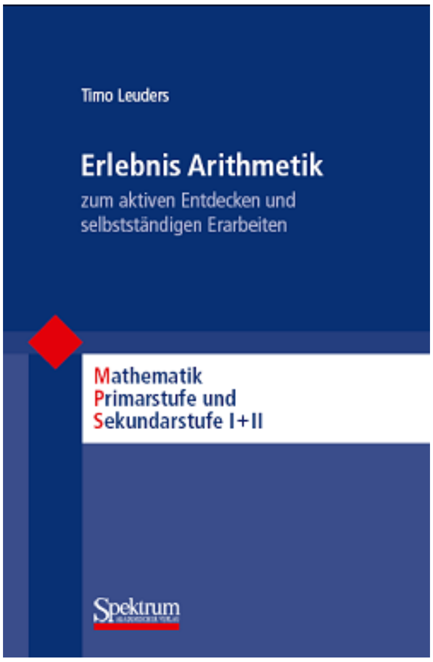


Lösung Übung 3.7

1. Behauptung: a ist gerade $\Rightarrow (a\text{-}1) \cdot (a+1)$ ist ungerade
   Symbolischer Beweis:
   Wenn a eine gerade Zahl ist, dann hat a die Form $a=2n$, mit $n \in \mathbb{N}$.
   Damit gilt:
   $(a\text{-}1)\cdot(a+1) = (2n\text{-}1)\cdot(2n+1) = 4n^2\text{-}2n+2n+1=4n^2+1=2\cdot(2n^2)+1=2\cdot m+1$, mit $m \in \mathbb{N}$.
   Damit ist bewiesen, dass $(a\text{-}1) \cdot (a+1)$ ungerade ist.
   Da sowohl $(a\text{-}1)$ als $(a+1)$ ungerade sind, wenn a gerade ist, haben wir also gezeigt, dass das Produkt zweier ungeraden Zahlen wieder ungerade ist.
2. Behauptung: a und b sind ungerade $\Rightarrow a \cdot b$ ist ungerade
   Symbolischer Beweis:
   Wenn a und b ungerade Zahlen sind, dann haben a und b die folgende Form:
   $a = 2n+1$ und $b = 2m+1$, mit $m, n \in \mathbb{N}$.
   Damit gilt:
   $a \cdot b = (2n+1)\cdot(2m+1) = 4nm+2m+2n+1 = 2\cdot(2nm+m+n)+1 = 2p+1$, mit $p \in \mathbb{N}$.
   Damit ist die bewiesen, dass $a \cdot b$ ungerade ist, wenn a und b gerade sind.

Wer aufmerksam war hat wohl gemerkt, dass diese 2) Behauptung der 1) Behauptung entspricht.

Lösung Übung 3.13

a) Das Produkt von zwei Quadratzahlen ist wieder eine Quadratzahl.

Beispiele:

1) $9 \cdot 4 = 36$
   $3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$
2) $16 \cdot 25 = 400$
   $4^2 \cdot 5^2 = (4 \cdot 5)^2 = 20^2 = 400$

Mögliche Beweise für diese Behauptung:

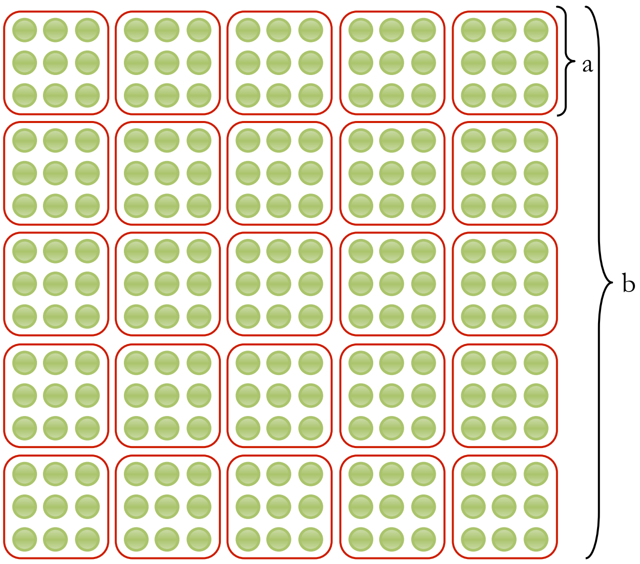
Symbolischer Beweis

Seien a^2 und b^2 Quadratzahlen.

$$a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b = (a \cdot b)^2 = m^2, \text{ mit } m \in \mathbb{N}.$$

Ikonischer Beweis

$b = 5$ Quadrate der Seitenlänge a.



b) Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist immer eine ungerade Zahl.

