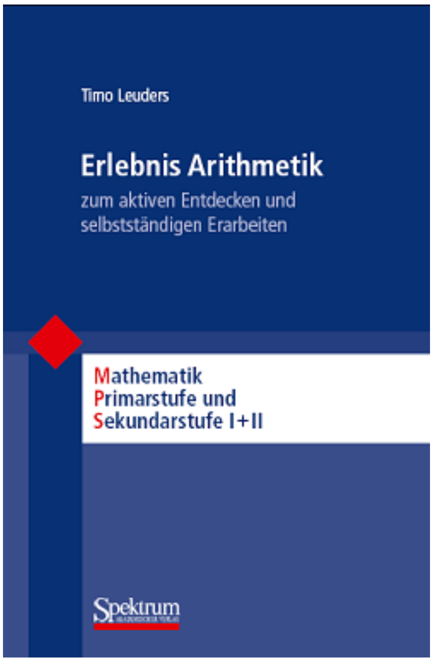


Kapitel 7 Hinweise und Lösungen

Erkundung 7.1:

Lösungsmöglichkeit:
Die Sumerer und Babylonier hatte schon sehr früh ein sehr fortschrittliches Zahlensystem, welchem wir heute zu verdanken haben, dass eine Stunde 60 Minuten und eine Minute 60 Sekunden hat. Die Basis ihres Stellenwertsystems war die Zahl 60 und nicht wie in unserem heutigen Zahlsystem die Basis Zehn. Das Zahlsystem der Babylonier wurde Sexagesimalsystem genannt. Im Gegensatz zu unserem Zehnersystem, welches zehn Ziffern benötigt, benötigt das Sexagesimalsystem nur zwei Zahlzeichen.

 ⇒ Dieses Zeichen entspricht der Zahl Eins.

 ⇒ Ein Keil entspricht der Zahl Zehn, die ist also die 20.

Bis zur Zahl 59 werden die Zeichen einfach mehrfach hintereinander notiert.
Die erste Zahl kann also folgendermaßen interpretiert werden:

 = 34

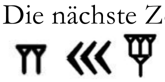
3·10 +4·1

Die Babylonier hatten mit ihrem Sexagesimalsystem ein Problem, ihnen fehlte die Null. Durch die Ziffer Null können wir zwischen $34=34\cdot10^0$, $340=34\cdot10^1$ oder $34000=34\cdot60^3$ unterscheiden. Bei den Babyloniern war nicht klar, ob mit

 = 34

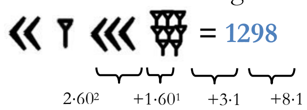
die Zahl $34\cdot60^0$ oder $34\cdot60^1$ oder $34\cdot60^9$gemeint ist. Dies musste sich aus dem Zusammenhang erschließen.

Die nächste Zeichenfolge kann folgendermaßen interpretiert werden:

 = 154

$2\cdot60^1$ +3·10 +4·1

Entsprechend zu unserem heute geläufigen System stehen ganz rechts die Zahlen bis 59. Dann folgen die Bündelungen 60^1, 60^2, 60^3, 60^4,…
Die letze Zeichenfolge wird dementsprechend folgendermaßen interpretiert.



Erkundung 7.2:

Lösungsmöglichkeit:
Das griechische Zahlsystem benutzte für die Ziffern der Zahlen Buchstaben. Man nennt dieses Zahlensystem das „alphabetische Zahlensystem“.
Das oben gezeigte griechische Zahlsystem ist das milesische Zahlsystem. Hier wird, nach der Reihenfolge der Buchstaben im Alphabet, den einzelnen Buchstaben ein dekadisch gestufter Zahlenwert zugeordnet. Hierbei wird das Alphabet in drei Neunergruppen eingeteilt. Jeweils neun Symbole für die Darstellung der Einer, Zehner und Hunderter. Da das Alphabet aus nur 26 Buchstaben besteht, für dieses System jedoch 3·9=27 Symbole benötigt wurden, erweiterte man die Buchstaben des klassischen Alphabets um weitere alte Buchstaben:

ϡ ⇒Sampi: Entspricht der Zahl 900.

ϟ ⇒ Koppa: Entspricht der Zahl 90.

ς ⇒ Digamma: Entspricht der Zahl Sechs.

Durch Addition der einzelnen Zahlenwerte konnten so alle Zahlen von 1-999 dargestellt werden. Um größere Zahlen zu schreiben wird dann wieder von vorne begonnen. Auch dieses Zahlensystem kannte keine Null.
Folgendermaßen wurden die Zahlziffern den Buchstaben zugeordnet:

α =1	**ι** =10	**ρ** =100
β =2	**κ** =20	**σ** =200
γ =3	**λ** =30	**τ** =300
δ =4	**μ** =40	**υ** =400
ε =5	**ν** =50	**φ** =500
ς =6	**ξ** =60	**χ** =600
ζ =7	**ο** =70	**ψ** =700
η =8	**π** =80	**ω** =800
ϑ=9	**ϟ**=90	**ϡ**=900

Die einzelnen Zahldarstellungen können demnach folgendermaßen erklärt werden:

ρα =100+1=101
αβ =200+2=202
ξα =60+1=61
χδε =600+30+5=635
ϡϟϑ=900+90+9=999
ηωπη =8000+800+80+8=8888

Erkundung 7.3

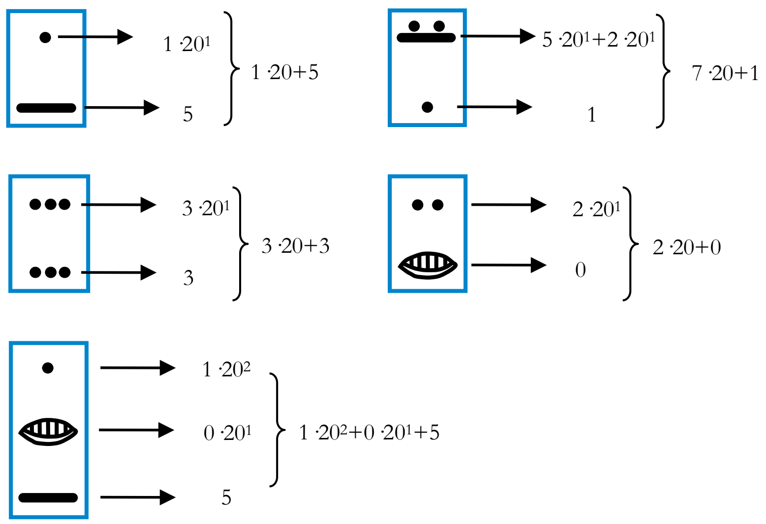
Lösungsmöglichkeit:
Der Abakus (lat. abacus: Tafel) ist ein Rechenbrett.
Der Abakus ist in drei Bereiche geteilt. Im unteren Tafelbereich gibt es von der linken Seite aus gesehen sieben Schlitze mit je vier Kugeln, die für jeweils eine Zehnerpotenz stehen. Die vier Kugeln in den unteren Schlitzen haben jeweils den Wert Eins. Die Kugel im kleinen Schlitz darüber hat den Wert Fünf. Durch das Hochschieben der Einer-Kugeln bzw, das herunterschieben der FünferKugeln wird der gewünschte Wert angezeigt. In jeder Spalte lassen sich mit den beiden Schlitzen also die Werte Eins bis Neun darstellen. Die einzelnen Spalten stehen für die Zehnerpotenzen.

Die Einer sind dann durch die zweite Spalte von rechts noch weiter in Zwölftel, die sogenannten Unzen, aufgeteilt. Die Kugeln im unteren Schlitz stehen wieder für die Einer, die Kugel im Schlitz darüber hat den Wert Sechs. Durch Verschieben der Kugeln können dann bis zu elf Unzen angezeigt werden.

