\sigma(p^n)=\frac{p^n-1}{n-1}$.

Beweis: Da p eine Primzahl ist, sind die Teiler von p^n: $T_{p^n}=\{p^0, p^1, p^2, \ldots, p^n\}$. Die Summe der Teiler, explizit der Zahl p selbst, ist damit die geometrische Reihe $p^0+p^1+p^2+\ldots+p^{n-1}$.
Diese geometrische Reihe lässt sich mit der Formel
$\sigma(p^n) = \frac{p^n-1}{n-1}$ berechnen, was zu zeigen war.
Die am wenigsten defizienten Primzahlpotenzen sind die Potenzen der Primzahl 2.
Bei allen Zahlen der Form p^2, p^3, …, mit $p=2$ gilt, dass die Summe aller Teiler nur um 1 kleiner ist als die Zweierpotemz: $\sigma(2^n)=2^n-1$.
Man nennt die Zweierpotenzen aus diesem Grund „leicht defizient".

c) $\sigma(p \cdot q)$ mit p und q Primzahl
Beispiele:
- für $p=3$, $q=5$
  $\sigma(3\cdot5)=1+3+5=9<3\cdot5$

- für $p=3$, $q=11$
  $\sigma(3\cdot11)=1+3+11=15<3\cdot11$

Allgemein gilt, dass das Produkt zweier Primzahlen die Teilermenge $T_{p\cdot q}=\{1,p, q, p\cdot q\}$ besitzt. Damit gilt für die Teilersumme $\sigma(p \cdot q)$, mit p und q Prim, dass diese um 1 größer ist als die Summe der beiden Primzahlen p und q: $\sigma(p \cdot q)=1+p+q$.

d) „vollkommene Zahlen“

Eine Zahl heißt „vollkommene Zahl“, wenn die Zahl gleich der Summe ihrer Teiler explizit der Zahl selbst ist.

Die Summe der Teiler der Zahl 6, explizit der Zahl 6 selbst ist 1+2+3=6. Damit ist die Zahl 6 eine „vollkommene Zahl“. Sie ist zudem die kleinste „vollkommene Zahl“.

Beispiele für weitere „vollkommene Zahlen“:

- Die Zahl 28 ist eine „vollkommene Zahl“, da $\sigma(28)=1+2+4+7+14=28$
- für p=3, q=11 • Die Zahl 496 ist eine „vollkommene Zahl“, da $\sigma(496)=1+2+4+8+16+32+62+124+248=496$

Euklid stellte fest, dass mit Hilfe der Formel $2^{n-1}\cdot(2^n-1)$, mit $n \in \mathbb{N}$, „vollkomme Zahlen“ erzeugt werden könne, wenn 2^n-1 eine Primzahl ist.

Übung 4.62:

Lösungsmöglichkeit:

Zahl n	kleinste Zahl, die durch alle 1,…, n teilbar ist.
1	1
2	2
3	6
4	12
5	60
6	60
7	420
8	840
9	2520
10	2520
11	27720
12	27720
13	360360
14	360360
15	360360
16	720720
…	…

Die kleinste Zahl x, die man durch jeweils die ersten n ganzen Zahlen teilen kann ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 1,…, n. Das kleinste gemeinsame Vielfache ist definiert als

$$\mathrm{kgV}(a,b) = p_1^{\max(n_1 \cdot m_1)}\ p_2^{\max(n_2 \cdot m_2)} \cdot \ldots\ p_k^{\max(n_k \cdot m_k)},$$

wobei $p_1, p_2,\ldots, p_k$ prim sind und n, $m \in \mathbb{N}$.

Die kleinste Zahl x die durch die jeweils ersten n ganzen Zahlen teilbar ist ändert sich beim Hinzukommen einer weiteren Zahl n+1 nur dann, wenn die Primfaktorzerlegung der Zahl n+1 einen neuen Primfaktor enthält, welchen die Primfaktorzerlegungen der ersten n Zahlen nicht enthielt, oder einen Primfaktor enthält, welcher in den ersten n Zahlen zwar enthalten ist, jedoch mit einer geringeren Potenz.

Übung 4.63:

Lösungsmöglichkeit:

a) Vermutung:
Alle Zahlen, welche nur die Ziffer 9 enthalten, sind durch 9 teilbar.
Beispiele:

$9|999$, da $9\cdot 111=999$

$9|999999$, da $9\cdot 111111=999999$

Begründung:
Um die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 zu zeigen, muss die Quersumme $Q(n)=a_0+a_1+\ldots+a_k$, mit $k\in\mathbb{N}$, betrachtet werden.
Allgemein gilt, dass eine Zahl n genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 9 teilbar ist:

$9|n \Leftrightarrow 9|Q(n)$, mit $n\in\mathbb{N}$.

Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot 10^i$

Diese Darstellung kann in folgender Art umgeformt werden:

$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=$
$a_k\cdot(10^k-1)+a_k+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+a_{k-1}+\ldots+a_2\cdot 99+a_2+a_1\cdot 9+a_1+a_0=$
$a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9+a_k+a_{k-1}+a_1+a_0=$
$a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9+Q(n)$

Die Zahl $a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9$ ist durch 9 teilbar und damit gilt auch, dass

$9|\ a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9$ ($a|b \Rightarrow a|c\cdot b$, für $a, b, c\in\mathbb{N}$ und $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c\in\mathbb{N}$).

Die Quersumme einer Zahl, welche nur aus den Ziffern 9 besteht, ist immer ein Vielfaches von 9 und damit teilbar durch 9. Da die Quersumme einer solchen Zahl immer durch 9 teilbar ist, so muss nach obiger Begründung auch jede Zahl die nur aus der Ziffer 9 besteht durch 9 teilbar sein.

b) Vermutung:
Alle Zahlen, welche nur die Ziffer 9 enthalten, sind durch 3 teilbar.

Beispiele:

$3|99$, da $3\cdot 33=99$

$3|999999$, da $3\cdot 333333=999999999$

Begründung:
Allgemein gilt für die Teilbarkeit durch 3, dass eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersummen $Q(n)=a_0+a_1+\ldots+a_k$, mit $k\in\mathbb{N}$, durch 3 teilbar ist:

$3|n \Leftrightarrow 3|Q(n)$, mit $n\in\mathbb{N}$.

Die Begründung erfolgt damit analog zur Begründung der Teilbarkeit durch 9.
Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:
$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot 10^i$
Diese Darstellung kann in folgender Art umgeformt werden:

$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=$
$a_k\cdot(10^k-1)+a_k+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+a_{k-1}+\ldots+a_2\cdot 99+a_2+a_1\cdot 9+a_1+a_0=$

$a_k\cdot(10^k-1) + a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1) + \ldots + a_2\cdot 99 + a_1\cdot 9 + a_k + a_{k-1} + a_1 + a_0 =$
$a_k\cdot(10^k-1) + a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1) + \ldots + a_2\cdot 99 + a_1\cdot 9 + Q(n)$

Die Zahl $a_k\cdot(10^k-1) + a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1) + \ldots + a_2\cdot 99 + a_1\cdot 9$ ist durch 3 teilbar, da $3|9$ und damit auch

$3|\, a_k\cdot(10^k-1) + a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1) + \ldots + a_2\cdot 99 + a_1\cdot 9$ ($a|b \Rightarrow a|cb$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Somit ist eine Zahl n genau dann durch 3 teilbar, wenn $3|Q(n)$.
Für die Quersumme einer Zahl, welche nur aus den Ziffern 9 besteht gilt, dass diese immer ein Vielfaches von 9 und damit auch immer ein Vielfaches von 3 ist. Aus diesem Grund ist die Quersumme einer Zahl, welche nur aus den Ziffern 9 besteht immer teilbar durch 3. Nach obiger Begründung muss auch jede Zahl, welche nur die Ziffer 9 beinhaltet, durch 3 teilbar sein.

c) Vermutung:
Eine Zahl, welche nur au den Ziffern 9 und 1 besteht, wobei die Anzahl der Einsen $A(1)$ immer ein Vielfaches von 3 ist ($A(1)=k\cdot 3$, mit $k \in \mathbb{N}$), ist immer durch 3 teilbar.

Beispiele:

$3|91119$, da $3\cdot 30373=91119$
$3|9191919$, da $3\cdot 3063973=9191919$

Begründung:
Allgemein gilt für die Teilbarkeit durch 3, dass eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersummen $Q(n)=a_0+a_1+\ldots+a_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, durch 3 teilbar ist:
$3|n \Leftrightarrow 3|Q(n)$, mit $n \in \mathbb{N}$.
Für eine Zahl, welche nur aus den Ziffern 9 und 1 besteht, wobei die Anzahl der Einsen $A(1)$ ein Vielfaches von 3 ist, gilt für die Quersumme der Zahl, dass diese ebenfalls ein Vielfaches von 3 ist. Aus diesem Grund ist die Quersumme einer Zahl dieser Form immer durch 3 teilbar. Somit muss auch die Zahl selbst durch 3 teilbar sein.

d) Vermutung:
Eine Zahl, die nur aus den Ziffern 9 und 1 besteht, wobei die Anzahl der Einsen $A(1)$ ein Vielfaches der Zahl 9 ist ($A(1)=k\cdot 9$, mit $k \in \mathbb{N}$), ist immer durch 9 teilbar.

Beispiele:

$9|9111111111$, da $9\cdot 1012345679=9111111111$
$9|91191191191191$, da $9\cdot 10132354576799=91191191191191$

Begründung:
Allgemein gilt für die Teilbarkeit durch 9, dass eine Zahl genau dann durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersummen $Q(n)=a_0+a_1+\ldots+a_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, durch 9 teilbar ist:
$9|n \Leftrightarrow 9|Q(n)$, mit $n \in \mathbb{N}$.
Für eine Zahl, welche nur aus den Ziffern 9 und 1 besteht, wobei die Anzahl der Einsen $A(1)$ ein Vielfaches der Zahl 9 ist, gilt für die Quersumme der Zahl, dass diese immer ein Vielfaches von 9 ist. Somit muss auch die Zahl selbst durch 9 teilbar sein.

e) Vermutung:
Eine Zahl, welche nur aus der Ziffer 9 besteht, wobei die Anzahl der Neunen $A(9)$ gerade ist ($A(9)=k\cdot 9$, mit $k \in \mathbb{N}$ und k gerade), ist immer durch 11 teilbar.
Beispiele:

$11|99$, da $11\cdot 9=99$

11|999999, da 11·90909=999999

Begründung:
Für gerade $k \in \mathbb{N}$ ist folgende Zerlegung einer Zahl, welche ausschließlich die Ziffer 9 enthält, möglich:

$$\underbrace{99\ldots99}_{\text{k-Stellen 9}}=99\underbrace{00\ldots00}_{\text{(k-2)-Stellen 0}}+\ldots+990000+9900+99$$
$$=99\cdot1\underbrace{00\ldots00}_{\text{(k-2)-Stellen 0}}+\ldots+99\cdot10000+99\cdot100+99$$

99 ist ein Vielfaches von 11, ebenso sind alle Vielfachen von 99 auch Vielfache von 11. Folglich sind alle Zahlen der Form $\underbrace{99\ldots99}_{\text{k-Stellen 9}}$ für $k \in \mathbb{N}$ und k gerade, durch 11 teilbar.

f) Vermutung:

Zahlen, die nur aus der Ziffer 1 bestehen, wobei die Anzahl der Einsen $A(1)$ gerade ist ($A(1)=k\cdot 1$, mit $k \in \mathbb{N}$ und k gerade), sind immer teilbar durch Zahlen, welche nur aus der Ziffer 1 bestehen, wobei die Anzahl der Einsen $A(1)=i \in \mathbb{N}$, mit $i = \frac{k}{2}$ ist. Das Ergebnis einer solchen Division hat immer die Form 10…1, wobei die Anzahl der Nullen $A(0) = u \in \mathbb{N}$, mit $u = \frac{k}{2}$-1 ist.