Beispiele:

1) $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$
2) $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

Mögliche Beweise für die Behauptung:
Symbolischer Beweis
Sei a^2 die erste Quadratzahl der beiden aufeinanderfolgenden Zahlen und $(a+1)^2$ die darauffolgende Quadratzahl. Für die Differenz der beiden aufeinanderfolgenden Quadratzahlen gilt dann:

$$(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1^2 - a^2 = 2a+1$$

Da $2a$ immer gerade ist, muss $2a+1$ also ungerade sein.

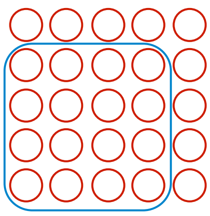
Generischer Beweis

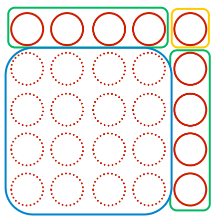
$$5^2 - 4^2 = (4 + 1)^2 - 4^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1^2 - 4^2 = 2 \cdot 4 + 1$$

Dieses Verfahren kann bei allen Zahlen so angewendet werden.
Zwei Potenzen mit unterschiedlichen Basen und gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und die Exponenten beibehält.

Ikonischer Beweis

Bei der Bildung der Differenz der beiden aufeinanderfolgenden Quadratzahlen $((a + 1)^2 - a^2)$ bleibt zwei Mal die Menge a übrig und ein einzelner Punkt. Die Zahl hat also die Form $2a + 1$ und ist somit ungerade.





Verbaler (symbolischer) Beweis
Von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer eine Zahl gerade und eine Zahl ungerade.

- Gerade Zahlen ($2n$) haben immer eine gerade Quadratzahl:

  $$(2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot (2n^2) = 2m, \text{ mit } m \in \mathbb{N}.$$

  Das Ergebnis ist also eine gerade Zahl.

- Ungerade Zahlen ($2n + 1$) haben immer eine ungerade Quadratzahl:

  $$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 2 \cdot 2n + 1^2 = 4n^2+4n+1 = 2m+1,$$

  mit $m \in \mathbb{N}$.

Von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist also immer eine Zahl gerade und eine Zahl ungerade.

Bei beiden Möglichkeiten kann das Ergebnis nur eine ungerade Zahl sein. Subtrahiert man eine gerade Zahl von einer ungeraden Zahl ist das Ergebnis immer ungerade. Ebenso, wenn man eine ungerade Zahl von einer geraden subtrahiert.

- $(2n+1)-2m=2\cdot(n-m)+1=2p+1$, mit $p \in \mathbb{N}$.
- $2m-(2n+1)=2\cdot(m-n)+1=2p+1$, mit $p \in \mathbb{N}$.

c) Die Quersumme (d.h. die Summe der Ziffern einer Zahl) einer dreistelligen Quadratzahl ist wieder eine Quadratzahl.

Beispiele:

1) $12^2=144$
   $1+4+4=9$, ist eine Quadratzahl
2) $16^2=256$
   $2+5+6=13$ ist keine Quadratzahl.

Da ein Gegenbeispiel reicht um eine Behauptung zu widerlegen, ist die Behauptung damit widerlegt. Man kann aber fragen: Bei welchen Zahlen ist die Regel richtig, und woran liegt es?
Eine wahre Behauptung könnte heißen: Wenn die Basis einer mehrstelligen Quadratzahl durch 3 teilbar ist, so ist ihre Quersumme immer 9.

d) Die Endziffern von Quadratzahlen sind immer nur 0, 1, 4, 6, 5 und 9.
Beispiele:

1) $5^2 = 25$, Endziffer 5
2) $37^2 = 1369$, Endziffer 9

Mögliche Beweise für diese Behauptung:
Verbaler(symbolischer) Beweis
Die Endziffer einer Quadratzahl wird über das Quadrat der Endziffer der Ursprungszahl bestimmt (das kann man sich z.B bei der schriftlichen Multiplikation deutlich machen).

*Y · *Y (*Y ist eine zweistellige Zahl mit Endziffer Y)

**
  ***
  **Z (Z ist die Endziffer von Y^2)

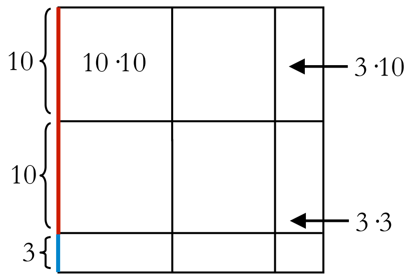
  ***Z

Die Endziffern der Ursprungszahl können nur die Ziffern 0 bis 9 sein. Es reicht daher, die Quadratzahlen dieser Zahlen zu betrachten um daraus auf alle möglichen Endziffern aller Quadratzahlen schließen zu können. Die Quadrate der möglichen Endziffern:

$0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$

Die möglichen Endziffern von Quadratzahlen sind also: 0, 1, 4, 5, 6 und 9.