Erkundung 7.4:

Lösungsmöglichkeit:

Die Maya arbeiten mit einem 20er-System. Die Punkte stehen für den Wert Eins, die Striche für den Wert Fünf. Eine Besonderheit dieses Systems ist sicherlich die „Muschelschale“, die die Zahl Null symbolisiert. Mit Kombinationen der Punkte und Striche lassen sich die Zahlen 1-19 darstellen. Ist zwischen den Punkten und Strichen ein Abstand, so erhält das obere Symbol den 20-fachen Wert, der Wert des unteren Symbols wird addiert.



Erkundung 7.5:

Lösungsmöglichkeit:

Im Deutschen wird die Einerziffer vor der Zehnerziffer gesprochen. Beispielsweise spricht man im Deutschen fünf-zehn und nicht entsprechend der Reihenfolge der Notation zehn-fünf. Im Englischen dagegen entspricht die Aussprache der Zahlen der Reihenfolge der Ziffern. Allerdings ist dies auch im Englischen nicht durchgängig der Fall, sondern erst ab der Zahl 20. So ist die Aussprache der Zahl 15 (fif-teen) noch in einer anderen Reihenfolge als die Notation. Auch gab es in der englischen Sprache ab dem 16. Jarhundert ein Wandel. Spricht man heute entsprechend der Notation nine-ty-two, so sprach man vor dem 16. Jahrhundert noch two and nine-ty.

Auch im Französischen gibt es Unregelmäßigkeiten. Die Franzosen nennen die Zahl 92 quatre-vingt-douze (viermal zwanzig und zwölf). An dieser Notation kann man ein Vigesimalsystem (20-ersystem) erkennen. Eine weitere Besonderheit der französischen Sprache bezüglich der Zahlen lässt sich an der Zahl 70 erkennen. Geschrieben wird diese Zahl soixante-dix, also 60 (soixante) und 10 (dix). Die Zahl 71 wird dann entsprechend als 60 (soixante) und 11 (onze), also soixante-et-onze gesprochen. Die Zahl 90 wird im französischen analog zur Zahl 70 konstruiert, wobei hier die Basiszahl 80 (quatre-vingt) genutzt wird. Die Zahl 90 wird also als quatre-vingt-dix (80(quatre-vingt) und 10(dix)) gesprochen.

Ab der 100er-Stelle entspricht im Deutschen die Aussprache zu einem gewissen Teil der Notation. So entspricht der erste Teil der Aussprache der Zahl 235 (zwei-hundert-fünf-und-dreißig) der Notation, erst ab der Zehnerstelle entsprechen sich Notation und Aussprache nicht mehr. Auch bei den ganzen Zehnerzahlen ist die Notation entsprechen der Aussprache, wie beispielsweise an der Zahl 70 (sieb-zig) zu erkennen ist. Es gibt wohl bei fast allen Sprachen Unregelmäßigkeiten, wohl aber nicht so systematisch wie bei der deutschen Sprache. Diese systematischen Unregelmäßigkeiten bereiten besonders bei sehr großen Zahlen Schwierigkeiten, beispielsweise springt man beim Sprechen der Zahl 74342 von der zweiten Ziffer zur ersten, dann zur dritten, zur fünften und endet mit der vierten Ziffer.

Eine zusätzliche Unregelmäßigekit (in fast allen Sprachen) stellen eigene Wörter für Zahlen wie zwölf, twelf oder douze dar. Im Englischen und Deutschen existieren solche Wörter für die Zahlen 11 und 12, im Französischen gibt es solche Unregelmäßigkeiten sogar bis einschließlich der Zahl 16.

Bei der japanischen Sprache gibt es eine additive Zusammensetzung der Zahlen wie bei der Zahl 17 ju-shichi 十七, also ju (10)+ shichi (7) und einer multiplikativen Zusammensetzung, wie bei der Zahl 70 七十 shichi-ju, also shichi (7) · ju (10). Die Zahl 235 ni-hyaku-san-ju-go 二百三十四 kann analog als 2 (ni) ·100 (hyaku)+3(san) ·10 (ju)+5 (go) verstanden werden.

Eine neue möglichst regelmäßige deutsche Sprache für Zahlen könnte das Rechnenlernen und das Erkennen von mathematischen Mustern erheblich erleichtern. Hierzu müsste die Zahlen gleich ihrer Notation ausgesprochen werden. Also neunzig-zwei und nicht zwei-und-neunzig. Denn entsprechend dieser neuen Sprechweise erlernen die Grundschulkinder auch das Rechnen. Bei der Addition von 92 und 17 werden neun Zehner und zwei Einer mit einem Zehner und sieben Einern addiert, also neunzig-zwei und zehn-sieben. Auch sollte in dieser neuen Sprache auf Extrawörter verzichtet werden und anstatt der zwölf besser zehn-zwei gesagt werden.

Erkundung 7.6:

Erratum: Im Buch steht in der ersten Zeile: 1807 = 5·360 + 0·**10** + (5+1+1).

Lösungsmöglichkeiten:

	**1807**		͵αωζ	**MDCCCVII**	千八百七
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

(1) 1807 = 5·360 + 0·20 + (5+1+1)

- Vigesimalsystem (20er- System) der Maya
- Drei Zeichen: • (1), ▬ (5),  (0)
- Besonderheiten: Die Zeichen dieses Zahlsystems werden aneinander gereiht. Durch Aneinanderreihen von Punkten und Strichen können Werte von 1-19 dargestellt werden. Durch Abstände zwischen den Zeilen wird der Wert dieser Zeile mit 20^n vergrößert. So wird die erste Zeile (von unten gelesen) mit 20^0 multipliziert, die nächste Zeile mit 20^1, die nächste mit 20^2… Der Wert der Symbole ist also von den Positionen abhängig. Solche Systeme nennt man Stellenwertsystem. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass mit wenigen Zeichen beliebig große Zahlen darstellen kann. Die Zeichen der unteren Stufe bleiben erhalten, bekommen durch verschiedene Positionen aber verschiedene Wertigkeiten. Die Werte der einzelnen Zeilen werden dann miteinander addiert, um den Gesamtwert zu erhalten. Auf diese Weise können alle natürlichen Zahlen dargestellt werden. Ein sehr wichtiges Symbol dieses Systems ist das Nullsymbol, die „Muschelschale". Diese große Erfindung ermöglicht es Werte einer Stufe die nicht benötigt werden auszulassen.
- Für Maya-Zahlen mit mehr als zwei Stellen gibt es mehrere Auffassungen wie diese dargestellt wurden. Eine Auffassung ist, dass für Zahlen mit mehr als zwei Stellen eine systemwidrige Abweichung von der vigesimalen Schreibweise genutzt wurde. Nach der Stufe 20^1 folgte nicht, wie erwartet, die 20^2=400 sonder die Zahl 360. Um den Wert der nachfolgenden Stufe zu erhalten, wird nun der Wert der vorhergehenden Stufe mit 20 multipliziert. So entstehen die Stufen $1=20^0$, $20=20^1$, 360, $7200= 360 \cdot 20^1$, $144000=360 \cdot 20^2$, $2880000=360 \cdot 20^3$,…

(2) 1807 = 1·1000 + 8·100 + 0·10 + 7·1

- Dezimalsystem
- 10 Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Besonderheiten: Symbol für Zahlenwert Null.
- Dieses System beruht auf der Basis 10.