Beispiele:

11|1111, da 11·101=1111

1111|11111111, da 1111·10001=11111111

g) Vermutung:

Zahlen, die nur aus der Ziffer 9 bestehen, wobei die Anzahl der Neunen $A(9)$ gerade ist ($A(9)=k\cdot 9$, mit $k \in \mathbb{N}$ und k gerade), sind immer teilbar durch Zahlen, welche nur aus der Ziffer 9 bestehen, wobei die Anzahl der Neunen $A(9)=i \in \mathbb{N}$, mit $i = \frac{k}{2}$ ist. Das Ergebnis einer solchen Division hat immer die Form 10…1, wobei die Anzahl der Nullen $A(0)=u \in \mathbb{N}$, mit $u = \frac{k}{2}$-1.

Beispiele:

99|9.999, da 99·101=9.999

99.999|9.999.999.999, da 99.999·100.001=9.999.999.999

Übung 4.64:

Lösungsmöglichkeit:

Zahl n	Anzahl der Teiler $\lvert T_n \rvert$	„teilerreiche" Zahl?
0	0	keine Aussage
1	1	teilerreich
2	2	teilerreich
3	2	nicht teilerreich
$4=2^2$	3	teilerreich

5	2	nicht teilerreich
6=2·3	4	teilerreich
7	2	nicht teilerreich
$8=2^3$	4	nicht teilerreich
$9=3^2$	2	nicht teilerreich
10=2·5	4	nicht teilerreich
11	2	nicht teilerreich
12	6	teilerreich
13	2	nicht teilerreich
14	4	nicht teilerreich
15	4	nicht teilerreich
16	5	nicht teilerreich
17	2	nicht teilerreich
18	6	nicht teilerreich
19	2	nicht teilerreich
20	6	nicht teilerreich
21	4	nicht teilerreich
22	4	nicht teilerreich
23	2	nicht teilerreich
24	8	teilerreich
25	3	nicht teilerreich
26	4	nicht teilerreich
27	4	nicht teilerreich
28	6	nicht teilerreich
29	2	nicht teilerreich
30	8	nicht teilerreich
…	…	…

Die Reihe der teilerreichen Zahlen:

1($|T_1|$=1), 2($|T_2|$=2), 4($|T_4|$=3), 6($|T_6|$=4), 12($|T_{12}|$=6), 24($|T_{24}|$=8), 36($|T_{36}|$=9), 48($|T_{48}|$=10), 60($|T_{60}|$=12), 120($|T_{120}|$=16), 180($|T_{180}|$=18), 240($|T_{240}|$=20), 360($|T_{360}|$=24), 720($|T_{720}|$=30), 8490($|T_{840}|$=32), 1260($|T_{1260}|$=36), …

Regelmäßigkeiten der teilerreichen Zahlen in der Folge der natürlichen Zahlen:

Zunächst ist auffällig, dass es Zahlen gibt, welche keine teilerreichen Zahlen sein können. Es handelt sich hierbei um die Primzahlen, denn alle teilerreichen Zahlen sind zusammengesetzte Zahlen. Primzahlen haben immer die Teileranzahl $|T_p|$=2, mit p prim. Eine Ausnahme ist die Primzahl 2. Sie ist die einzige Primzahl, welche als teilerreich bezeichnet werden kann, da sie mit ihren zwei Teilern einen Teiler mehr als ihre Vorgängerzahl 1 hat. Auch die Zahl 1 kann als teilerreich bezeichnet werden, obwohl es sich nicht um eine zusammengesetzte Zahl handelt. Die Zahl 1 besitzt einen Teiler mehr als ihre Vorgängerzahl 0, welche keinen Teiler besitzt, und ist damit eine teilerreiche Zahl.
Zu erkennen ist auch, dass einige Zahlen relativ schnell von einer Nachfolgerzahl in der Anzahl ihrer Teiler geschlagen werden. Beispielsweise wird die Zahl 36 schon von der Zahl 48 in ihrer Teileranzahl überholt. Einige wenige Zahlen, wie die Zahlen 2, 6, 12, 60 oder die Zahl 360 werden erst von ihrer doppelt so großen Zahl in der Anzahl der Teiler übertroffen. Dies ist eine Besonderheit, da spätestens eine Verdoppelung einer Zahl zu einer Erhöhung der Teileranzahl führen muss. Allgemein gilt, dass eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ insgesamt $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$ verschiedene Teiler besitzt. Wenn eine Zahl nun verdoppelt wird, so

kommt ein Primfaktor 2 hinzu und die Anzahl der Teiler erhöht sich deshalb um mindestens einen Teiler.
Mit Hilfe des Satzes über die Anzahl der Teiler, also dass eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ insgesamt $(n_1+1) \cdot (n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_k+1)$ verschiedene Teiler besitzt, kann man erkennen, dass es unendlich viele teilerreiche Zahlen geben muss. Durch Multiplizieren einer teilerreichen Zahl mit einem weiteren Primfaktor kann eine neue teilerreiche Zahl konstruiert werden. Auf diese Weise können unendlich viele teilerreiche Zahlen konstruiert werden.

Übung 4.65 fehlt (auch im Buch)

Übung 4.66: Lösungsmöglichkeit:

Sei $x \in \mathbb{N}$ und $T(x)$ die Summe aller Teiler von x:

$T(x) = t_1 + t_2 + \ldots + t_i$, wobei $t_1, \ldots, t_i$ alle Teiler der Zahl x sind (einschließlich der Zahl 1 und der Zahl x selbst).

Aus der Graphik können verschiedenen Muster identifiziert werden:

a) Für alle $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt:
$T(x) > x$

Beispiele:
$T(4) = 1+2+4 = 7 > 4$
$T(15) = 1+3+5+15 = 24 > 15$

Begründung:
Bei der oben definierten Teilersumme $T(x)$ werden alle Teiler, einschließlich der Zahl selbst, aufsummiert. Da jede Zahl, mit Ausnahme der 1, außer sich selbst noch einen weiteren Teiler besitzt, muss die Teilersumme $T(x)$ also größer als die Zahl x selbst sein. Für $x=1$ gilt: $T(1)=1$.

b) Für p prim gilt:
$T(p) = p+1$

Beispiele:
$T(3) = 1+3$
$T(11) = 1+11$

Begründung:
Da p eine Primzahl ist, sind die Zahl 1 und die Primzahl p selbst die einzigen Teiler dieser Zahl.
Punkte, welche für Teilermengen dieser Art stehen, werden für große x immer weniger, da es in „höheren Regionen“ der Zahlen immer weniger Primzahlen gibt.

c) Für einige Zahlen $x \subset \mathbb{N}$ gilt:
$T(x) = 2x$
Diese Zahlen werden als „vollkommene Zahlen“ bezeichnet.

Beispiele:
$T(6) = 1+2+3+6 = 12 = 2 \cdot 6$
$T(28) = 1+2+4+7+14+28 = 56 = 2 \cdot 6$

d) Für einige Zahlen $x \subset \mathbb{N}$ gilt:

$T(x) > 2x$

Diese Zahlen werden als „abundant Zahlen" bezeichnet.

Beispiele:

$T(12)=1+2+3+4+6+12=28>2\cdot 12$

$T(30)=1+2+3+5+6+10+15+30=72>2\cdot 30$

e) Für einige Zahlen $x \subset \mathbb{N}$ gilt:

$T(x) < 2x$

Diese Zahlen werden als „defiziente Zahlen" bezeichnet.

Beispiele:

$T(8)=1+2+4+8=15<2\cdot 8$

$T(14)=1+2+7+14=24<2\cdot 14$

Übung 4.67:

Lösungsmöglichkeit:

a) Teilbarkeitskriterien:

Endstellenregeln:

1. Zahlen, die durch 2 teilbar sind:

   Beispiele:

   $2|1234567890$, da $2\cdot 617283945=1234567890$

   $2|1348925076$, da $2\cdot 674462538=1348925076$

   $2\nmid 3409812567$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $2\cdot x=3409812567$

   Regel:

   Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 2 teilbar sind, muss nur die letzte Ziffer der jeweiligen Zahl betrachtet werden. Handelt es sich bei der letzten Ziffer a_0 um eine 0, 2, 4, 6 oder um eine 8, so ist die Zahl n durch zwei teilbar.

   Begründung:

   Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

   $n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$

   Da die Zahl 2 die Zahl 10 teilt, teilt die Zahl 2 auch alle Vielfachen der Zahl 10:

   $2|10 \Rightarrow 2|a_i\cdot 10^i$, mit $i \in \mathbb{N}$ und $i\geq 1$ ($a|b \Rightarrow a|c\cdot b$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

   Weiter gilt, dass die Zahl 2 damit auch die Summe $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot 10^i$ teilt:

   ($a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

   Somit ist eine Zahl n genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer a_0 durch 2 teilbar ist, also gerade ist.

2. Zahlen, die durch 4 teilbar sind:

   Beispiele:

   $4|1348925076$, da $4\cdot 337231269=1348925076$

   $4|6734590812$, da $4\cdot 1683647703=6734590812$

   $4\nmid 3409812567$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $4\cdot x=3409812567$

   Regel:

   Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 4 teilbar sind, müssen nur die letzten beiden Ziffern der jeweiligen Zahl n betrachtet werden. Handelt es sich bei der, durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl a_0a_1 um eine durch 4 teilbare Zahl, so ist die gesamte Zahl *n* durch 4 teilbar. Es können somit alle Zahlen *n* durch 4 geteilt werden, deren letzten beiden Ziffern die 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92 oder die 96 sind.

Begründung:
Jede Zahl *n* kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot 10^i$$

Da die Zahl 4 die Zahl 100 teilt, teilt die Zahl 4 auch alle Vielfachen der Zahl 100:
$4|100 \Rightarrow 4|a_i\cdot 10^i$, mit $i \in \mathbb{N}$ und $i\geq 2$ ($a|b \Rightarrow a|c\cdot b$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).
Weiter gilt, dass die Zahl 4 damit auch die Summe $\sum_{i=2}^{k} a_i\cdot 10^i$ teilt

($a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Somit ist eine Zahl *n* genau dann durch 4 teilbar wenn die durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl a_0a_1 eine durch 4 teilbare Zahl ist.