Ikonische Darstellung



Alle Rechtecke oder Quadrate haben mindestens eine Seite mit der Länge 10, also einen Flächeninhalt der ein Vielfaches von 10 ist – außer der Ecke rechts unten. Die Fläche dieser Ecke gibt dann die Endziffer der Quadratzahl an, welche-wie zu erkennen ist- über das Quadrat der Endziffer der Ursprungszahl bestimmt wird.

Symbolischer Beweis
Jede zweistellige Zahl kann in folgender Form dargestellt werden: $(10x+y)^2$.
$10x$ stellt die Zehnerziffer da und y stellt die Einerziffer da.

$(10\cdot x+y)^2 = \ldots+y^2$

Mit Ausnahme der Einerziffer sind alle anderen Summanden Vielfache von 10. Somit wird also die Endziffer einer Quadratzahl über das Quadrat der Endziffer der Ursprungszahl bestimmt.

e) Die Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist genau so groß wie die Differenz ihrer Quadrate.

Beispiele:
1) $1+2 = 3 \rightarrow 2^2-1^2 = 3$
2) $11+12 = 23 \rightarrow 12^2- 11^2 = 23$

Mögliche Beweise für diese Behauptung:
Symbolischer Beweis

Die Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen kann folgender maßen dargestellt werden:

$$n+(n+1)=n+n+1=2n+1$$

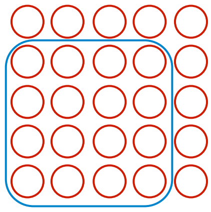
Die Differenz ihrer Quadrate kann auf diese Weise dargestellt werden:

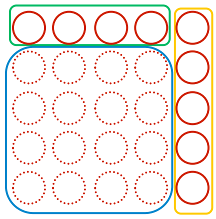
$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$$

Somit ist die Aussage bewiesen.

Ikonischer Beweis

Bei der Bildung der Differenz der beiden aufeinanderfolgenden Quadratzahlen bleibt eine Reihe Punkte übrig, die so groß ist wie die erste Zahl und eine Reihe, welche so groß ist wie deren Nachfolger. Die Differenz der beiden Quadratzahlen entspricht also der Summe der beiden Zahlen.





Lösung Übung 3.14

Symbolischer Beweis

Sei a^2 eine ungerade Quadratzahl. Dann ist $a^2=(2n+1)^2$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Durch umformen erhält man:

$$a^2=(2n+1)^2=(2n)^2+2\cdot 2n+1^2 = 4n^2+4n+1=4\cdot(n^2+n)+1 = 4n\cdot(n+1)+1$$

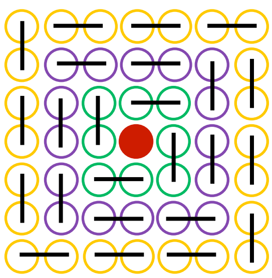
Wenn n gerade ist, dann ist $n+1$ ungerade. Ist n ungerade, dann ist $n+1$ gerade. Also ist $n\cdot(n+1)$ das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen und somit gerade. Deshalb gilt $n\cdot(n+1)=: 2m$, mit $m \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad a^2=4\cdot 2m+1=8\cdot m+1$$

Also sind die ungeraden Quadratzahlen immer um 1 größer als ein Vielfaches von 8.

Ikonischer Beweis

Das Quadrat einer ungeraden Zahl hat folgende Form:



Das Quadrat der ersten ungerade Zahl (1^2) ist um 1 größer als ein Vielfaches 8 ($0 \cdot 8+1$). Das Quadrat der zweiten ungeraden Zahl (3^2) kann, wie in der Darstellung gezeigt, in vier Zweierbündelungen und eine Kugel in der Mitte unterteilt werden. Auch diese ungerade Quadratzahl ist also um 1 größer als ein

Vielfaches von 8. Um das Quadrat einer jeden weiteren ungeraden Zahl zu bilden, kommen an jeder Quadratseite zwei Kugeln dazu, da der Abstand von einer ungeraden Zahl zu ihrer nachfolgenden ungeraden Zahl immer 2 beträgt. Insgesamt kommen also vier Zweierbündelungen hinzu. Das Quadrat einer jeden weiteren ungeraden Zahl ist somit um 1 größer als ein Vielfaches von 8.