(3) 1807 = (10+10+10)·60 + 1+1+1+1+1+1+1

- Sexagesimalsystem (Sumerer und Babylonier)
- Zwei Zeichen: 𒁹(1), 𒌋 (10)
- Die Basis diese Stellenwertsystems ist die Zahl 60. Bis zur Zahl 59 werden die beiden Zeichen einfach mehrfach hintereinander geschrieben. Um höhere Zahlenwerte darzustellen, konnten die beiden Symbole um die Werte $60 \cdot n$, mit $n \in \mathbb{N}$ erhöht werden. Auch dieses System ist also ein Stellenwertsystem. Da diesem Zahlsystem der Wert Null fehlt, kann es bei einzelnen Zahlen unklar bleiben, ob der Wert eines Symbols mit 60^0, mit 60^1, mit 60^2, …multipliziert wurde. Dies musste sich aus dem Zusammenhang erschließen. Im Gegensatz zum Stellenwertsystem der Maya konnte also nicht angezeigt werden, wenn der Wert einer Position nicht benötigt wurde.

(4) 1807 = 1000 + 8·100 + 7

- Alphabetisches Zahlsystem der Griechen (milesisches System)
- 27 Zeichen:
  -
  -

α =1	**ι** =10	**ρ** =100
β =2	**κ** =20	**σ** =200
γ =3	**λ** =30	**τ** =300
δ =4	**μ** =40	**υ** =400
ε =5	**ν** =50	**φ** =500
ς =6	**ξ** =60	**χ** =600

ζ =7	**ο** =70	**ψ** =700
η =8	**π** =80	**ω** =800
ϑ=9	**ϟ**=90	**ϡ**=900

- Besonderheiten: Diesem Zahlsystem fehlt ein Symbol für den Wert Null.
- Das griechische Zahlsystem benutzte für die Ziffern der Zahlen Buchstaben.
- In diesem Zahlsystem werden den einzelnen Buchstaben, nach der Reihenfolge der Buchstaben im Alphabet, Zahlenwerte zugeordnet. Das Alphabet ist in drei Neunergruppen eingeteilt. Die erste Gruppe enthält neun Buchstaben als Symbole für die Darstellung der Einer. In der zweiten Neunergruppe werden die Werte mit dem Faktor 10^1 erhöht. In der dritten Gruppe werden die Werte der ersten Gruppe dann mit dem Faktor 10^2 erhöht. Da das Alphabet aus nur 26 Buchstaben besteht, für dieses System jedoch $3 \cdot 9=27$ Symbole benötigt werden, erweiterte man die Buchstaben des klassischen Alphabets um weitere alte Buchstaben. Diese Buchstaben sind das Sampi **ϡ** (900), das Koppa (90) und das Digamma **ς**(6). Durch Addition der Buchstabenwerte können so alle Zahlen von 1-999 dargestellt werden. Um größere Zahlenwerte zu erhalten wurde der erste Zahlbuchstabe durch Hinzufügung eines Zeichens mit dem Wert Tausend multipliziert. Üblicherweise wurde hierfür das tiefgestellte oder hochgestellte Apostroph ‚‘ genutzt. Die Zahl 1000 wurde also als **α ‘** dargestellt.

(5) 1807 = 1000 + (500+100+100+100) + (5+1+1)

- Zahlschrift der Römer
- Sieben Zeichen: I (1), V(5), X (10), L(50), C (100), D (500), M (1000)
- Bei der römischen Zahlschrift handelt es sich um eine additive und subtraktive Zahlschrift nach dem Prinzip der Zehner- und Fünferbündelung. Es hatte kein Stellenwertsystem und es existierte damit auch kein Zeichen für den Wert Null. Dieser war bei dieser kombinierten additiven und subtraktiven Zahlschrift nicht nötig.

  Bei der Darstellung der Zahlen gibt es verschiedene Bildungsregeln. Als Grundregel gilt, dass gleiche Ziffern nebeneinander addiert werden. Dabei dürfen jedoch nicht mehr als drei gleiche Grundzahlen nebeneinander stehen. Steht eine Ziffer mit kleinerem Wert rechts von einer Ziffer mit höherem Wert so werden die beiden Werte der Ziffern addiert. Ist die Reihenfolge der Ziffern anders herum, steht also die Ziffer mit dem kleineren Wert links der Ziffer mit dem größeren Wert, so werden die beiden Werte subtrahiert. Dabei dürfen die Werte der Basisziffern V, L und D nicht subtrahiert werden. Die Werte der Basisziffern I, X, C dürfen nur von der, bezüglich des Wertes, nächsthöheren Ziffer V, L und D subtrahiert werden.

(6) $1807 = 1000 \cdot 1 + 800 + 7$

- Zahlschrift der Japaner
- Zeichen: ○(0),一(1), 二(2), 三(3), 四(4), 五(5), 六 (6), 七(7), 八(8), 九(9), 十(10), 二十 (20), 百(100), 千(1000), 万(10000)
- Bei der japanischen Zahlschrift handelt es sich um ein Dezimalsystem. Es gibt sowohl eine additive Zusammensetzung der Zahlen als auch eine multiplikative Zusammensetzung. Bis ausschließlich der Zahl 20 reicht eine additive Bündelung, ab der Zahl 20 wird dann eine Kombination einer additiven und multiplikativen Bündelung benötigt.

Übung 7.7:

Lösungsmöglichkeit:

1. XV · CL

   Römische Zahlen sind nicht vorteilhaft für eine Multiplikation da diese kein Stellenwert besitzen, sondern eine additive und subtraktive Bündelung. Möglicherweise könnte man es so aufschreiben, aber die stellenweise Einrückung ist eigentlich nicht nötig.

X	V					·	C	L
						D		
					M			
				CCL				
			D					
=				DCCLMD				
		Zusammenfassen/Ordnen: MMCCL						

   Zunächst werden die Werte der einzelnen Zeichen der beiden Zahlen miteinander multipliziert:

   C ·V=D

   C ·X=M

   L ·V=CCL

   L ·X=D

   Die einzelnen Zeichen werden nun aneinandergereiht…

   DCCLMD

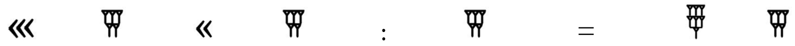
   …, nach den Regeln zusammengefasst…

   CCLMM, da DD=M

   und geordnet.

   MMCCL

2. 

60^1		60^0		60^0		60^1		60^0
								
$35 \cdot 60^1$	+	$25 \cdot 60^0$	:	5	=	$7 \cdot 60^1$	+	$5 \cdot 60^0$

Da es sich bei diesem System um ein Stellenwertsystem handelt, kann es sinnvoll sein die Zahlen in ein Stellenwertsystem einzuteilen.

3. ξβ + χε + ρα

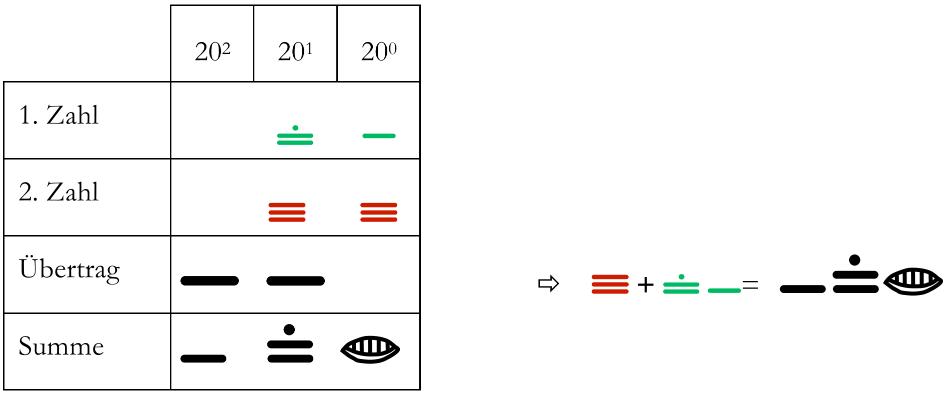
	Stellenwert		
	10^2	10^1	10^0
1. Zahl		ξ	β
2. Zahl	χ		ε
3. Zahl	ρ		α

Stellenwerte

Summe	ψ	ξ	η

⇨ ξβ + χε + ρα = **ψ ξ η**

4. 