3. Zahlen, die durch 8 teilbar sind:
Beispiele:

$8|1378925064$, da $8\cdot 172365633=1378925064$

$8|6731590824$, da $8\cdot 841448853=6731590824$

$8\nmid 3409812567$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $8\cdot x=3409812567$

Regel:
Um alle Zahlen *n* dieser Art herauszufinden, welche durch 8 teilbar sind, müssen nur die letzten drei Ziffern der jeweiligen Zahl *n* betrachtet werden. Handelt es sich bei der, durch die letzten drei Ziffern gebildete Zahl $a_0a_1a_2$, um eine durch 8 teilbare Zahl, so ist die gesamte Zahl *n* durch 8 teilbar.

Begründung:
Jede Zahl *n* kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot 10^i$$

Da die Zahl 8 die Zahl 1000 teilt, teilt die Zahl 8 auch alle Vielfachen der Zahl 1000:

$8|1000 \Rightarrow 8|a_i\cdot 10^i$, mit $i \in \mathbb{N}$ und $i \geq 3$ ($a|b \Rightarrow a|c\cdot b$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Weiter gilt, dass die Zahl 8 damit auch die Summe $\sum_{i=3}^{k} a_i\cdot 10^i$ teilt

($a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Somit ist eine Zahl *n* genau dann durch 8 teilbar wenn die durch die letzten drei Ziffern gebildete Zahl $a_0a_1a_2$ eine durch 8 teilbare Zahl ist.

4. Zahlen, die durch 25 teilbar sind.
Beispiele:

$25|1348967025$, da $25\cdot 53958681=1348967025$

$25|6734192850$, da $25\cdot 269367714=6734192850$

$25\nmid 3409812567$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $25\cdot x=3409812567$

Regel:
Um alle Zahlen *n* dieser Art herauszufinden, welche durch 25 teilbar sind, müssen die letzten beiden Ziffern der jeweiligen Zahl *n* betrachtet werden. Handelt es sich bei der, durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl a_0a_1 um eine durch 25 teilbare Zahl, so ist die gesamte Zahl *n* durch 25 teilbar. Es können somit alle Zahlen *n* durch 25 geteilt werden, deren letzten beiden Ziffern die 25, 50 oder die 75 sind.

Begründung:
Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$$

Da die Zahl 25 die Zahl 100 teilt, teilt die Zahl 25 auch alle Vielfachen der Zahl 100:

$25|100 \Rightarrow 25|a_i\cdot 10^i$, mit $i \in \mathbb{N}$ und $i\geq 2$ ($a|b \Rightarrow a|c\cdot b$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Weiter gilt, dass die Zahl 25 damit auch die Summe $\sum_{i=2}^{k} a_i \cdot 10^i$ teilt

($a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für a, b, c $\in \mathbb{N}$).

Somit ist eine Zahl n genau dann durch 25 teilbar wenn die durch die letzten beiden Ziffern gebildete Zahl a_0a_1 eine durch 25 teilbare Zahl ist.

5. Zahlen, die durch 125 teilbar sind:
Beispiele:

$125|4709863125$, da $125\cdot 37678905=4709863125$

$125|1379804625$, da $125\cdot 11038437=1379804625$

$125\nmid 3409812567$, da $\nexists\ x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $125\cdot x=3409812567$

Regel:
Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 125 teilbar sind, müssen nur die letzten drei Ziffern der jeweiligen Zahl n betrachtet werden. Handelt es sich bei der, durch die letzten drei Ziffern gebildete Zahl $a_0a_1a_2$, um eine durch 125 teilbare Zahl, so ist die gesamte Zahl n durch 125 teilbar. Da die auf Teilbarkeit durch 125 zu untersuchenden Zahlen die Ziffern 0, 1, 2,…, 9 genau einmal enthalten sollen, sind für die letzten drei Ziffern $a_0a_1a_2$ nur die Ziffernkombinationen 125, 250, 375, 625, 750 oder 875 möglich.

Begründung:
Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$$

Da die Zahl 125 die Zahl 1000 teilt, teilt die Zahl 125 auch alle Vielfachen der Zahl 1000:

$125|1000 \Rightarrow 125|a_i\cdot 10^i$, mit $i \in \mathbb{N}$ und $i\geq 3$ ($a|b \Rightarrow a|c\cdot b$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Weiter gilt, dass die Zahl 125 damit auch die Summe $\sum_{i=3}^{k} a_i \cdot 10^i$ teilt
($a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).
Somit ist eine Zahl n genau dann durch 125 teilbar wenn die durch die letzten drei Ziffern gebildete Zahl $a_0a_1a_2$ eine durch 125 teilbare Zahl ist.

Quersummenregeln:

1. Zahlen, die durch 3 teilbar sind:
Beispiele:

$3|1234567890$, da $3\cdot 411522630=1234567890$

$3|1348925076$, da $3\cdot 449641692=1348925076$

Regel:
Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 3 teilbar sind, muss die Quersumme $Q(n)=a_0+a_1+\ldots+a_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, betrachtet werden.
Nun gilt, dass eine Zahl n genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 3 teilbar ist:

$3|n \Leftrightarrow 3|Q(n)$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Die Quersumme einer Zahl, welche die Ziffern 0, 1, 2, …, 9 genau ein Mal enthält, ist unabhängig von der Anordnung dieser Ziffern. Es kann also stellvertretend die Quersumme einer der Zahlen dieser Art untersucht werden.

$$Q(1234567890)=1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45$$

$3|45 \Rightarrow 3|1234567890$ und damit auch alle anderen Zahlen, welche die Ziffern 0, 1, 2, …, 9 genau ein Mal enthalten.

Begründung:
Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot 10^i$$

Diese Darstellung kann in folgender Art umgeformt werden:

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=$$
$$a_k\cdot(10^k-1)+a_k+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+a_{k-1}+\ldots+a_2\cdot 99+a_2+a_1\cdot 9+a_1+a_0=$$
$$a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9+a_k+a_{k-1}+a_1+a_0=$$
$$a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9+Q(n)$$

Die Zahl $a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9$ ist durch 3 teilbar, da $3|9$ und damit auch
$3|\ a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9$ ($a|b \Rightarrow a|cb$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).
Somit ist eine Zahl n genau dann durch 3 teilbar, wenn $3|Q(n)$.

2. Zahlen, die durch 9 teilbar sind:
Beispiele:

$9|1234567890$, da $9\cdot 137174210=1234567890$

$9|1348925076$, da $9\cdot 149880564=1348925076$

Regel:
Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 9 teilbar sind, muss die Quersumme $Q(n)=a_0+a_1+\ldots+a_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, betrachtet werden.
Nun gilt, dass eine Zahl n genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 9 teilbar ist:

$$9|n \Leftrightarrow 9|Q(n), \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

Die Quersumme einer Zahl, welche die Ziffern 0, 1, 2, …, 9 genau ein Mal enthält, ist unabhängig von der Anordnung dieser Ziffern. Es kann also Stellvertretend die Quersumme einer der Zahlen dieser Art untersucht werden.
$Q(1234567890)=1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45$
$9|45 \Rightarrow 9|1234567890$ und damit auch alle anderen Zahlen, welche die Ziffern 0, 1, 2, …, 9 genau ein Mal enthalten.
Begründung:
Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden.
$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot 10^i$
Diese Darstellung kann in folgender Art umgeformt werden:

$$n=a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=$$
$$a_k\cdot(10^k-1)+a_k+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+a_{k-1}+\ldots+a_2\cdot 99+a_2+a_1\cdot 9+a_1+a_0=$$
$$a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9+a_k+a_{k-1}+a_1+a_0=$$
$$a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9+Q(n)$$

Die Zahl $a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9$ ist durch 9 teilbar und damit auch
$9|\ a_k\cdot(10^k-1)+a_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9$ ($a|b \Rightarrow a|cb$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$ und $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).
Somit ist eine Zahl n genau dann durch 9 teilbar, wenn $9|Q(n)$.
Der Beweis konnte analog zum Beweis zur Teilbarkeit durch 3 geführt werden.

3. Zahlen, die durch 11 teilbar sind:
   Beispiele:
   $11|$, da $11\cdot=$
   $11\nmid 9876543210$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $11\cdot x=9876543210$

   Regel:
   Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 11 teilbar sind, muss die Quersumme 2. Ordnung $Q_2(n)=a_0a_1+a_2a_3+\ldots+a_{k-1}a_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, betrachtet werden.
   Nun gilt, dass eine Zahl n genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Quersumme $Q_2(n)$ durch 11 teilbar ist:
   $11|n \Leftrightarrow 11|Q_2(n)$, mit $n \in \mathbb{N}$.
   Begründung:
   Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:
   $n=a_0a_1\cdot 10^0+a_2a_3\cdot 10^2+a_4a_5\cdot 10^4+\ldots$
   Diese Darstellung kann in folgender Art umgeformt werden:
   $$n=a_0a_1\cdot 10^0+a_2a_3\cdot 10^2+a_4a_5\cdot 10^4+\ldots=$$
   $$a_0a_1\cdot(10^0-1)+\ a_0a_1+a_2a_3\cdot(10^2-1)+\ a_2a_3+a_4a_5\cdot(10^4-1)+a_4a_5+\ldots=$$
   $$a_0a_1\cdot(10^0-1)+a_2a_3\cdot(10^2-1)+a_4a_5\cdot(10^4-1)+\ldots+a_0a_1+a_2a_3+a_4a_5+\ldots=$$
   $$a_0a_1\cdot 0+a_2a_3\cdot 99+a_4a_5\cdot 9999+\ldots+a_0a_1+a_2a_3+a_4a_5+\ldots=$$
   $$a_0a_1\cdot 0+a_2a_3\cdot 99+a_4a_5\cdot 9999+\ldots+Q_2(n)$$
   Der vordere Teil dieser Darstellung $a_0a_1\cdot 0+a_2a_3\cdot 99+a_4a_5\cdot 9999+\ldots$der Zahl n ist immer durch die Zahl 11 teilbar, da die Anzahl der Neunen $A(9)$ immer gerade ist.
   Somit ist die Zahl n durch 11 teilbar, wenn auch die Quersumme 2. Ordnung $Q_2(n)$ durch 11 teilbar ist ($a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

4. Zahlen, die durch 7 teilbar sind:
   Beispiele:
   $7|\ 3487901256$, da $7\cdot\ 498271608=3487901256$
   $7\nmid 9876543210$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $7\cdot x=9876543210$

   Regel:
   Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 7 teilbar sind, muss die alternierende Quersumme 3. Ordnung $A_3(n)=a_0a_1a_2-a_3a_4a_5+a_6a_7a_8-\ldots+a_{k-2}a_{k-1}a_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, betrachtet werden.
   Nun gilt, dass eine Zahl n genau dann durch 7 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme 3. Ordnung $A_3(n)$ durch 7 teilbar ist:
   $7|n \Leftrightarrow 7|\ A_3(n)$, mit $n \in \mathbb{N}$.