Lösung Übung 3.15

a) $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$

Situationsbeweis

Man stelle sich vor man möchte aus zehn möglichen gesangsbegabten Personen eine siebenköpfige Band zusammenstellen. Da ist es doch das Gleiche, ob man sich für sieben Personen entscheidet, die Mitglieder der Band werden dürfen, oder für drei Personen, welche keine Mitglieder der Band werden sollen.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Symbolischer Beweis:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$

Situationsbeweis

Ein Manager hat durch ein Casting vier äußerst talentierte Tänzer entdeckt. Der Manager möchte durch diese Kandidaten eine Tanzgruppe zusammenstellen. Allerdings ist er sich sehr unschlüssig, aus wie viel Personen seine Gruppe bestehen soll. Es könnte ein Solo, Duo, Trio oder Quartett werden. Wenn sich die Tänzer ihm besonders schlecht präsentieren, könnte es sein, dass auch überhaupt keine Tanzgruppe entstehen kann. Nun fragt sich der Manager wie viele Möglichkeiten es gibt verschiedene Gruppen in den verschiedenen Größen zu bilden. Er zählt zuerst die Möglichkeiten, ein Solo zu bilden, dann die Möglichkeiten ein Duo zu bilden, dazu zählt er die Möglichkeiten ein Trio zu erstellen, ebenso die Möglichkeiten ein Quartett und die Möglichkeit keine Band zu bilden. Später überlegt der Manager, dass er auch durch die Reihen gehen hätte können, vor jeder Person halt machen und sich dann für ein „Du bist dabei“ bzw. für ein

„Du bist nicht dabei“ entscheiden können. Dann hätte er bei jedem Sänger immer zwei Möglichkeiten der Entscheidung gehabt.

Symbolischer Beweis:
Mit der Formel für Potenzen von Binomen. Möglicherweise wird es klarer, wenn man statt 1+1 zunächst a+b schreibt und am Schluss a=b=1 setzt.

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \cdots + 1^{n-n} 1^n \binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$\Rightarrow 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

c) $\binom{100}{2} + 100 = \binom{101}{2}$

Beispiel:

$$\binom{8}{3} + 8 = \binom{9}{3}$$

$$\binom{8}{3} + 8 = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} + 8 = \frac{8!}{3! 5!} + 8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 8 = 56 + 8 = 64$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot (9-3)!} = \frac{9!}{3! 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

⇨ $\binom{8}{3} + 8 \neq \binom{9}{3}$

Der Beweis scheint hier also nicht auf alle Zahlen übertragbar zu sein. Damit dieser funktioniert muss die Zahl Zwei in der Formel offensichtlich fest sein.

$$\binom{8}{2} + 8 = \binom{9}{2}$$

$$\binom{8}{2} + 8 = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} + 8 = \frac{8!}{2! 6!} + 8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 8 = 28 + 8 = 36$$

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9!}{2! 7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 36$$

$$=> \binom{8}{2} + 8 = \binom{9}{2}$$

Nun muss der Beweis noch mit den allgemeinen Variablen geführt werden.

Symbolischer Beweis

$$\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$$

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} + n$$

$$= \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} + \frac{n\cdot 2!\cdot(n-2)!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n!+n\cdot 2!\cdot(n-2)!}{2!\cdot(n-2)!} \quad \Big| \text{ Erweitern mit (n-1)}$$

$$= \frac{n!(n-1)+n\cdot 2!\cdot(n-2)!\cdot(n-1)}{2!\cdot(n-2)!\cdot(n-1)} = \frac{n!\cdot(n-1)+n\cdot 2!\cdot(n-1)!}{2!\cdot(n-1)!} = \frac{n!\cdot(n-1)+n!\cdot 2!}{2!\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{n!\cdot\big((n-1)+2!\big)}{2!\cdot(n-1)!} = \frac{n!\cdot(n-1+2)}{2!\cdot(n-1)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{2!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{2!\cdot(n-1)!}$$

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!\cdot(n+1-2)!} = \frac{(n+1)!}{2!\cdot(n-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$$

Situationsbeweis
Die Mathefachschaft gibt eine Party unter dem Motto „Lasst die Gläser klingen." Von den 100 Gästen muss gemäß dem Motto jeder ein Mal mit jedem das Glas erklingen lassen. Bei jedem Gästepaar klingen die Gläser also einmal.
Nachdem alle die Gläser erklingen ließen, taucht Paul, der wie immer zu spät kommt, bei der Party auf. Auch er muss noch mit allen 100 Gästen einmal das Glas klingen lassen. Die Gläser klingen also zusätzliche 100 Mal.
Die Anzahl des „Gläserklingens" ist dann insgesamt natürlich genauso groß wie wenn Paul pünktlich gewesen wäre und von Anfang an 101 Gäste auf der Party gewesen wären.