Erkundung 7.8:

Lösungsmöglichkeit:

Der Aufbau der IRI-Zahlen ist so, dass sich jeweils die Hunderter- und Einerziffer entsprechen. Aus zwei Ziffern x und y, mit $x<y$ lassen sich zwei verschiedene IRI-Zahlen bilden. Bei einer IRI-Aufgabe wird nun die kleinere der beiden entstandenen Zahlen von der größeren subtrahiert. Das Ergebnis einer solchen IRI-Aufgabe hat immer die Form $n \cdot 91$, mit $n \in \mathbb{N}$. Hierbei gibt, für die Differenz der gewählten Ziffer: $(y\text{-}x)=n$.

1) Symbolische Begründung

   Zu zeigen:

   1. Die IRI-Zahlen haben immer die Form $n \cdot 91$, mit $n \in \mathbb{N}$.
   2. $n = (y\text{-}x)$

   Beweis:

   $(100 \cdot y + 10 \cdot x + y)\text{-}(100 \cdot x+10 \cdot y+x)$

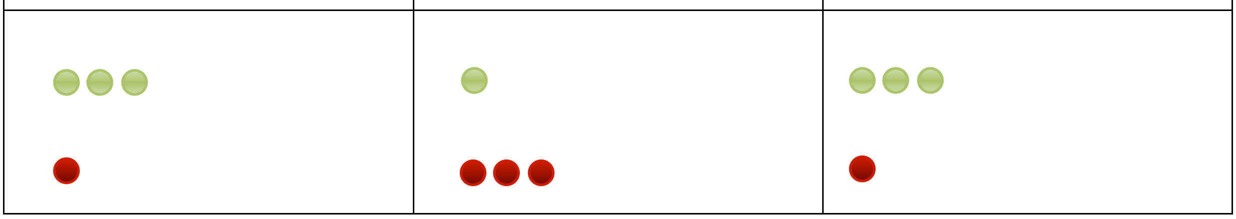
   $=(101 \cdot y+10 \cdot x)\text{-}(101 \cdot x+10 \cdot y)$

   $=101 \cdot y+10 \cdot x\text{-}101 \cdot x\text{-}10 \cdot y=91 \cdot y\text{-}91 \cdot x$

   $=91 \cdot (y\text{-}x)$, was zu zeigen war.

2) Ikonische Begründung: Um von der ersten IRI Zahl zur zweiten IRI-Zahl zu kommen, muss man schrittweise an der Hundersterstelle und Einerstelle ein Plättchen entfernen (–100 –1) und and der Zehnerstelle eines Hinzufügen (+10). Insgesamt muss man also in jedem Schritt –10 –1 +10 = –91 rechnen. Im Beispiel muss man zwei Schritte durchführen. Die Schritte können auch umgekehrt ablaufen, d.h. +100 +1 –10.

Hunderterstelle	Zehnerstelle	Einerstelle



Erkundung 7.9:

Lösungsmöglichkeit:

- Die größte Dezimalzahl die man mit einem Byte garstellen kann ist die $(255)_{10}$.

  $(11111111)_2 = 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7=1+2+4+8+16+32+64+128=(255)_{10}$
- Insgesamt hatte der Heimcomputer Apple II eine Speichergröße von $64 \cdot 1024=2^6+2^{10}=65536$. Eine Binärzahl, die die Nummer des höchsten Bytes anspricht, braucht also 16 Stellen.

Erkundung 7.10:

Lösungsmöglichkeit

- Schriftliche Addition

Beispiel:

$(7)_{10}=(111)_2$; $(14)_{10}=(1110)_2$

$(7)_{10}+(14)_{10}=(21)_{10}$

$$\begin{array}{cccccc} (& & 1 & 1 & 1 & 0 &)_2 \\ (& & & 1 & 1 & 1 &)_2 \\ \hline & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \\ (& 1 & 0 & 1 & 0 & 1 &)_2 \end{array}$$

$(10101)_2=(21)_{10}$

Da wir uns im Binärsystem (hat nur die Ziffern 0 und 1) befinden, kann nur der Übertrag 1 entstehen.

-

„kleines Einmaleins“

$\cdot$	0_2	1_2
0_2	0_2	0_2
0_2	0_2	1_2

„großes Einmaleins“

$\cdot$	0_2	1_2	10_2	11_2
0_2	0_2	0_2	0_2	0_2
1_2	0_2	1_2	10_2	11_2
10_2	0_2	10_2	100_2	110_2
11_2	0_2	11_2	110_2	1001_2

- Schriftliche Multiplikation

  Beispiel:

$1011_2 \cdot 101_2$

$(1011)_2=(11)_{10}$

$(101)_2=(5)_{10}$

$(11)_{10} \cdot (5)_{10}=(55)_{10}$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
(& 1 & 0 & 1 & 1 &)_2 & \cdot & (& 1 & 0 & 1 &)_2 \\
\hline
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & + & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & + & & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & & & & & & {\scriptstyle 1} & & & & & \\
\cline{6-11}
 & & & & & (1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1)_2 &
\end{array}
$$

$(110111)_2=(55)_{10}$

Leichter bei der schriftlichen Multiplikation im Binärsystem ist, dass das für die schriftliche Multiplikation benötigte Einmaleins viel kürzer ist und dadurch leichter auswendig gelernt werden kann. Schwieriger ist bei einem Zahlensystem mit einer solch kleinen Basis, dass die Zahlen sehr groß werden und das Rechnen dadurch umständlicher wird.

Erkundung 7.11:

- Ziffern im Hexadezimalsystem

Das Hexadezimalsystem benötigt 16 Ziffern:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

- Reihe der Vielfachen von 4_{16} im Hexadezimalsystem

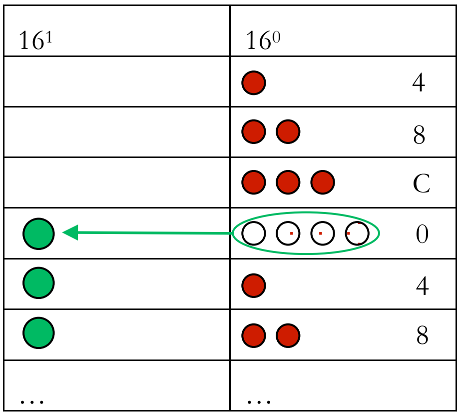
$0_{16} \cdot 4_{16}=0_{16}$	$8_{16} \cdot 4_{16}=0_{16}$
$1_{16} \cdot 4_{16}=4_{16}$	$9_{16} \cdot 4_{16}=24_{16}$
$2_{16} \cdot 4_{16}=8_{16}$	$A_{16} \cdot 4_{16}=28_{16}$
$3_{16} \cdot 4_{16}=C_{16}$	$B_{16} \cdot 4_{16}=2C_{16}$
$4_{16} \cdot 4_{16}=0_{16}$	$C_{16} \cdot 4_{16}=0_{16}$
$5_{16} \cdot 4_{16}=14_{16}$	$D_{16} \cdot 4_{16}=34_{16}$
$6_{16} \cdot 4_{16}=18_{16}$	$E_{16} \cdot 4_{16}=38_{16}$
$7_{16} \cdot 4_{16}=1C_{16}$	$F_{16} \cdot 4_{16}=3C_{16}$