   Begründung:
   Jede Zahl n kann eindeutig in folgender Form dargestellt werden:
   $$n=a_0a_1a_3\cdot 1000^0+a_4a_5a_6\cdot 1000^1+a_7a_8a_9\cdot 1000^3+\ldots$$
   Diese Darstellung kann in folgender Art umgeformt werden:
   $$n=a_0a_1a_3\cdot 1000^0+a_4a_5a_6\cdot 1000^1+a_7a_8a_9\cdot 1000^3+\ldots=$$
   $$a_0a_1a_3\cdot(1000^0-1)+a_0a_1a_3+a_4a_5a_6\cdot(1000^1+1)-a_4a_5a_6+a_7a_8a_9\cdot(1000^2-1)+\ a_7a_8a_9+\ldots=$$
   $$a_0a_1a_3\cdot 0\ +a_4a_5a_6\cdot 1001+a_7a_8a_9\cdot 999999+\ldots+a_0a_1a_3-a_4a_5a_6+a_7a_8a_9-\ldots=$$
   $$a_0a_1a_3\cdot 0\ +a_4a_5a_6\cdot 1001+a_7a_8a_9\cdot 999999+\ldots+\ A_3(n)=$$
   Der vordere Teil dieser Darstellung $a_0a_1a_3\cdot 0\ +a_4a_5a_6\cdot 1001+a_7a_8a_9\cdot 999999+\ldots$der Zahl n ist immer durch die Zahl 7 teilbar.
   Somit ist die Zahl n durch 7 teilbar, wenn auch die Quersumme $A_3(n)$ durch 7 teilbar ist ($a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$).

Zerlegung in ein Produkt:

1. Zahlen, die durch 12 teilbar sind:
   Beispiele:

   $12 \mid 1895643072$, da $12 \cdot 157970256 = 1895643072$

   $12 \mid 9870543216$, da $12 \cdot 822545268 = 9870543216$

   $12 \nmid 9876543210$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $12 \cdot x = 9876543210$

   Regel:
   Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 12 teilbar sind, muss nur mit Hilfe der letzten beiden Ziffern überprüft werden, ob die Zahl n durch 4 teilbar ist.
   Begründung:
   Eine Zahl ist genau dann durch $12=2^2 \cdot 3$ teilbar, wenn die Zahl sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar ist ($a \mid b \wedge c \mid b \Rightarrow a \cdot c \mid b$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$, mit a, b, c teilerfremd). Da alle Zahlen n, welche die Ziffern 0, 1, 2,…, 9 genau einmal enthalten, wie in 1) bei den Quersummenregeln gezeigt durch 3 teilbar sind, muss nur noch mit Hilfe der letzten beiden Ziffern a_0a_1, wie in 2) bei den Endstellenregeln erklärt, überprüft werden, ob die Zahl n durch 4 teilbar ist.
   Die Teilbarkeitsregeln vieler weiterer Zahlen, wie beispielsweise die Teilbarkeitsregel der Zahl 14, kann auf gleiche Weise hergeleitet werden.

2. Zahlen, die durch 40 teilbar sind:
   Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 40 teilbar sind, muss nur mit Hilfe der letzten drei Ziffern $a_0a_1a_2$ überprüft werden, ob die Zahl n durch 8 und durch 5 teilbar ist.
   Begründung:
   Eine Zahl ist genau dann durch $40=2^3 \cdot 5$ teilbar, wenn die Zahl sowohl durch 2^3, als auch durch 5 teilbar ist ($a \mid b \wedge c \mid b \wedge d \mid b \Rightarrow a \cdot c \cdot d \mid b$, für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, mit a, b, c, d teilerfremd). Die Teilbarkeit durch die Zahl 8 kann, wie in Aufgabenteil 3) der Endstellenregeln, überprüft werden. Damit eine Zahl n durch 5 teilbar ist, muss diese als letzte Ziffer a_0 die Zahl 5 oder 0 enthalten.
   Beispiele:

   $40 \mid 1895247360$, da $40 \cdot 47381184 = 1895247360$

   $40 \mid 1895647320$, da $40 \cdot 47391183 = 1895647320$

   $40 \nmid 9876543210$, da $\nexists\, x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $40 \cdot x = 9876543210$

3. Zahlen, die durch 120 teilbar sind:
   Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 120 teilbar sind, muss nur mit Hilfe der letzten drei Ziffern $a_0a_1a_2$ überprüft werden, ob die Zahl n durch 8 und durch 5 teilbar ist.

   Begründung:
   Eine Zahl ist genau dann durch $120=2^3 \cdot 3 \cdot 5$ teilbar, wenn die Zahl sowohl durch 3, als auch durch 5, als auch durch 8 teilbar ist ($a \mid b \wedge c \mid b \wedge d \mid b \Rightarrow a \cdot c \cdot d \mid b$, für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, mit a, b, c, d teilerfremd). Da alle Zahlen n, welche die Ziffern 0, 1, 2,…, 9 genau einmal enthalten, wie in 1) bei den Quersummenregeln gezeigt durch 3 teilbar sind, muss nur noch mit Hilfe der letzten drei Ziffern $a_0a_1a_2$ überprüft werden, ob diese durch 5 und durch 8 teilbar sind. Alle Zahlen, welche als letzte Ziffer a_0 eine 0 oder

eine 5 haben, sind durch 5 teilbar. Wie in 3) bei den Endstellenregeln erklärt, muss nun noch überprüft werden, ob die Zahl $a_0a_1a_2$ durch 8 teilbar ist.
Beispiele:

$120|1895647320$, da $120\cdot 15797061=1895647320$
$120|9876543120$, da $12\cdot 82304526=9876543120$
$120\nmid 9876543210$, da $\nexists\ x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $120\cdot x=9876543210$

4. Zahlen, die durch 150 teilbar sind:
Um alle Zahlen n dieser Art herauszufinden, welche durch 150 teilbar sind, muss nur mit Hilfe der letzten zwei Ziffern a_0a_1 überprüft werden, ob die Zahl n durch 2 und durch 25 teilbar ist.

Begründung:
Eine Zahl ist genau dann durch $150=2\cdot 3\cdot 5^2$ teilbar, wenn die Zahl sowohl durch 3, als auch durch 2, als auch durch 25 teilbar ist ($a|b \wedge c|b \wedge d|b \Rightarrow a\cdot c\cdot d\,|b$, für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, mit a, b, c, d teilerfremd). Da alle Zahlen n, welche die Ziffern 0, 1, 2,…, 9 genau einmal enthalten, wie in 1) bei den Quersummenregeln gezeigt durch 3 teilbar sind, muss nur noch mit Hilfe der letzten beiden Ziffern a_0a_1 überprüft werden, ob diese durch 2 und durch 25 teilbar sind. Dies kann, wie in Aufgabenteil 1) und 4) bei den Endstellenregel getan werden. Damit die Zahl n durch 25 teilbar ist, müssen die letzten beiden Ziffern a_0a_1 die 25, 50 oder die 75 sein. Damit die Zahl n gleichzeitig auch noch durch die Zahl 2 teilbar ist, sind als letzte beiden Ziffern a_0a_1 nur die 50 möglich.
Beispiele:

$150|1892647350$, da $150\cdot 12617649=1892647350$,
$150\nmid 9876543210$, da $\nexists\ x \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $150\cdot x=9876543210$

b) Primzahlen:
Die Aufgabe, alle zehnstellige Primzahlen zu finden, welche die Ziffern 0, 1, 2,…, 9 genau einmal enthalten, scheint auf den ersten Blick fast unlösbar. Allerdings ist die Lösung hier ganz einfach. Unter Zahlen n dieser Art befindet sich keine einzige Primzahl! Wie in Aufgabenteil a) schon festgestellt haben alle Zahlen n dieser Art eine Quersumme $Q(n)$, welche durch drei teilbar ist. Damit sind also alle Zahlen n durch drei teilbar und können damit keine Primzahlen mehr sein.

Übung 4.68

Lösungsmöglichkeit:

a) Beispiele:
beliebige Dreistellige Zahl: 123

$7|123123$, da $7\cdot 17589=123123$
$11|123123$, da $11\cdot 11193=123123$
$13|123123$, da $13\cdot 9471=123123$

beliebige Dreistellige Zahl: 753

$7|753753$, da $7\cdot 107679=753753$

$11|753753$, da $11\cdot 68523=753753$
$13|753753$, da $13\cdot 57981=753753$

Begründung:
Eine sechsstellige Zahl der Form „*abcabc*" kann auch in der Form $abc\cdot 1001$ dargestellt werden. Die Zahl 1001 ist durch 7, 11 und 13 teilbar. Zahlen der Form „*abcabc*", sind somit als Vielfaches von 1001 ebenfalls durch 7, 11 und 13 teilbar.

b) Hexenzauber:
Denken Sie sich eine vierstellige Zahl der Form „*abcd*" aus und schreibe Sie diese dreimal hintereinander auf. Die entstandene zwölfstellige Zahl lässt sich durch den Hexenzauber immer durch 3, 7 und 13 teilen.

Beispiele:
beliebige vierstellige Zahl: 1234
$3|123412341234$, da $3\cdot 41137447078=123412341234$
$7|123412341234$, da $7\cdot 17630334462=123412341234$
$13|123412341234$, da $13\cdot 9493257018=123412341234$

beliebige vierstellige Zahl: 7777
$3|777777777777$, da $3\cdot 259259259259=777777777777$
$7|777777777777$, da $7\cdot 111111111111=777777777777$
$13|777777777777$, da $13\cdot 59829059829=777777777777$

Begründung:
Eine zwölfstellige Zahl der Form „*abcdabcdabcd*" kann auch in der Form $abcd\cdot 100010001$ dargestellt werden. Die Zahl 100010001 ist durch 3, 7 und 13 teilbar. Zahlen der Form „*abcdabcdabcd*", sind als Vielfaches von 100010001 ebenfalls durch 3, 7 und 13 teilbar.

Übung 4.69:

Lösungsmöglichkeit:

a) Behauptung:
Wenn eine Zahl a drei verschiedene Primzahlen p, q, r enthält, dann hat a mindestens acht Teiler.