Lösung Übung 3.16

Zunächst wird das binom dritten Grades aufgelöst:
$(a+b)^3 = a^3\cdot b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Die einzelnen Summanden des aufgelösten Binoms können nun den verschiedenen Quadern zugeordnet werden.

a^3 → dunkelblau
$3a^2b$ → hellblau, olivgrün, beige
$3ab^2$ → grün, gelb, rot
b^3 → orange

Lösung Übung 3.17

a) Mögliche Implikationen
1)
A⇒ B Milena ist Slowenin, also ist sie Europaerin. wahr

$B \Rightarrow A$	Milena ist Europäerin, also ist sie Slowenin.	falsch
$\neg A \Rightarrow \neg B$	Milena ist nicht Slowenin, also ist sie nicht Europäerin.	falsch
$A \Rightarrow \neg B$	Milena ist Slowenin, also ist sie keine Europäerin.	falsch

2)

$A \Rightarrow B$	Knut hat eine Schwester, also ist er Einzelkind.	falsch
$\neg B \Rightarrow A$	Knut ist nicht Einzelkind, also hat er eine Schwester.	falsch
$\neg A \Rightarrow \neg B$	Knut hat nicht eine Schwester, also ist er nicht Einzelkind.	falsch
$A \Rightarrow \neg B$	Knut hat eine Schwester, also ist er kein Einzelkind	wahr

3)

$A \Rightarrow \neg B$	*a* ist durch 3 teilbar, also hat a eine Quersumme, die nicht durch 3 teilbar ist.	wahr
$B \Rightarrow A$	*a* hat eine Quersumme, die durch teilbar ist, also ist a durch 3 teilbar	wahr
$\neg B \Rightarrow \neg A$	*a* hat eine Quersumme, die nicht durch teilbar ist, also ist a nicht durch 3 teilbar.	wahr
$A \Rightarrow B$	a ist durch 3 teilbar, also hat a eine Quersumme, die durch 3 teilbar ist.	Falsch

4)

$A \Rightarrow B$	*a* ist durch 5 und durch 2 teilbar, also hat a die Endziffer 0.	wahr
$B \Rightarrow \neg A$	*a* hat die Endziffer 0, also ist a nicht durch 5 oder nicht durch 2 teilbar.	falsch
$\neg A \Rightarrow B$	a ist nicht durch 5 oder nicht durch 2 teilbar, also hat a die Endziffer 0.	falsch
$\neg A \Rightarrow \neg B$	a ist nicht durch 5 oder nicht durch 2 teilbar, also hat a nicht die Endziffer 0.	wahr

b) Aussagen, deren Umkehrung nicht richtig sind

Aussage:
Milena ist Slowenin, also ist sie Europäerin.
Umkehrung:
Milena ist Europäerin, also ist sie Slowenin.

Aussage:
Das gesuchte Tier ist ein Hund, also ist das gesuchte Tier ein Säugetier.
Umkehrung:
Das gesuchte Tier ist ein Säugetier, also ist das gesuchte Tier ein Hund.

c) Aussagen, bei denen die Implikation und Umkehrung richtig sind.

Aussage:
a ist durch 2 und durch 5 teilbar, also hat a die Endziffer 0.
Umkehrung:
a hat die Endziffer 0, also ist a durch 5 und durch 2 teilbar.

Aussage:
Wenn eine Zahl durch 2 teilbar, dann ist ihre letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8.
Umkehrung:
Wenn die letzte Ziffer einer Zahl 0, 2, 4, 6 oder 8 ist, dann ist sie durch 2 teilbar.

Lösung Übung 3.18

Definitionen der einzelnen Figuren:
Rechteck:
Ein Rechteck ist ein ebenes Viereck, dessen Innenwinkel alle rechte Winkel sind.
Rhombus (Raute):
Ein Rhombus ist ein ebenes Viereck, dessen Seiten alle gleich lang sind.
⇒Damit ist nicht jedes Rechteck eine Raute, da bei einer Raute alle Seiten gleich lang sein müssen. Beim Rechteck dagegen müssen nur alle Winkel gleich groß sein. Dennoch kann ein Rechteck natürlich ein Rhombus sein.
Quadrat:
Ein Quadrat ist ein ebenes Viereck, dessen Seiten und Winkel alle gleich groß sind.
⇒Damit ist nicht jedes Rechteck ein Quadrat, da bei einem Quadrat sowohl alle Seiten als auch alle Winkel gleich groß sein müssen. Beim Rechteck dagegen müssen nur alle Winkel gleich groß sein. Natürlich kann ein Rechteck dennoch ein Quadrat sein.
Trapez:
Ein Trapez ist ein ebenes Viereck mit zwei parallel zueinander liegenden Seiten.
⇒ Da bei einem Rechteck, auf Grund der Bedingung dass alle Winkel gleich groß sind, gegenüberliegende Seiten parallel sein müssen, ist jedes Rechteck ein Trapez.
Parallelogramm:
Ein Parallelogramm ist ein ebenes Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.
⇒ Da bei einem Rechteck, auf Grund der Bedingung dass alle Winkel gleich groß sind, gegenüberliegende Seiten parallel sein müssen, ist jedes Rechteck ein Parallelogramm.