„kleines Einmaleins“

$\cdot$	0_{16}	1_{16}	2_{16}	3_{16}	4_{16}	5_{16}	6_{16}	7_{16}	8_{16}	9_{16}	A_{16}	B_{16}	C_{16}	D_{16}	E_{16}	F_{16}
0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}
1_{16}	0_{16}	1_{16}	2_{16}	3_{16}	4_{16}	5_{16}	6_{16}	7_{16}	8_{16}	9_{16}	A_{16}	B_{16}	C_{16}	D_{16}	E_{16}	F_{16}
2_{16}	0_{16}	2_{16}	4_{16}	6_{16}	8_{16}	A_{16}	C_{16}	E_{16}	10_{16}	12_{16}	14_{16}	16_{16}	18_{16}	$1A_{16}$	$1C_{16}$	$1E_{16}$
3_{16}	0_{16}	3_{16}	6_{16}	9_{16}	C_{16}	F_{16}	12_{16}	15_{16}	18_{16}	$1B_{16}$	$1E_{16}$	21_{16}	24_{16}	27_{16}	$2A_{16}$	$2D_{16}$
4_{16}	0_{16}	4_{16}	8_{16}	C_{16}	10_{16}	14_{16}	18_{16}	$1C_{16}$	20_{16}	24_{16}	28_{16}	$2C_{16}$	30_{16}	34_{16}	38_{16}	$3C_{16}$
5_{16}	0_{16}	5_{16}	A_{16}	F_{16}	14_{16}	19_{16}	$1E_{16}$	23_{16}	28_{16}	$2D_{16}$	32_{16}	37_{16}	$3C_{16}$	41_{16}	46_{16}	$4B_{16}$
6_{16}	0_{16}	6_{16}	C_{16}	12_{16}	18_{16}	$1E_{16}$	24_{16}	$2A_{16}$	30_{16}	36_{16}	$3C_{16}$	42_{16}	48_{16}	$4E_{16}$	54_{16}	$5A_{16}$
7_{16}	0_{16}	7_{16}	E_{16}	15_{16}	$1C_{16}$	23_{16}	$2A_{16}$	31_{16}	38_{16}	$3F_{16}$	46_{16}	$4D_{16}$	54_{16}	$5B_{16}$	62_{16}	69_{16}
8_{16}	0_{16}	8_{16}	10_{16}	18_{16}	20_{16}	28_{16}	30_{16}	38_{16}	40_{16}	48_{16}	50_{16}	58_{16}	60_{16}	68_{16}	70_{16}	78_{16}
9_{16}	0_{16}	9_{16}	12_{16}	$1B_{16}$	24_{16}	$2D_{16}$	36_{16}	$3F_{16}$	48_{16}	51_{16}	$5A_{16}$	63_{16}	$6C_{16}$	75_{16}	$7E_{16}$	87_{16}
A_{16}	0_{16}	A_{16}	14_{16}	$1E_{16}$	28_{16}	32_{16}	$3C_{16}$	46_{16}	50_{16}	$5A_{16}$	64_{16}	$6E_{16}$	78_{16}	82_{16}	$8C_{16}$	96_{16}
B_{16}	0_{16}	B_{16}	16_{16}	21_{16}	$2C_{16}$	37_{16}	42_{16}	$4D_{16}$	58_{16}	63_{16}	$6E_{16}$	79_{16}	84_{16}	$8F_{16}$	$9A_{16}$	$A5_{16}$
C_{16}	0_{16}	C_{16}	18_{16}	24_{16}	30_{16}	$3C_{16}$	48_{16}	54_{16}	60_{16}	$6C_{16}$	78_{16}	84_{16}	90_{16}	$9C_{16}$	$A8_{16}$	$B4_{16}$
D_{16}	0_{16}	D_{16}	$1A_{16}$	27_{16}	34_{16}	41_{16}	$4E_{16}$	$5B_{16}$	68_{16}	75_{16}	82_{16}	$8F_{16}$	$9C_{16}$	$A9_{16}$	$B6_{16}$	$C3_{16}$
E_{16}	0_{16}	E_{16}	$1C_{16}$	$2A_{16}$	38_{16}	46_{16}	54_{16}	62_{16}	70_{16}	$7E_{16}$	$8C_{16}$	$9A_{16}$	$A8_{16}$	$B6_{16}$	$C4_{16}$	$D2_{16}$
F_{16}	0_{16}	F_{16}	$1E_{16}$	$2D_{16}$	$3C_{16}$	$4B_{16}$	$5A_{16}$	69_{16}	78_{16}	87_{16}	96_{16}	$A5_{16}$	$B4_{16}$	$C3_{16}$	$D2_{16}$	$E1_{16}$

1. Muster (grün):

   Das Muster in der Viererreihe entsteht dadurch, dass die Einerziffern durch die Folge 0, 4, 8, C gegeben ist. Dieses Muster wird sichtbar, wenn die einzelnen Vierer in Vierer-Bündel zusammengefasst werden. Ist ein Bündel voll (also vier Vierer zusammen→ 16), so ist die Einerziffer eine 0 und die 16^1 Ziffer wird um eine Stelle erhöht. An jeder vierten Stelle ist die Einerziffer also eine Null und die 16^1-Stelle wird um Eins erhöht. Ist ein Vierer-Bündel noch nicht „voll“, so gibt es nur die Möglichkeiten, dass sich darin eine Vier befindet, dann ist die Einerstelle eine Vier, dass sich darin zwei Vierer befinden, dann ist die Einerziffer eine Acht oder dass sich darin drei Vierer befinden, dann ist die Einerziffer ein C.



2. Muster (lila):

   Die Einerstelle der F_{16}-Reihe durchläuft zyklisch und aufsteigend geordnet alle Ziffern von F_{16} bis 0_{16}, die Sechzehnerstelle durchläuft zyklisch und aufsteigend alle Ziffern von 0_{16} bis F_{16}. Dieses Muster ist damit zu erklären, dass die Differenz zwischen dem ersten Glied der F_{16}-Reihe und der nächst höheren Sechzehnerstelle genau 1 beträgt. Kommt nun das nächste Glied der F_{16}-Reihe hinzu, kann diese Differenz aufgefüllt werden, weshalb sich die Sechzehnerstelle um 1 erhöht. Die Einerstelle dagegen sinkt um 1. Die Differenz zwischen diesem Glied der F_{16}-Reihe und der nächst höheren Sechzehnerstelle beträgt nun 2. Kommt nun wieder das nächste Glied der F_{16}-Reihe hinzu, kann diese Differenz wieder aufgefüllt werden, weshalb sich die Sechzehnerstelle um 1 erhöht. Die Einerstelle dagegen sinkt wieder um 1. Nach diesem Prinzip entstehen nun auch alle anderen Glieder der F_{16}-Reihe, wodurch das beschriebene Muster entsteht.

3. Muster (braun):

   Das Muster in der Achterreihe entsteht analog zum Muster in der Viererreihe. Hier sind die die Einerziffern durch die Folge 0, 8 gegeben. In der Achterreihe werden die Achter in Zweier-Bündel zusammengefasst. Ist ein Bündel voll (also zwei Achter zusammen→ 16), so ist Einerziffer eine 0 und die 16^1 Ziffer wird um eine Stelle erhöht. So ist an jeder zweiten Stelle die Einerziffer eine Null und die 16^1-Stelle wird um Eins erhöht. Ist ein Bündel noch nicht „voll“, so gibt es nur die Möglichkeiten, dass sich darin eine Acht befindet, womit die Einerstelle eine Acht ist. Es gibt also für die Einerstelle nur die Möglichkeit einer Acht und einer Null, die 16 er-Stelle wird bei jeden zweiten Schritt um eins erhöht.