Beispiele:
- $2\cdot 3\cdot 5=30$
  $T_{30}=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $|T_{30}|=8$
- $2\cdot 3\cdot 11=66$
  $T_{66}=\{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66\}$, $|T_{66}|=8$

Begründung:
Eine Zahl a mit drei verschiedenen Primzahlen hat die Form $a=p^m\cdot q^n\cdot r^o$, mit n, m, $o \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Damit die Mindestanzahl der Teiler dieser Zahl ermittelt werden kann, werden die Exponenten der Primzahlen möglichst klein gewählt. Damit ist $a=p^1\cdot q^1\cdot r^1$. Weiter gilt, dass eine Zahl mit der Primfaktorzerlegung $p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$ insgesamt $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_k+1)$ verschiedene Teiler besitzt. Somit gilt für die Teileranzahl von $a=p^1\cdot q^1\cdot r^1$:

$|T_a|=(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)= 2\cdot 2\cdot 2=8$ Teiler

Für die Teilermenge gilt:

$T_a=\{1, p, q, r, p\cdot q, p\cdot r, q\cdot r, p\cdot q\cdot r\}$

b) Behauptung:
Wenn *a* nur durch eine Primzahl *p* teilbar ist, dann hat *a* zwei Teiler.
Gegenbeispiel:
$a=p^5$, mit *p* prim
Für die Teileranzahl von $a=p^5$ gilt:

$|T_a|=(5+1)=6$ Teiler

Für die Teilermenge gilt:

$T_a=\{1, p^1, p^2, p^3, p^4, p^5\}$

c) Behauptung:
Wenn *a* 7 Teiler hat, dann ist *a* eine Potenz einer Primzahl.
Beispiele:

- $2^6=64$
  $T_{64}=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$, $|T_{64}|=7$
- $3^6=729$
  $T_{729}=\{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$, $|T_{729}|=7$

Begründung:
Da die Teileranzahl 7 als Primzahl nur in das Produkt $1\cdot 7$ zerlegt werden kann, kann eine Zahl *a* mit 7 verschiedenen Teilern nur die Form $a=p^6$, mit *p* prim, haben. Somit ist *a* also die Potenz einer Primzahl.
Für die Teileranzahl von $a=p^6$ gilt:

$|T_a|=(6+1)=7$ Teiler

Für die Teilermenge gilt:

$T_a=\{1, p^1, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6\}$

d) Behauptung:
Wenn *a* 25 Teiler hat, dann ist *a* eine Quadratzahl.
Beispiele:

- $2^{24}=(4096)^2=16777216$
  $T_{64}=\{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{11}, 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}, 2^{15}, 2^{16}, 2^{17}, 2^{18}, 2^{19}, 2^{20}, 2^{21}, 2^{22}, 2^{23}, 2^{24}, 2^{25}\}$, $|T_{16777216}|=25$
- $2^4\cdot 3^4=1296$
  $T_{1296}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 81, 108, 144, 162, 216, 324, 432, 648, 1296\}$, $|T_{1296}|=12$

Begründung:
Die Teileranzahl 25 kann in die Produkte $1\cdot 25$ und $5\cdot 5$ zerlegt werden. Nach dem Satz über die Teileranzahl kann eine Zahl *a* mit 25 verschiedenen Teilern die Form $a=p^{24}$ oder $a=p^4\cdot q^4$, mit *p*, *q* prim, besitzen. Bei beiden Formen von *a* handelt es sich um Quadratzahlen: $a=p^{24}=(p^{12})^2$ oder $a=p^4\cdot q^4=(p\cdot q)^4=((p\cdot q)^2)^2$. Eine Zahl *a* mit 25 Teilern muss somit eine Quadratzahl sein.
Für die Teileranzahl von $a=p^{24}$ gilt:

$|T_a|=(24+1)=25$ Teiler

Für die Teilermenge gilt:

$T_a=\{1, p^1, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, p^8, p^9, p^{10}, p^{11}, p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{15}, p^{16}, p^{17}, p^{18}, p^{19}, p^{20}, p^{21}, p^{22}, p^{23}, p^{24}, p^{25}\}$

Für die Teileranzahl von $a=p^4\cdot q^4$ gilt:

$|T_a|=(4+1)\cdot(4+1)=25$ Teiler

Für die Teilermenge gilt:

$T_a=\{1, p^1, p^2, p^3, p^4, q^1, q^2, q^3, q^4, p^1\cdot q^1, p^2\cdot q^1, p^3\cdot q^1, p^4\cdot q^1, p^1\cdot q^2, p^1\cdot q^3, p^1\cdot q^4, p^2\cdot q^2, p^2\cdot q^3, p^2\cdot q^4, p^3\cdot q^2, p^4\cdot q^2, p^3\cdot q^3, p^3\cdot q^4, p^4\cdot q^3, p^4\cdot q^4\}$

e) Behauptung:
Wenn *a* 6 Teiler hat, dann ist *a* keine Quadratzahl.
Beispiele:
- $2^5=32$
- $T_{32}=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, $|T_{32}|=6$
- $2\cdot 3^2=18$
- $T_{18}=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $|T_{18}|=6$

Begründung:
Die Teileranzahl 6 kann in die Produkte $1\cdot 6$ und $2\cdot 3$ zerlegt werden. Nach dem Satz über die Teileranzahl kann eine Zahl *a* mit 6 verschiedenen Teilern die Form $a=p^5$ oder $a= p\cdot q^2$, mit *p*, *q* prim, besitzen. Bei beiden Formen von *a* handelt es sich nicht um Quadratzahlen. Eine Zahl *a* mit 6 Teilern kann somit keine Quadratzahl sein.
Für die Teileranzahl von $a=p^5$ gilt:

$|T_a|=(5+1)=6$ Teiler

Für die Teilermenge gilt:

$T_a=\{1, p^1, p^2, p^3, p^4, p^5\}$

Für die Teileranzahl von $a= p\cdot q^2$ gilt:

$|T_a|=(1+1)\cdot(2+1)=6$ Teiler

Für die Teilermenge gilt:

$T_a=\{1, p^1, q^1, q^2, p^1\cdot q^1, p^1\cdot q^2\}$

f) Behauptung:

Wenn *a* 42 Teiler hat, dann enthält *a* mindestens 3 verschiedene Primzahlen.

Gegenbeispiel:

$a=p^{41}$, mit *p* prim

Für die Teileranzahl von $a=p^{41}$ gilt $|T_a|=(41+1)=42$ Teiler, jedoch enthält diese Zahl *a* mit 42 Teilern nur eine Primzahl.

Übung 4.70:

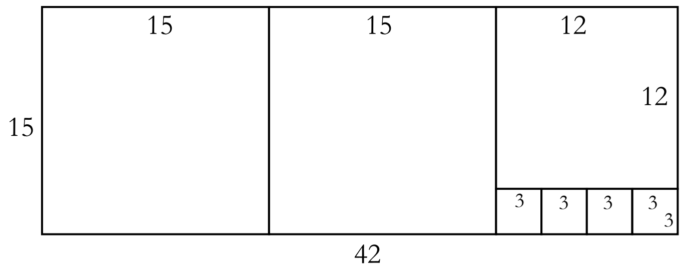
Lösungsmöglichkeit:

Unabhängig von der Wahl der Seitenlängen entsteht durch die „Wechselwegnahme“ am Ende immer ein Quadrat. Dieses Quadrat besitzt die Seitenlänge des größten gemeinsamen Teilers von *a* und *b* (ggT(*a*,*b*)).
Das hier beschriebene „Wechselwegnahmeverfahren“ kann als geometrische Darstellung des Euklidischen Algorithmus gedeutet werden. Von einem beliebigen Rechteck mit den Seitenlängen *a* und *b* werden Quadrate der Seitenlänge der kürzeren Rechteckseite *b* abgeschnitten. Diese Wegnahme wird solange fortgeführt, bis es nicht mehr geht. Dieser Schritt entspricht beim Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des ggT(*a*,*b*) der Division mit Rest *r* der beiden Zahlen *a* und *b*. Es bleibt dann ein Rechteck der Seitenlängen *b* und *r* übrig, von welchem nun wieder Quadrate in der zuvor beschriebenen Art weggenommen werden. Dies entspricht beim Euklidischen Algorithmus der

Division mit *b* und *r*. Dieses Verfahren wird solange fortgeführt, bis kein Rechteck übrig bleibt, also das Zerlegen in Quadrate aufgeht. Die Seitenlänge des kleinsten Quadrates ist dann der größte gemeinsame Teiler von *a* und *b* und ein gemeinsame Größe, in welches das ursprüngliche Rechteck zerlegt werden kann.

Beispiel:
Sei a=42 und b=15
Euklidischer Algorithmus:

$42=2\cdot 15+12$
$15=1\cdot 12+3$
$12=4\cdot 3+0$
ggT(a,b)



Übung 4.71:

Lösungsmöglichkeit:
Durch das Falten teilt man das Papier in ein gemeinsames Maß für beide Nenner *a* und *b* ein. Die insgesamt benötigten Faltungen können mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen kgV(a,b) berechnet werden, da dieses die kleinste mögliche Zahl angibt, für die sowohl *a* als auch *b* Teiler ist. Da beim ersten Schritt *a* Faltungen nötig sind, können die beim zweiten Summanden *b* benötigten Faltungen mit der Formel $\frac{kgV(a,b)}{a}$ berechnet werden.
Faltet man die Aufgabe $\frac{1}{4}+\frac{1}{15}$, so sind beim ersten Summanden 4 Faltungen nötig und beim zweiten Summanden sind noch $\frac{kgV(4,15)}{4}=\frac{2^2\cdot 3\cdot 5}{2^2}=15$ Faltungen nötig.
Faltet man dagegen die Aufgabe $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$, so sind beim zweiten Summanden nicht mehr 8 Faltungen nötig, sondern nur noch $\frac{kgV(6,8)}{6}=\frac{2^3\cdot 3}{2\cdot 3}=4$ Faltungen.
An Hand dieser Formel kann man leicht erkennen, dass bei teilerfremden Summanden keine Faltungen gespart werden können, dass jedoch bei Summanden mit gemeinsamen Primfaktoren Faltungen gespart werden können.

Übung 4.72: Am besten versteht man ein mathematisches Konzept, wenn man es nicht nur starr, sondern flexibel anwendet. Dazu fragt man nicht nur: „Was kommt heraus“, sondern auch: „Wann kommt … heraus“? Und: „Was passiert, wenn...?“ Das Folgende sind solche so genannten „operative Übungen“

(Tipp: Erst einmal Beispiele untersuchen.)

a) Was muss a und b erfüllen, damit ggT(a,b) = p mit p Primzahl?
b) Wann ist ggT(a,b) = a?

c) Was kommt für das ggT(a, a+2) heraus?

Stellen Sie sich drei eigene Fragen dieser Art und untersuchen Sie sie.

Lösungsmöglichkeit:

a) Damit ggT(a,b)=p, mit p prim müssen a und b folgende Bedingung erfüllen:
$a=n\cdot p$ und $b=m\cdot p$; mit n, $m \in \mathbb{N}$ und wobei n und m keine gemeinsamen Primfaktoren aufweisen dürfen.

Beispiele:
Wenn a=7 und b=7, dann ist ggT(7,7)=7
Wenn a=7 und b=21=3·7, dann ist ggT(7,21)=7
Wenn a=5·7=35 und b=2·3·7=42, dann ist ggT(35,42)=7

b) Damit ggT(a,b)=a muss b folgende Bedingung erfüllen:

$b=m\cdot a$; mit $m \in \mathbb{N}$ bzw. $a | b$.