$Re(x) \Rightarrow R(x)$	falsch
$Re(x) \Rightarrow Q(x)$	falsch
$Re(x) \Rightarrow T(x)$	wahr
$Re(x) \Rightarrow P(x)$	wahr

Das Problem liegt in dieser Frage folglich darin, dass jedes Rechteck sowohl ein Parallelogramm als auch ein Trapez sein kann. Diese Frage kann somit nicht eindeutig beantwortet werden.

Lösung Übung 3.19

Eine Kontraposition entsteht dadurch, dass man die Richtung einer Aussage umkehr und diese Umkehrung dann verneint. Eine Aussage und ihre Kontraposition sind gleichwertig, es sind lediglich verschiedene Sichtweisen auf das zu beweisende Phänomen. Ist also eine Aussage wahr, dann ist auch ihre Kontraposition wahr. Ist umgekehrt die Aussage nicht wahr, so ist auch ihre Kontraposition nicht wahr. Diese Tatsache kann für das Beweisen sehr nützlich sein. Kann beispielsweise eine Aussage nur schwer bewiesen werden, so kann man versuchen stattdessen die Kontraposition zu beweisen und hat damit gleichzeitig auch die Aussage selbst bewiesen.

a ist eine Quadratzahl ⇒ $4a$ ist eine Quadratzahl
Aussage:
a ist eine Quadratzahl ⇒ $4a$ ist eine Quadratzahl
Kontraposition:
$4a$ ist keine Quadratzahl ⇒ a ist keine Quadratzahl
Die Kontraposition eignet sich nicht gut für einen Beweis. Also wird die Aussage bewiesen.
Beweis:
Sei a eine Quadratzahl. Dann ist $a = n^2$

$$4a=4n^2=2^2\cdot n^2=2n\cdot 2n=(2n)^2=m^2, \text{ mit } n, m\in \mathbb{N}$$

$4a$ ist also eine Quadratzahl.

Aussage: a durch 2 teilbar ⇒ a^2 ist durch 2 teilbar
Kontraposition: a^2 ist nicht durch 2 teilbar ⇒ a ist nicht durch 2 teilbar
Die Kontraposition eignet sich nicht gut für einen Beweis. Also wird die Aussage bewiesen.
Beweis:
Sei a durch 2 teilbar. Dann ist $a=2n$, mit $n \in \mathbb{N}$

$$a^2=(2n)^2=2n\cdot 2n=2\cdot 2n^2=2m, \text{ mit } m \in \mathbb{N}$$

a^2 ist also teilbar durch 2.

Aussage: a ist teilbar durch 6 ⇒ a ist teilbar durch 3
Kontraposition: a ist nicht teilbar durch 3⇒ a ist nicht teilbar durch 6
Die Kontraposition eignet sich nicht gut für einen Beweis. Also wird die Aussage bewiesen.
Beweis:

Sei a durch 6 teilbar. Dann ist $a=6n$, mit $n \in \mathbb{N}$

$$a=6n=2\cdot 3n=3\cdot 2n \quad \text{, sei } 2n:=m \text{, mit } m \in \mathbb{N}$$

$$a=3m$$

a ist also teilbar durch 3.

Aussage: a ungerade $\Rightarrow$ $2a$ gerade
Kontraposition: $2a$ ungerade $\Rightarrow$ a gerade
Beweis:
Beweis durch die Aussage:
Sei a ungerade. Dann ist $a=2n+1$

$$2a=2\cdot(2n+1)=2m, \text{ mit } m=2n+1, \text{ mit } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

$2a$ ist also teilbar durch 2 und damit gerade.

Beweis durch die Kontraposition:
Die Aussage $2a$ ist ungerade ist in sich ein Widerspruch.
Hier tritt der zunächst seltsame Fall ein, dass die Folgerung ($2a$ gerade) die Voraussetzung (a ungerade) gar nicht gebraucht hat. $2a$ ist immer gerade.
In der Kontraposition ist die Aussage ($2a$ ungerade) also immer falsch.
Wenn weiterhin Aussage und Kontraposition gleichwertig sein sollen, müsste also die Folgerung

$$2a \text{ ungerade} \Rightarrow a \text{ gerade}$$

wahr sein! Aus etwas Falschem ($2a$ ungerade) folgt also eine Behauptung, die nicht einmal unbedingt wahr sein muss. Noch allgemeiner geschrieben:

Wenn B wahr ist (also z.B. $2>1$) so ist A $\Rightarrow$ B immer wahr, egal was A besagt.
Damit ist die Kontraposition, also (nicht B $\Rightarrow$nicht A) auch immer wahr.
Eine Aussage (X $\Rightarrow$ Y) in der X falsch ist, ist also auch immer wahr.
Man sagt: „Aus etwas falschen folgt Alles“. Aus $1=0$ kann man z.B. 3 ist gerade folgern. Probieren Sie es!