4. Muster (grau):

   Die Endziffern der Quadratzahlen sind immer nur 0, 1, 4 und 9.
   Sei eine beliebige Zahl im Sechzehnersystem $a=16\cdot x+y$. Somit ist y die Endziffer dieser Zahl. Das Quadrat dieser Zahl a hat dann folgende Form: $a^2=400x^2+40xy+y^2$. Somit muss die letzte Ziffer einer beliebigen Zahl a^2 gleich der letzten Ziffer des Quadrates der letzten Ziffer y von a sein. Für y kommen die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E und F in Frage. Somit können die Endziffern der Quadrate nur die Quadrate der einzelnen Ziffern im 16er-System sein.

   $0^2=0$
   $1^2=1$
   $2^2=4$
   $3^2=9$

   $7^2=31$
   $8^2=40$
   $A^2=64$
   $B^2=79$

$4^2=0$	$C^2=90$
$5^2=19$	$D^2=A9$
$6^2=24$	$E^2=C4$

⇒ Mögliche Endziffern der Quadratzahlen sind also 0, 1, 4 und 9.

- Umwandlung einer Hexadezimalzahl in eine Binärzahl

Beispiele:

1. Vom Hexadezimalsystem in Binärsystem
   $49A02_{16}$:
   $4_{16}=0100_2$; $9_{16}=1001_2$; $A_{16}=1010_2$; $0_{16}=0000_2$; $2_{16}=0010_2$
   ⇨ $49A02_{16}=01001001101000000010_2$
   $AB1F_{16}$:
   $A_{16}=1010_2$; $B_{16}=1011_2$; $1_{16}=0001_2$; $F_{16}=1111_2$
   ⇒ $AB1F_{16}=1010101100011111_2$

2. Vom Binärsystem ins Hexadezimalsystem
   1001001101000000010_2:
   $1001001101000000010_2=0100\ \ 1001\ \ 1010\ \ 0000\ \ 0010_2$
   $0100_2=4_{16}$; $1001_2=9_{16}$; $1010_2=A_{16}$; $0000_2=0_{16}$; $0010_2=2_{16}$
   ⇒ $1001001101000000010_2=49A02_{16}$

   10010110101011_2:
   $10010110101011_2=0010\ \ 0101\ \ 1010\ \ 1011_2$
   $00102=2_{16}$; $0101_2=5_{16}$; $1010_2=A_{16}$; $1011_2=B_{16}$
   ⇒ $10010110101011_2= 25AB_{16}$

Erklärung:

Jeweils vier Binärstellen entsprechen einer Hexadezimalstelle, denn $16 = 2^4$. Aus diesem Grund lassen sich diese beiden Systeme auch ohne Umweg über das Dezimalsystem direkt und stellenweise umwandeln.

1. Vom Hexadezimal- ins Binärsystem:
   Die Hexadezimalziffern werden der Reihe nach in die entsprechenden vierstelligen Binärzahlen umgewandelt. Die einzelnen Ziffern des Hexadezimalsystems entsprechen den folgenden vierstelligen Binärzahlen.

Hexadezimalzahl	Binärzahl
0_{16}	0000_2
1_{16}	0001_2
2_{16}	0010_2
3_{16}	0011_2
4_{16}	0100_2
5_{16}	0101_2
6_{16}	0110_2
7_{16}	0111_2

Hexadezimalzahl	Binärzahl
8_{16}	1000_2
9_{16}	1001_2
A_{16}	1010_2
B_{16}	1011_2
C_{16}	1100_2
D_{16}	1101_2
E_{16}	1110_2
F_{16}	1111_2

2. Vom Binärsystem ins Hexadezimalsystem:
   Die Binärzahl werden zuerst von rechts nach links in 4er-Bündel eingeteilt. Jede dieser Bündelung wird dann in die entsprechende Hexadezimalziffer übertragen. Die Anordnung zur endgültigen Hexadezimalzahl folgt dann wieder von rechts nach links.

Übrigens: Das ziffernweise Umwandeln funktioniert natürlich beispielsweise auch mit dem Octalsystem. Hier werden allerdings nicht vier Ziffern zu einem Bündel zusammengefasst, sondern drei Ziffern ($2^3=8$). Mit jedem System, das eine Zweierpotenz zur Basis hat, kann analog vorgegangen werden

Übung 7.12:

Lösungsmöglichkeit:

Die Bedeutung eines Knotens bei einem Quipu ist abhängig von der Fadenfarbe, der Fadenlänge, der Art des Knoten (es gab insgesamt zehn verschiedene Arten von Knoten) sowie der vertikalen und horizontalen Position. Dieses dezimale Stellenwertsystem besitzt eine Art Null. Wenn eine Stelle keinen Wert haben sollte, so war an dieser Stelle kein Knoten. Jede Knotenschnur stellte eine Zahl im dekadischen Stellenwertsystem dar. Sollte eine Summe gebildet werden, so wurden die einzelnen Schnüre, deren Zahlen summiert werden sollten, durch eine weitere Schnur verbunden. (http://de.wikipedia.org/wiki/Quipu)

Die in der Aufgabe dargestellte Rechnung ist eine Vereinfachung der Knotenrechnung. Sie stellt folgende Additionsaufgabe dar.

Die ersten drei Knotenschnüre (von links nach rechts) stellen die drei Zahlen dar, welche summiert werden sollen.

Die Anzahl der Konten ganz oben stellt die Einer im Dezimalsystem dar, die Knoten darunter die Zehner und die Knoten darunter die Hunderter.

Folglich kann die erste Knotenschnur als die Zahl 115 interpretiert werden, die zweite Knotenschnurr als die Zahl 33 und die dritte Kotenschnur als die Zahl 113. Inder Summe ergeben diese drei Zahlen 115+33+113 die vierte Schnur, welche die Zahl 261 darstellt.

Übung 7.13: Die Stufen bei den Mayas sind nicht so regelmäßig, wie man erwartet. Die Stufenzahlen lauten: 7200, 360, 20, 1.

- Welches Stellenwertsystem steckt dahinter? Wie könnte es weitergehen?
- Schreiben Sie die Zahlen 1, 10, 100,…, 1.000.000 in Mayaschreibweise. Anstelle der Mayazeichen können Sie die Zeichen 0123456789AB…IJ oder auch 0123456789(10)(11)(12)…(19) verwenden. Erkennen Sie Regelmäßigkeiten?
- Welche Endziffern können Quadratzahlen bei den Mayas haben?

Hinter den Zahlenstufen der Mayas steckt das 20er-System, dem vigesimale System. Zur Notierung der Zahlen verwendeten die Mayas Punkte, welche den Wert Eins hatten, Striche für den Wert Fünf und die

„Muschelschale“, die die Zahl Null symbolisiert. Mit Kombinationen der Punkte und Striche lassen sich die Zahlen 1-19 darstellen. Für Maya-Zahlen mit mehr als zwei Stellen gibt es mehrere Auffassungen wie diese dargestellt wurden. Eine Auffassung ist, dass für Zahlen mit mehr als zwei Stellen eine systemwidrige Abweichung von der vigesimalen Schreibweise genutzt wurde. Nach der Stufe 20^1 folgte nicht, wie erwartet, die $20^2=400$ sonder die Zahl 360. Um den Wert der nachfolgenden Stufe zu erhalten, wird nun der Wert der vorhergehenden Stufe mit 20 multipliziert. So entstehen die Stufen $1=20^0$, $20=20^1$, 360, $7200=360 \cdot 20^1$, $144000=360 \cdot 20^2$, $2880000=360 \cdot 20^3$,…

Die Zahlenfolge 1, 10, 100, …, 1000000 kann also in die folgenden Mayazahlen umgewandelt werden:
1, A, 50, 2E0, 17E0, DHE0, 6IHE0

Regelmäßigkeiten sind hier kaum zu erkennen. Es fällt allerdings auf, dass die Endziffer 0, und später E0 auftritt und dann konstant bleibt.