Beispiele:

Wenn a=6 und b=6, dann ist ggT(6,6)=6

Wenn a=6 und b=18=3·6, dann ist ggT(6,18)=6

c) Der ggT(a,a+2) kann folgende Ergebnisse haben:

Wenn $a=2\cdot n$ (a gerade), dann ist ggT(a,a+2)=2

Wenn $a=2\cdot n+1$ (a ungerade), dann ist ggT(a,a+2)=1

Beispiele:

Wenn a=2·14=28 ⇒ b=2·14+2=2·15=30, dann ist ggT(28,30)=2

Wenn a=9 ⇒ b=9+2, dann ist ggT(9,11)=1

Untersuchung eigener Fragen:

a) Wann ist ggT(a,b)=1?

Damit ggT(a,b)=1 dürfen a und b keine gemeinsamen Primfaktoren aufweisen, sie müssen also teilerfremd sein.

Beispiele:

Wenn a=2·3=6 und b=7·5=35, dann ist ggT(6,35)=1

Wenn a=5 und b=7, dann ist ggT(5,7)=1

b) Wann ist der ggT(a,b)=0?

Damit der ggT(a,b)=0 muss mindestens einer der beiden Zahlen a und b den Wert 0 haben.

Beispiele:

Wenn a=0 und b=0, dann ist ggT(0,0)=0

Wenn a=0 und b=7, dann ist ggT(0,7)=0

c) Welche Ergebnisse kann ggT(a+b,a-b), mit $a>b$ haben?

Es werden verschiedene Fälle betrachtet:

1.Fall:

a und b gerade ⇒ $a=2m$, $b=2n$, mit $n, m \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$a+b=2m+2n=2\cdot(m+n)$ und $a-b=2m-2n=2\cdot(m-n)$

Somit ist ggT(a+b,a-b)=2

2.Fall:

a und b ungerade ⇒ $a=2m+1$, $b=2n+1$, mit $n, m \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$a+b=(2m+1)+(2n+1)=2\cdot(m+n+1)$ und $a-b=(2m+1)-(2n+1)=2\cdot(m-n)$

Somit ist ggT(a+b,a-b)=2

3.Fall:

a gerade und b ungerade ⇒ $a=2m$, $b=2n+1$, mit $n, m \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$a+b=2m+(2n+1)=2\cdot(m+n)+1$ und $a-b=(2m)-(2n+1)=2\cdot(m-n)-1$

Somit ist ggT(a+b,a-b)=1

4.Fall:

a ungerade und b gerade ⇒ $a=2m+1$, $b=2n$, mit $n, m \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$a+b=(2m+1)+2n=2\cdot(m+n)+1$ und $a-b=(2m+1)-2n=2\cdot(m-n)+1$

Somit ist ggT(a+b,a-b)=1

Übung 4.73:

Lösungsmöglichkeit

Damit bei den Übungsaufgaben zum Dividieren nur ganzzahlige Ergebnisse herauskommen können, müssen die möglichen dreistelligen Zahlen im linken Kreis gemeinsame Vielfache aller Zahlen im rechten Kreis sein. Eine Herangehensweise diese gemeinsamen Vielfachen zu bestimmen, ist das kleinste gemeinsame Vielfache der vier Zahlen des rechten Kreises zu bestimmen. Alle Vielfachen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der vier Zahlen sind dann alle möglichen gemeinsamen Vielfachen der vier Zahlen.

Das kleinste gemeinsame Vielfache der vier Zahlen im rechten Kreise kann zum Beispiel mit Hilfe der Primfaktorzerlegung bestimmt werden.

$12=2^2\cdot 3$

$15=3\cdot 5$

$18=2\cdot 3^2$

$24=2^3\cdot 3$

⇒ kgV(12,15,18,24)$=2^3\cdot 3^2\cdot 5=360$

Somit können sich alle Zahlen der Form $n \cdot 360$, mit $n \in \mathbb{N}$ im rechten Kreis befinden.
Weiter soll die Bedingung erfüllt sein, dass die Ergebnisse möglichst nahe an der Zahl 25 liegen.
Das kleinste gemeinsame Vielfache der vier Zahlen selbst eignet sich auch unter dieser Bedingung, da die Ergebnisse der Divisionsaufgaben 360:15=24, 360:12=30 und 360:18=20 möglichst nahe an der Zahl 25 liegen. Jedes größere gemeinsame Vielfache der vier Zahlen des rechten Kreises würde den Quotienten dieser Divisionsaufgaben vergrößern und damit weiter von der Zahl 25 entfernen.
Lediglich das Ergebnis der Divisionsaufgabe 360:24=15 ist recht weit von der Zielzahl 25 entfernt. Besser eignet sich hier als Dividend die Zahl 720. Sie ist Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der vier Zahlen im rechten Kreis und damit teilbar durch alle vier Zahlen im rechten Kreis. Zudem ist das Ergebnis der Division 720:24=30 möglichst nahe an der Zielzahl 25.

Übung 4.74:

Lösungsmöglichkeit:

Wenn zwei Koordinaten x und y teilerfremd sind, also wenn der $ggT(x,y)=1$, so ist das entsprechende Feld blau. Wenn zwei Koordinaten nicht teilerfremd sind, also wenn der $ggT(x,y) \neq 1$, dann ist das Feld weiß und der entsprechende $ggT(x,y)$ ist im jeweiligen Feld vermerkt.

1) Diagonale
Auf der Diagonalen befinden sich keine blauen Felder, da $ggT(x,x)=x$ gilt, denn der größte mögliche Teiler zweier identischer Zahlen x ist die Zahl x selbst.

2) Durchgehende Zeile:
Es gibt nur eine durchgehende Linie, denn nur für die Zahl 1 gilt, dass der größte gemeinsame Teiler mit jeder beliebigen Zahl x die Zahl 1 selbst ist. $ggT(1,x)=1$ gilt, da jede beliebigen Zahl x teilerfremd zur Zahl 1 ist, also keine gemeinsamen Primfaktoren mit der Zahl 1 besitzt. Die Zahl 1 und eine beliebige Zahl x können nie gemeinsame Primfaktoren besitzen, da die Zahl 1 selbst keinen Primfaktor besitzt.

3) Kreuzmuster: 

In jeder zweiten Zeile, also in den Zeilen der geraden Zahlen, ist mindestens jedes zweite Feld weiß, da zwei gerade Zahlen x, y immer einen größten gemeinsamen Teiler der Form $ggT(x,y)=2n$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$ haben.
In jeder dritten Zeile, also in den Zeilen der Vielfachen der Zahl 3, ist mindestens jedes dritte Feld weiß, da zwei Zahlen x und y, wobei x, y Vielfache der Zahl 3 sind, immer einen größten gemeinsamen Teiler der Form $ggT(x,y)=3n$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, besitzen.
Durch diese Eigenschaften des $ggT(x,y)$ entsteht das Kreuzmuster.

4) Besonders regelmäßige Zeilen:
5) In allen Zeilen von Zahlen x der Form $x=p^n$, mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und p prim, ist genau jedes p-te Feld weiß, da Zahlen dieser Form nur Teiler der Form p^n besitzen. Diese Zahlen haben also mit allen Zahlen $y=p \cdot n$ einen größten gemeinsamen Teiler der Form $ggT(x,y)= p^n$.

6) Zeilen, mit besonders vielen weißen Feldern:

7) Zeilen, mit besonders vielen weißen Feldern sind die Zeilen von teilerreichen Zahlen x. So haben beispielsweise die Zeilen der Zahlen 12, 18, 30 oder 42 besonders viele weiße Felder. Da teilerreiche Zahlen x viele Teiler besitzen, sind sie zu nur wenigen Zahlen y teilerfremd, weshalb bei diesen Zahlen nur selten gilt $ggT(x,y)=1$

8) Zeilen mit besonders vielen schwarzen Feldern:

9) Zeilen, mit besonders vielen schwarzen Feldern sind die Zeilen von großen Primzahlen p. Da in Zeilen der Primzahlen p genau jede p-te Zeile weiß ist. Da Zahlen dieser Form nur Teiler der Form p^n besitzen, ist beispielsweise bei der Primzahl 43 nur jede 43-Zeile weiß.

Übung 4.75: Wenn ggT(a,b)=1, sind die Zahlen a und b teilerfremd. Manchmal dauert es sehr lange, um mit dem euklidischen Algorithmus das festzustellen.

a) Zählen Sie einmal die Schritte, bei der Bestimmung von ggT(21,13), ggT(20,17), ggT(22,15).

b) Stellen Sie Vermutungen auf, wann es lange braucht und wann es schnell geht und überprüfen Sie diese an weiteren Beispielen.

c) Können Sie zwei Zahlen angeben (vielleicht sogar möglichst kleine Zahlen), bei denen man zehn Schritte braucht?

Lösungsmöglichkeit:

a) Bestimmen des ggT(21,13):

1) $21=1\cdot 13+7$
2) $13=1\cdot 7+6$
3) $7=1\cdot 6+1$
4) $6=6\cdot 1+0$

Lösung: ggT(21,13)=1
Die Bestimmung des ggT(21,13) benötigt vier Schritte.

Bestimmen des ggT(20,17):

1) $20=1\cdot 17+3$
2) $17=5\cdot 3+2$
3) $3=1\cdot 2+1$
4) $2=2\cdot 1+0$

Lösung: ggT(20,17)=1
Die Bestimmung des ggT(20,17) benötigt vier Schritte.

Bestimmung des ggT(22,15):

1) $22=1\cdot 15+7$
2) $15=2\cdot 7+1$
3) $7=1\cdot 6+1$
4) $6=6\cdot 1+0$

Lösung: ggT(22,15)=1
Die Bestimmung des ggT(22,15) benötigt vier Schritte.

b) Beim Euklidischen Algorithmus werden die Reste umso schneller klein, je höher die Quotienten der einzelnen Schritte sind. der Algorithmus führt also schnell zum Ergebnis, wenn man in den einzelnen Schritten möglichst oft ein großes Vielfaches des jeweiligen Divisors abspalten kann. Besonders viele Schritte benötigt der Euklidische Algorithmus demnach dann, wenn der Divisor in jedem Schritt jeweils nur ein Mal abgezogen werden kann und die beiden Ausgangszahlen einen möglichst großen Abstand zueinander haben.
Der Fall, dass in jedem Schritt des euklidischen Algorithmus der Divisor nur jeweils ein Mal abgespalten werden kann, ergibt sich bei den Fibonacci-Zahlen. Die Folge der Fibonacci-Zahlen entsteht durch das rekursive Bildungsgesetz $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, wobei die Anfangswerte $f_0=0$ und $f_1=1$ festgelegt sind. Ein Folgeglied f_n entsteht also durch die Summe ihrer beiden Vorgängerglieder f_{n-2} und f_{n-1}.
Um das Behauptete zu begründen, wird nun ein Euklidischer Algorithmus betrachtet, bei dem alle Quotienten q=1 sind.

$1=1\cdot 1+0$
$2=1\cdot 1+1$
$3=1\cdot 2+1$
$5=1\cdot 3+2$
$8=1\cdot 5+3$
$13=1\cdot 8+5$
$21=1\cdot 13+8$
$34=1\cdot 21+13$
…
$f_{i+1}=1\cdot f_i+f_{i-1}$m mit $i \in \mathbb{N}$.