Aussage: a teilbar durch 3 $\Rightarrow$ 4 a teilbar durch 3
Kontraposition: 4 a ist nicht teilbar durch 3$\Rightarrow$ a ist nicht teilbar durch 3

- ➔ die Kontraposition eignet sich nicht gut für einen Beweis. Also wird die Aussage bewiesen.

Beweis:
Sei a durch 3 teilbar. Dann ist $a=3n$

$$4a = 4\cdot 3n=3m \text{ mit } m=3n, \text{ mit } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

$4a$ ist somit teilbar durch 3.

Aussage: a teilbar durch 3 $\Rightarrow$ $4a$ teilbar durch 6
Kontraposition: $4a$ ist nicht teilbar durch 6$\Rightarrow$ a ist nicht teilbar durch 3

Die Kontraposition eignet sich nicht gut für einen Beweis. Also wird die Aussage bewiesen.
Beweis:
Sei a durch 3 teilbar. Dann ist a = 3·n

$$4a=4\cdot 3n=2\cdot 2\cdot 3n=2\cdot 3\cdot 2n=6\cdot 2n,\text{ sei } 2n:=m,\text{ mit } a, n, m \in \mathbb{N}.$$

$$4a=6m$$

Damit ist $4a$ teilbar durch 6.

Aussage: $a\cdot b$ ist gerade $\Rightarrow$ a ist gerade oder b ist gerade.
Kontraposition: a ist ungerade und b ist ungerade $\Rightarrow a\cdot b$ ist ungerade.
Beweis durch Kontraposition:
Wenn a und b ungerade Zahlen sind, dann ist $a=2\cdot n+1$ und $b=2\cdot m+1$

$$a\cdot b=(2n+1)\cdot(2m+1)=4nm+2m+2n+1=2\cdot(2nm+m+n)+1$$

Sei $p:=(2\cdot nm+m+n)$, dann ist

$$a\cdot b=2p+1,\text{ mit } a, n, m, p \in \mathbb{N}.$$

Also ist $a\cdot b$ eine ungerade Zahl

Aussage: $a+b$ ist ungerade $\Rightarrow$ a ist gerade oder b ist gerade.
Kontraposition: a ist ungerade und b ist ungerade $\Rightarrow$ $a+b$ ist gerade.
Beweis durch Kontraposition:
Wenn a und b ungerade Zahlen sind, dann ist $a=2n+1$ und $b=2m+1$

$$a+b=(2n+1)+(2m+1)=2m+2n+4=2\cdot(m+n+2)$$

Sei $p:=(m+n+2)$, dann ist

$$a+b=2p,\text{ mit } a, n, m, p \in \mathbb{N}.$$

$a+b$ ist eine gerade Zahl.

Lösung Übung 3.20

Aussage:
a ist gerade und Vielfaches von 5.
Gegenteil der Aussage:
a ist ungerade oder kein Vielfaches von 5.

Aussage:
2 ist Teiler von a und a ist Teiler von 10.
Gegenteil der Aussage:
2 ist kein Teiler von a oder a ist kein Teiler von 10.

Aussage:
a ist eine Quadratzahl und gerade.
Gegenteil der Aussage:

a ist keine Quadratzahl oder ungerade.

Aussage:
a ist gerade oder durch 3 teilbar.
Gegenteil der Aussage:
a ist ungerade und nicht durch 3 teilbar.

Um sicherzugehen kann man die Aussage und ihr Gegenteil noch einmal an Beispielen überprüfen

	Aussage			Gegenteil		
Beispiele	Teilaussage 1	Teilaussage 2	Gesamtaussage	Teilaussage 1	Teilaussage 2	Gesamtaussage
	a gerade	5 teilt a	a gerade und 5 teilt a	a ungerade	5 teilt a nicht	a ungerade oder 5 teilt a nicht
10	wahr	wahr	wahr	falsch	falsch	falsch
12	wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch
5	falsch	wahr	falsch	wahr	falsch	falsch
7	falsch	falsch	falsch	wahr	wahr	wahr

- Das Gegenteil einer Aussage (¬A) die genau dann wahr, wenn die Aussage (A) falsch ist, und genau dann falsch, wenn A wahr ist. Zusammenfassend kann somit gesagt werden, dass die Verneinung einer Aussage den Wahrheitswert der Aussage selbst in das Gegenteil umdreht.
- Die Aussage A∧B ist immer dann wahr, wenn sowohl die Teilaussage A als auch die Teilaussage B wahr sind. Wenn entweder die Teilaussage A oder die Teilaussage B oder beide Teilaussagen falsch sind, dann ist die Aussage A∧B immer falsch.
- Die Aussage A∨B ist immer dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussagen A oder B wahr ist, oder sogar beide Teilaussagen wahr sind. Andernfalls ist die Aussage A∨B falsch. Die Aussage A∨B ist also immer dann falsch, wenn sowohl die Teilaussage A als auch die teilaussage B falsch ist.