Quadratzahlen bei den Mayas können die Endziffern 0, 1, 4, 9, G und 5 haben.

Sei eine beliebige Zahl im Mayasystem $a=20 \cdot x+y$. Somit ist y die Endziffer dieser Zahl. Das Quadrat dieser Zahl a hat folgende Form: $a^2=400x^2+40xy+y^2$. Somit muss die letzte Ziffer einer beliebigen Zahl a^2 gleich der letzten Ziffer des Quadrates der letzten Ziffer y von a sein. Für y kommen die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, G, H, I und J in Frage. Es kommen also nur die Endziffer der Quadrate der Ziffern des Mayasystems in Frage.

0^2=0	A^2=50
1^2=1	B^2=61
2^2=4	C^2= 74
3^2=9	D^2=89
4^2=G	E^2=9G
5^2=15	F^2=B5
6^2=1G	G^2=CG
7^2=29	H^2=E9
8^2=34	I^2=G4
9^2=41	J^2=101

⇒ Mögliche Endziffern der Quadratzahlen sind also 0, 1, 4, 5, 9, G.

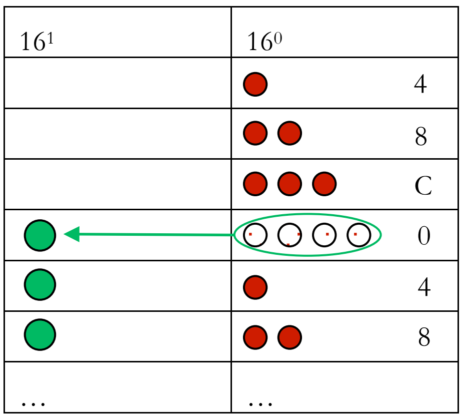
Übung 7.14:

„kleines Einmaleins“

$\cdot$	0_{16}	1_{16}	2_{16}	3_{16}	4_{16}	5_{16}	6_{16}	7_{16}	8_{16}	9_{16}	A_{16}	B_{16}	C_{16}	D_{16}	E_{16}	F_{16}
0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}	0_{16}
1_{16}	0_{16}	1_{16}	2_{16}	3_{16}	4_{16}	5_{16}	6_{16}	7_{16}	8_{16}	9_{16}	A_{16}	B_{16}	C_{16}	D_{16}	E_{16}	F_{16}
2_{16}	0_{16}	2_{16}	4_{16}	6_{16}	8_{16}	A_{16}	C_{16}	E_{16}	10_{16}	12_{16}	14_{16}	16_{16}	18_{16}	$1A_{16}$	$1C_{16}$	$1E_{16}$
3_{16}	0_{16}	3_{16}	6_{16}	9_{16}	C_{16}	F_{16}	12_{16}	15_{16}	18_{16}	$1B_{16}$	$1E_{16}$	21_{16}	24_{16}	27_{16}	$2A_{16}$	$2D_{16}$
4_{16}	0_{16}	4_{16}	8_{16}	C_{16}	10_{16}	14_{16}	18_{16}	$1C_{16}$	20_{16}	24_{16}	28_{16}	$2C_{16}$	30_{16}	34_{16}	38_{16}	$3C_{16}$
5_{16}	0_{16}	5_{16}	A_{16}	F_{16}	14_{16}	19_{16}	$1E_{16}$	23_{16}	28_{16}	$2D_{16}$	32_{16}	37_{16}	$3C_{16}$	41_{16}	46_{16}	$4B_{16}$
6_{16}	0_{16}	6_{16}	C_{16}	12_{16}	18_{16}	$1E_{16}$	24_{16}	$2A_{16}$	30_{16}	36_{16}	$3C_{16}$	42_{16}	48_{16}	46_{16}	54_{16}	$5A_{16}$
7_{16}	0_{16}	7_{16}	E_{16}	15_{16}	$1C_{16}$	23_{16}	$2A_{16}$	31_{16}	38_{16}	$3F_{16}$	46_{16}	$4D_{16}$	54_{16}	$5B_{16}$	62_{16}	69_{16}
8_{16}	0_{16}	8_{16}	10_{16}	18_{16}	20_{16}	28_{16}	30_{16}	38_{16}	40_{16}	48_{16}	50_{16}	58_{16}	60_{16}	68_{16}	70_{16}	78_{16}
9_{16}	0_{16}	9_{16}	12_{16}	$1B_{16}$	24_{16}	$2D_{16}$	36_{16}	$3F_{16}$	48_{16}	51_{16}	$5A_{16}$	63_{16}	$6C_{16}$	75_{16}	$7E_{16}$	87_{16}
A_{16}	0_{16}	A_{16}	14_{16}	$1E_{16}$	28_{16}	32_{16}	$3C_{16}$	46_{16}	50_{16}	$5A_{16}$	64_{16}	$6E_{16}$	78_{16}	82_{16}	$8C_{16}$	96_{16}
B_{16}	0_{16}	B_{16}	16_{16}	21_{16}	$2C_{16}$	37_{16}	42_{16}	$4D_{16}$	58_{16}	63_{16}	$6E_{16}$	79_{16}	84_{16}	$8F_{16}$	$9A_{16}$	$A5_{16}$
C_{16}	0_{16}	C_{16}	18_{16}	24_{16}	30_{16}	$3C_{16}$	48_{16}	54_{16}	60_{16}	$6C_{16}$	78_{16}	84_{16}	90_{16}	$9C_{16}$	$A8_{16}$	$B4_{16}$
D_{16}	0_{16}	D_{16}	$1A_{16}$	27_{16}	34_{16}	41_{16}	$4E_{16}$	$5B_{16}$	68_{16}	75_{16}	82_{16}	$8F_{16}$	$9C_{16}$	$A9_{16}$	$B6_{16}$	$C3_{16}$
E_{16}	0_{16}	E_{16}	$1C_{16}$	$2A_{16}$	38_{16}	46_{16}	54_{16}	62_{16}	70_{16}	$7E_{16}$	$8C_{16}$	$9A_{16}$	$A8_{16}$	$B6_{16}$	$C4_{16}$	$D2_{16}$
F_{16}	0_{16}	F_{16}	$1E_{16}$	$2D_{16}$	$3C_{16}$	$4B_{16}$	$5A_{16}$	69_{16}	78_{16}	87_{16}	96_{16}	$A5_{16}$	$B4_{16}$	$C3_{16}$	$D2_{16}$	$E1_{16}$

1. Muster (grün):

   Das Muster in der Viererreihe entsteht dadurch, dass die Einerziffern durch die Folge 0, 4, 8, C gegeben ist. Dieses Muster kann ersichtlich werden, wenn die einzelnen Vierer in Vierer-Bündel zusammengefasst werden. Ist ein Bündel voll (also vier Vierer zusammen $\rightarrow$ 16), so ist die Einerziffer eine 0 und die 16^1 Ziffer wird um eine Stelle erhöht. An jeder vierten Stelle ist die Einerziffer also eine Null und die 16^1-Stelle wird um Eins erhöht. Ist ein Vierer-Bündel noch nicht „voll", so gibt es nur die Möglichkeiten, dass sich darin eine Vier befindet, dann ist die Einerstelle eine Vier, dass sich darin zwei Vierer befinden, dann ist die Einerziffer eine Acht oder dass sich darin drei Vierer befinden, dann ist die Einerziffer ein C.