Man erkennt, dass wenn man alle Quotienten $q=1$ sind, sich die Folge der Fibonacci-Zahlen ergibt. Somit benötigt der Euklidische Algorithmus dann besonders viele Schritte, wenn der größte gemeinsame Teiler zweier aufeinanderfolgenden Glieder der Fibonacci-Folge bestimmt werden soll. Die Anzahl der Schritte wird umso größer je größer die Folgeglieder sind. Für die Bestimmung des ggT(f_{n+1},f_{n+2}) sind beim Euklidischen Algorithmus n Schritte notwendig.

c) Da zwei Zahlen a, b gesucht werden, bei denen das Bestimmen des ggT(a,b) zehn Schritte benötigt, muss für $a=f_{11}$ und $b=f_{12}$ gewählt werden.
Das 11. und 12. Glied der Fibonacci-Folge ist $f_{11}=89$ und $f_{12}=144$.
Bestimmung des ggT(89,144):

1) $144=1\cdot 89+55$
2) $89=1\cdot 55+34$
3) $55=1\cdot 34+21$
4) $34=1\cdot 21+13$
5) $21=1\cdot 13+8$
6) $13=1\cdot 8+5$
7) $8=1\cdot 5+3$
8) $5=1\cdot 3+2$
9) $3=1\cdot 2+1$
10) $2=2\cdot 1+0$

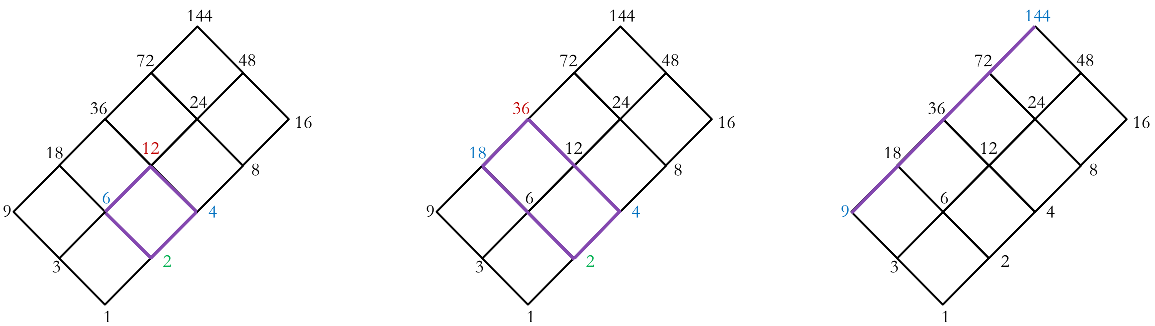
Lösung: ggT(55,89)=1
Die Bestimmung des ggT(89,144) benötigt zehn Schritte.

Übung 4.76:

Lösungsmöglichkeit:

a) Hassediagramm der Zahl 144
Beispiele:

ggT(4,6)=2	ggT(4,18)=2	ggT(9,144)=9
kgV(4,6)=12	kgV(4,18)=36	kgV(9,144)=144



b) Allgemeine Regel:
Zwei Teiler a und b eines Hassediagramms der Zahl x bilden zusammen mit dem ggT(a,b) und dem kgV(a,b) die Eckpunkte eines Parallelogramms. Das erzeugte Parallelogramm kann hierbei auch entartet sein und eine Strecke bilden. Das kgV(a,b) befindet sich im Hassediagramm näher bei der Zahl x, das ggT(a,b) befindet sich näher bei der Zahl 1 .

Übung 4.77: Lösungsmöglichkeit:

Nach wie vielen Umdrehungen U sich die beiden roten Punkte wieder treffen, kann mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Anzahl der Zähne a und b der beiden Zahnräder bestimmt werden.

$$U=\text{kgV}(a,b)$$

Im abgebildeten Beispiel treffen sich die beiden roten Punkte folglich nach

$$U=\text{kgV}(25,30)=2\cdot 3\cdot 5^2=150$$

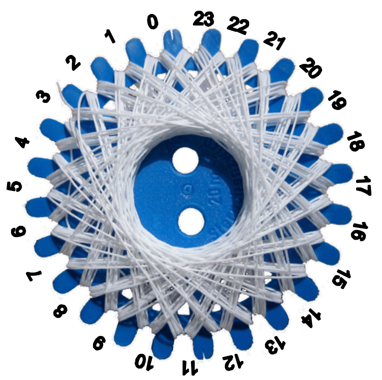
Umdrehungen wieder.

Übung 4.78: Lösungsmöglichkeit:

Nach wie vielen Tagen sich die drei Klassenkameraden im Schwimmbad treffen kann mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen bestimmt werden.

Martin und Heike treffen sich nach kgV(3,4)=12 Tagen das erste Mal im Schwimmbad, Martin und Elke stoßen nach kgV(3,6)=6 Tagen aufeinander und die beiden Mädchen können nach kgV(4,6)=12 Tagen zusammen schwimmen gehen. Alle drei Klassenkammeraden sind nach kgV(3,4,6)=12 Tagen gemeinsam im Schwimmbad.

Übung 4.79: (nach einer Idee von R. Deißler).



Lösungsmöglichkeit:
Die Anzahl der Umdrehungen U bis der Faden wieder am Ausgangspunkt ist, lassen sich mit Hilfe des kgV(a,b) und der Anzahl der Rillen r bestimmen.

$$U=\frac{\text{kgV}((a+b),r)}{(a+b)}$$

Beispiel:
Die Anzahl der Rillen r beträgt beim abgebildeten Sternchenzwirn r=24 (0-23).
Der Faden soll, wie im Beispiel, vorne jeweils a=9 Rillen und auf der Rückseite jeweils b=14 Rillen weitergewickelt werden.

$$U=\frac{kgV((9+14),24)}{9+14}=\frac{552}{23}=24$$

Nach 24 Umdrehungen ist der Faden also wieder am Ausgangspunkt (Position 0)

Wenn a oder b in der Teilermenge der Anzahl der Rillen liegt, bleiben Rillen frei.
Zur zweiten Frage ein kurzer Artikel von Rainer Deißler :

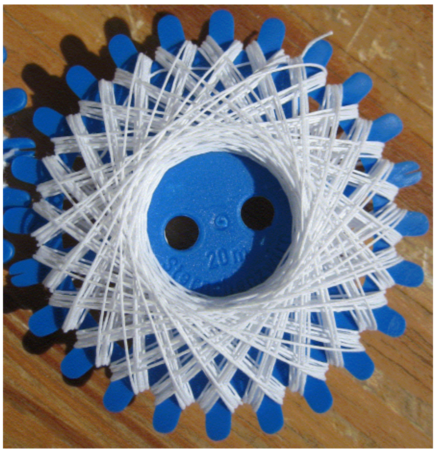
Abgewickelt – Mathematik aus dem Nähkästchen

Rainer Deißler

Muster und Strukturen – ein Blick ins Nähkästchen zeigt eine Fülle davon und eröffnet einfache Möglichkeiten, die Strukturen zu erforschen und Begriffe zu ihrer Beschreibung zu entwickeln. Hier kann einiges abgewickelt werden, und was abgewickelt ist kann man auch wieder aufwickeln – man muss nur wissen wie. Das soll Gegenstand der Untersuchung sein.
Schauen Sie sich den Sternchenzwirn genauer an. Zunächst die einfachen Typen rechts:

Die beiden scheinen keine großen Geheimnisse zu bergen. Sicher könnten Sie die wieder aufwickeln, wenn sie abgewickelt sind.

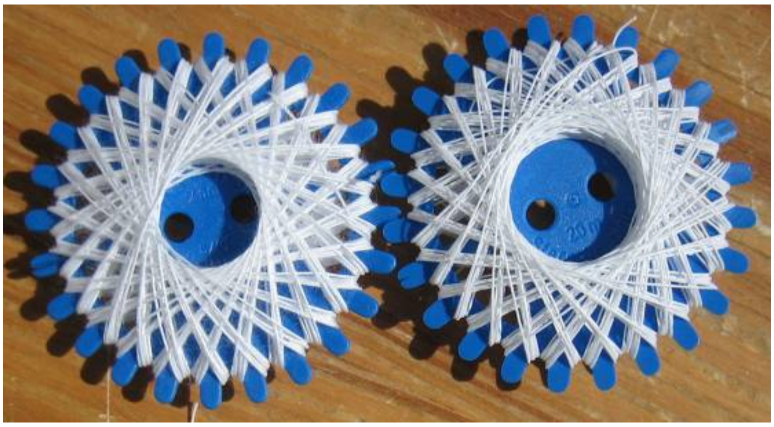
Aber die anderen. Sie sehen etwas komplizierter aus. Wie sind die aufgewickelt?



Betrachten Sie das Sternchen genau. Versuchen Sie Hypothesen zu bilden, wie der Zwirn aufgewickelt sein könnte. Versuchen Sie eine Notation zu finden, mit der Sie jemandem verständlich mitteilen könnten, wie Ihre Wickelregel lautet – auch diese Art der Kommunikation ist ein wesentlicher Aspekt mathematischen Arbeitens.

Vielleicht finden Sie die Lösung am leichtesten, wenn Sie wenig mathematische Erfahrung besitzen und noch nicht nach überall lauernden Primzahlen suchen. Die Antwort mag in diesem

Fall lauten „normal“ und die Erklärung könnte ein in der Luft ausgeführter Wickelvorgang mit dem verbalen Kommentar „ja so eben“ sein.

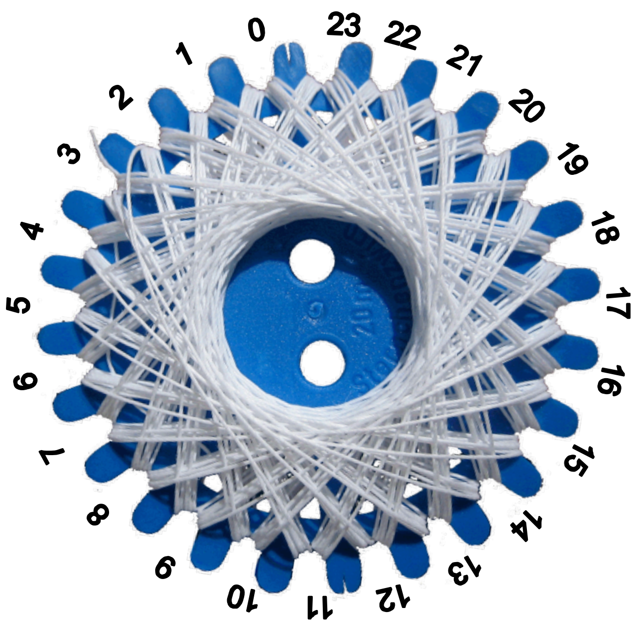


Erklärt ihre Hypothese auch, warum der im Zentrum erscheinende freie Kreis auf der einen Seite offenbar einen anderen Durchmesser hat als auf der anderen? Ja? Dann haben Sie das einfache Prinzip wohl entdeckt. Jetzt fehlt nur noch eine Beschreibung des Wickelvorganges, der einfach mitzuteilen ist.