Lösung Übung 3.21

$a \cdot b$ gerade $\Rightarrow$ a ist gerade oder b ist gerade.

Bildung der Kontraposition:

1. Gegenteil der Teilaussage A: $a \cdot b$ ist ungerade.
2. Gegenteil der Teilaussage B: a ist ungerade und b ist ungerade.
Kontraposition: a ist ungerade und b ist ungerade $\Rightarrow$ $a \cdot b$ ist ungerade.

Beweis durch Kontraposition:
Seien a und b ungerade Zahlen, dann ist $a = 2 \cdot n+1$ und $b = 2 \cdot m+1$

$$a \cdot b=(2n+1) \cdot (2m+1)=4nm+2m+2n+1^2=2 \cdot (2nm+m+n)+1$$

sei

$$p:=(2nm+m+n), \text{ mit } a, \text{b}, n, m, p \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $a \cdot b=2p+1$, also ungerade.

$a+b$ ist nicht durch 2 teilbar $\Rightarrow$ a ist gerade oder b ist gerade.

Bildung der Kontraposition:
1. Gegenteil der Teilaussage A: $a+b$ ist durch 2 teilbar.
2. Gegenteil der Teilaussage B: a ist ungerade und b ist ungerade.
$\Rightarrow$ Kontraposition: a ist ungerade und b ist ungerade $\Rightarrow$ $a+b$ ist durch 2 teilbar.

Beweis durch Kontraposition:
Seien a und b ungerade Zahlen, dann ist $a = 2 \cdot n+1$ und $b = 2 \cdot m+1$

$$a+b=(2n+1)+(2m+1)=2n+2m+2=2(m+n+1)$$

sei $p:=(m+n+1)$, dann ist

$$a+b=2p, \text{ mit } a, b, n, m, p \in \mathbb{N}.$$

Also ist $a+b$ durch 2 teilbar.

Wenn $b \cdot c$ keine Quadratzahl ist, sind auch b und c keine Quadratzahlen.

Bilden der Kontraposition:
1. Gegenteil der Teilaussage A: $b \cdot c$ ist eine Quadratzahl.
2. Gegenteil der Teilaussage B: b oder c sind Quadratzahlen.
$\Rightarrow$ Kontraposition: b oder c sind Quadratzahlen $\Rightarrow$ $b \cdot c$ ist eine Quadratzahl.

Beweis durch Kontraposition: Geht nicht, denn die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel:
$b=9$, $c=2$ erfüllt „b oder c sind Quadratzahlen". Aber $9 \cdot 2 = 18$ ist keine Quadratzahl.
Ein Gegenbeispiel reicht aus um zu zeigen, dass die Aussage falsch ist.

Lösung Übung 3.22

a sein die Anzahl der kleinen Würfel entlang einer Kante des großen Würfel. Die Gesamtzahl der kleinen Würfel ist somit a^3. Die verbleibende Zahl an kleinen Würfeln nach dem Entfernen aller kleinen Würfel entlang einer Kante kann mit der Formel a^3-a dargestellt werden. Es soll nun bewiesen werden, dass a^3-a durch 6 teilbar ist.

$$a^3-a = a\cdot(a^2-1) = a\cdot(a-1)\cdot(a+1) = (a-1)\cdot a\cdot(a+1)$$

$(a-1)\cdot a\cdot(a+1)$ ist das Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen. Beim Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer eine der drei Zahlen durch 2 teilbar und eine der drei Zahlen ist durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt auch durch 6 teilbar.

Lösung Übung 3.23

a)

1. $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
2. $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
3. $\neg ((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow \neg (A \vee B) \vee \neg C \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \vee \neg C$
4. $\neg ((\neg A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow \neg (\neg A \vee B) \vee \neg C \Leftrightarrow A \wedge \neg B \vee \neg C$
5. $A \wedge B \Leftrightarrow B \vee A$
6. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
7. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
8. $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
9. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

b)

$A \dot{\vee} B \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

$A \dot{\vee} B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$

$A \dot{\vee} B \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Die Gleichwertigkeit dieser Ausdrücke kann man mit den Regeln aus a) überprüfen.