Falls Sie das Prinzip aber nicht unmittelbar erkennen können, müssen Sie mit dem Sternchenzwirn experimentieren: Finger auf eine Zacke halten, abwickeln, sich merken wo es weiterging, wieder einen Finger auf eine Zacke legen,…… und nie den Überblick verlieren.

Die Anzahl der Zacken bzw. Lücken ist im Gegensatz zu meiner ursprünglichen Erwartung nicht einmal eine Primzahl. Es sind einfach 24 Zacken.

Für eine systematische Notation und Beschreibung geeignet ist das Nummerieren der Zacken auf dem Sternchen mir Folienschreiber. Im folgenden Bild sind allerdings die Lücken nummeriert, da dort die Fäden wirklich durchgehen, auf dem realen Zwirn ist das aber nicht so leicht durchführbar. Außerdem ist es vorteilhaft, bei 0 statt bei 1 mit der Nummerierung zu beginnen – das ist allerdings nicht sofort einzusehen und zunächst auch nicht so bedeutend.



Falls Sie die Wickelregel noch nicht gefunden haben, hier folgt die Auflösung.

Die Notation

Wenn ich den Zwirn von einer Lücke zu einer anderen bewege, dann gebe ich an, wie viele Zacken ich überspringe, im Gegenuhrzeigersinn gezählt. Führe ich den Faden im Uhrzeigersinn über 5 Zacken, dann notiere ich das mit -5. Das ist bei 24 Zacken natürlich dasselbe wie die Bewegung über 19, ist aber leichter vorstellbar.

Wird der Faden auf der Rückseite des Sternchens bewegt, dann wird die Orientierung (Gegen den Uhrzeigersinn oder im Uhrzeigersinn) ebenfalls von der Vorderseite aus betrachtet. Jetzt ist die Regel ganz einfach zu formulieren.

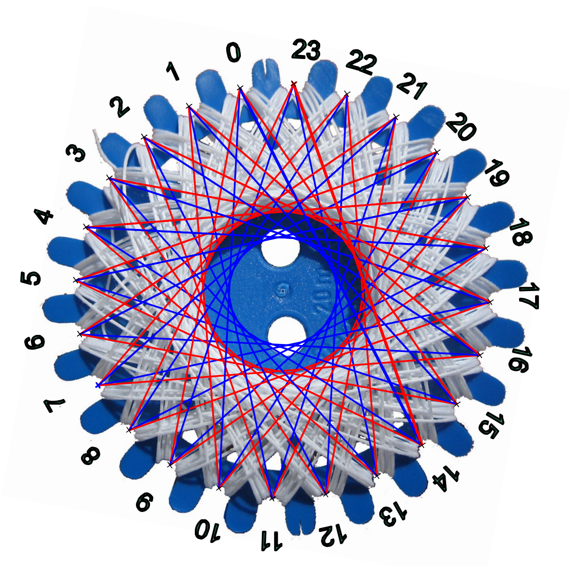
Die Wickelregel
Vorne +9 hinten -10.

Dies erklärt auch sofort, warum

- die Kreise auf der Vorder- und Rückseite verschieden große Durchmesser haben,
- nacheinander alle Lücken durchlaufen werden, da der „Gangunterschied“ zwischen der Vorderseite und der Rückseite bei jeder Wicklung 1 Zacke beträgt.

Leider war die Wickelregel sehr einfach und bietet wenig Überraschung.

Die Wicklung lässt sich zum Beispiel mit Hilfe eines Dynamischen Geometriesystems leicht darstellen (hier mit DynaGeo). Die Fäden auf der Vorderseite werden rot, die auf der Rückseite blau dargestellt. Wie zu erwarten, ist der Kreis auf der Rückseite bei den 10er Sprüngen kleiner als der auf der Vorderseite bei den 9er Sprüngen. Insgesamt also anscheinend wenig mathematisch Anregendes – nachdem das Problem gelöst ist.



Was passiert aber, wenn die Wickelregel von der Regel „**+9 / -10**“ etwas verändert wird?

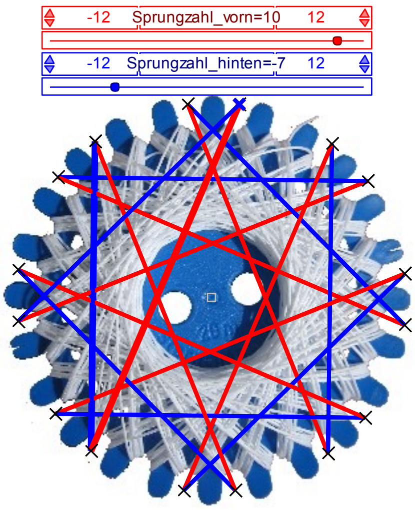
Neue Regeln – neue Fragen

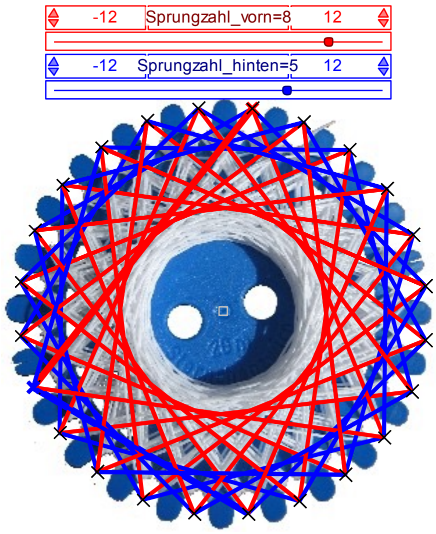
Welche Strukturen ergeben sich bei einer Regel „**+10 / -7**“ ?

Können Sie das ohne Weiteres voraussagen? Oder bei der Regel „**+8 / +5**“?

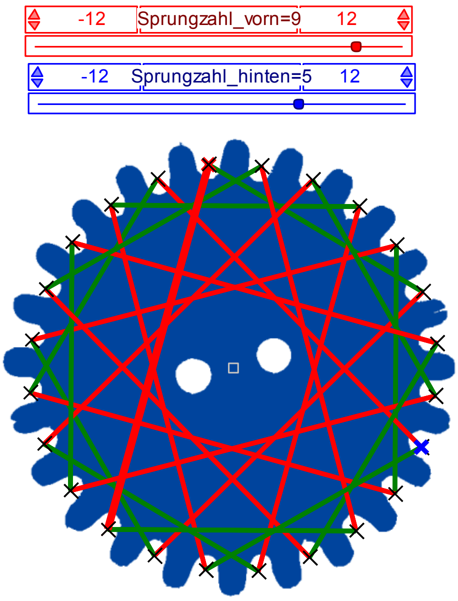
Hier eröffnet sich plötzlich ein großes Experimentierfeld für weitergehende Untersuchungen. Mit Dynamischen Geometriesystemen lässt sich hier leicht experimentieren. Vermutungen können angestellt werden, mit dem System die Hypothesen überprüft werden, und mit einem realen Sternchen könnte man die Wicklung zusätzlich noch überprüfen.

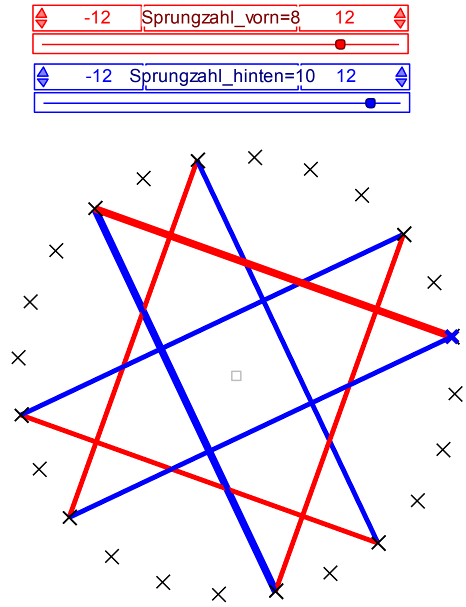
Hier sollen keine fertigen Ergebnisse gegeben werden, sondern zu eigenen Untersuchungen angeregt werden. Dazu einige Beispiele (die oben genannten Regeln):





Oder übersichtlicher ohne Garn oder gleich ohne das reale Sternchen:





Die beiden vorangehenden Bilder zeigen, dass bei manchen Wickelregeln gar nicht alle Lücken getroffen werden, oder dass eventuell die Lücken alle getroffen werden, aber dort nur Fäden verschwinden, aber nicht von hinten auftauchen.

Übung 4.80: Überlegen Sie oder informieren Sie sich, wie beim Lauf der Planeten das kgV ins Spiel kommt.

Auch das Zeitmuster, in dem Sonnenfinsternisse auftreten, wiederholt sich nach einem 18,03-jährigen, so genannten „Saros-Zyklus“. Recherchieren Sie, was dies bedeutet und finden Sie eine Erklärung.

Lösungsmöglichkeit:

Mit Hilfe des kgV kann die Begegnung der verschiedenen Planeten ermittelt werden. Beispielsweise bewegen sich die Planten Venus, Merkur und Erde fast kreisförmig um die Sonne. Die Erde benötigt 365 Tage für einen Umlauf um die Sonne, die Venus benötigt dagegen nur 255 Tage und der Merkur sogar nur 88 Tage. Nun kann mit Hilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen berechnet werden, wann sich die drei Planeten in einer Linie befinden. In einer Linie würde die drei Planten nach kgV(88,255,365)= $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 73 = 1638120$ Tagen=4488 Jahren stehen.

Das kgV dieser drei Zahlen kann mit Hilfe der Primfaktorzerlegung berechnet werden:

$88 = 2^3 \cdot 11$; $255 = 5 \cdot 3 \cdot 17$; $365 = 5 \cdot 73$
kgV(88,255,365)=$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 73 = 1638120$

Das Prinzip des kleinsten gemeinsamen Vielfachen kann auch genutzt werden, um die Zeitmuster, in denen eine Sonnenfinsternis auftritt, zu berechnen.
Leider sind die Umlaufdauern niemals ganze Tage (Erde: 365,2425 Tage), daher ist eine so einfache Rechnung für eine genauere Bestimmung nicht angemessen.

Übung 4.81: Lösungsmöglichkeit:
Die Anzahl der Blätter ist gegeben durch $\frac{a}{ggT(a,b)}$. Die Anzahl der Runden, welche der kleine Kreis im großen Kreis durchläuft kann mit der Formel $\frac{b}{ggT(a,b)}$ berechnet werden.
Somit gilt für ggT(a,b)=1, wenn die Anzahl der Zähne a und b der beiden Zahnräder teilerfremd sind, dass die Anzahl der Blätter durch die Anzahl der Zähne des Zahnrades a gegeben und die Anzahl der Umdrehungen durch die Anzahl der Zähne des Rades b.
Wenn die Anzahl der Zähne des kleinen Zahnrades, die Anzahl der Zähne des großen Zahnrades ohne Rest teilen, dann schließt die Spirale schon nach einer Umdrehung. Die Anzahl der Blätter ist dann der ganzzahlige Quotient der Division a:b.