2. Muster (lila):

   Die Einerstelle der F_{16}-Reihe durchläuft zyklisch und aufsteigend geordnet alle Ziffern von F_{16} bis 0_{16}, die Sechzehnerstelle durchläuft zyklisch und aufsteigend alle Ziffern von 0_{16} bis F_{16}. Dieses Muster ist damit zu erklären, dass die Differenz zwischen dem ersten Glied der F_{16}-Reihe und der nächst höheren Sechzehnerstelle genau 1 beträgt. Kommt nun das nächste Glied der F_{16}-Reihe hinzu, kann diese Differenz aufgefüllt werden, weshalb sich die Sechzehnerstelle um 1 erhöht. Die Einerstelle dagegen sinkt um 1. Die Differenz zwischen diesem Glied der F_{16}-Reihe und der nächst höheren Sechzehnerstelle beträgt nun 2. Kommt nun wieder das nächste Glied der F_{16}-Reihe hinzu, kann diese Differenz wieder aufgefüllt werden, weshalb sich die Sechzehnerstelle um 1 erhöht. Die Einerstelle dagegen sinkt wieder um 1. Nach diesem Prinzip entstehen nun auch alle anderen Glieder der F_{16}-Reihe, wodurch das beschriebene Muster entsteht.

3. Muster (braun):

   Das Muster in der Achterreihe entsteht analog zum Muster in der Viererreihe. Hier sind die die Einerziffern durch die Folge 0, 8 gegeben. In der Achterreihe werden die Achter in Zweier-Bündel zusammengefasst. Ist ein Bündel voll (also zwei Achter zusammen $\rightarrow$ 16), so ist Einerziffer eine 0 und die 16^1 Ziffer wird um eine Stelle erhöht. So ist an jeder zweiten Stelle die Einerziffer eine Null und die 16^1-Stelle wird um Eins erhöht. Ist ein Bündel noch nicht „voll", so gibt es nur die Möglichkeiten, dass sich darin eine Acht befindet, womit die Einerstelle eine Acht ist. Es gibt also für die Einerstelle nur die Möglichkeit einer Acht und einer Null, die 16 er-Stelle wird bei jeden zweiten Schritt um eins erhöht.

4. Muster (grau):

   Die Endziffern der Quadratzahlen sind immer nur 0, 1, 4 und 9.
   Sei eine beliebige Zahl im Sechzehnersystem $a=16\cdot x+y$. Somit ist y die Endziffer dieser Zahl. Das Quadrat dieser Zahl a hat dann folgende Form: $a^2=400x^2+40xy+y^2$. Somit muss die letzte Ziffer einer beliebigen Zahl a^2 gleich der letzten Ziffer des Quadrates der letzten Ziffer y von a sein. Für y kommen die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E und F in Frage. Somit können die Endziffern der Quadrate nur die Quadrate der einzelnen Ziffern im 16er-System sein.

$0^2=0$	$7^2=31$
$1^2=1$	$8^2=40$
$2^2=4$	$A^2=64$
$3^2=9$	$B^2=79$
$4^2=0$	$C^2= 90$
$5^2=19$	$D^2=A9$
$6^2=24$	$E^2=C4$

⇒ Mögliche Endziffern der Quadratzahlen sind also 0, 1, 4 und 9.

Übung 7.15:

Lösungsmöglichkeit:

- Schriftliche Addition im Binärsystem

  Das schriftliche Addieren im Binärsystem funktioniert nach dem gleichen Prinzip wie die schriftliche Addition im Dezimalsystem. Der Unterschied ist jedoch, dass es im Binärsystem keine Einer (10^0), Zehner (10^1), Hunderter (10^2)… wie im Dezimalsystem gibt, sondern Einer (2^1), Zweier (2^1), Vierer (2^2), Achter (2^3), Sechszehner (2^4)… Dies hat zur Folge, dass der Übertrag bei der schriftlichen Addition schon bei einer Summe ≥ 2 stattfinden muss und nicht wie beim Dezimalsystem bei einer Summe ≥10. Beim der binären Addition zweier Einser wird als Ergebnis an der jeweiligen Stelle keine Zwei notiert wird, sondern eine Null. Äquivalent zur Addition im Dezimalsystem muss dann ein Übertrag (rot markierte Zahl) auf die nächste Stelle notiert werden.

  Beispielrechnung:

	Stellenwerte					
	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	Dezimalsystem
	(1	0	1	1	$0)_{16}$	$(22)_{10}$
+	(1	1	1	1	$1)_{16}$	$(31)_{10}$
1	1	1	1			
(1	1	0	1	0	$1)_2$	$(53)_{10}$

  Begonnen wird rechts, wie bei der schriftlichen Addition im Dezimalsystem.

  Schritt 1: 0+1=1 ⇒ Schreibe 1, kein Übertrag.

  Schritt 2: 1+1=10 ⇒ Schreibe 0, übertrage 1an die dritte Stelle.

Schritt 3: 1+1+1=11 ⇒ Schreibe 1, übertrage 1 an die vierte Stelle.

Schritt 4: 0+1+1=10 ⇒ Schreibe 0, übertrage 1 an die fünfte Stelle.

Schritt 5: 1+1+1=11 ⇒ Schreibe 1, übertrage 1 an die sechste Stelle.

Schritt 6: 1

- Schriftliche Addition im Hexadezimalsystem

  Bei der schriftlichen Addition im Hexadezimalsystem gibt es nun die Stellenwerte 16^0, 16^1, 16^2, 16^3, 16^4… Der Übertrag bei der schriftlichen Addition ist deshalb schon bei einer Summe ≥ 16 statt. Schwierig könnte hierbei die Addition recht großer Zahlen darstellen sowie die Umrechnung von Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen und umgekehrt. Deshalb wäre es sinnvoll das „kleine Einspluseins“ im Hexadezimal auswendig zu können.

	Stellenwerte					
	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0	Dezimalsystem
	(A	E	F	1	$2)_{16}$	$(716562)_{10}$
+	(B	2	C	2	$8)_{16}$	$(732200)_{10}$
1	1	1				
(1	6	1	B	3	$A)_2$	$(1448762)_{10}$

Begonnen wird rechts, wie bei der schriftlichen Addition im Dezimalsystem.

Schritt 1: 2+8=A ⇒ Schreibe A, kein Übertrag.

Schritt 2: 1+2=3 ⇒ Schreibe 3, kein Übertrag.

Schritt 3: C+F=1B ⇒ Schreibe B, übertrage 1 an die vierte Stelle.

Schritt 4: E+2+1=11 ⇒ Schreibe 1, übertrage 1 an die fünfte Stelle.

Schritt 5: A+B+1=16 ⇒ Schreibe 6, übertrage 1 an die sechste Stelle.

Schritt 6: 1

- Schriftliche Multiplikation im Hexadezimalsystem

  Im Prinzip kann die schriftliche Multiplikation im Hexadezimalsystem wie im Dezimalsystem vollzogen werden. Da das Hexadezimalsystem jedoch über 16 Ziffern verfügt, ist die schriftliche Multiplikation in gewisser Weise schwerer als die schriftliche Multiplikation beispielsweise im Dezimalsystem oder in einem anderen Stellenwertsystem mit kleinerer Basis. Sinnvoll ist es bei der schriftlichen Multiplikation das recht umfangreiche „kleine Einmaleins“ im Hexadezimalsystem auswendig zu können.

	(A	B)16	·	(B	A)16	$(171)_{10} \cdot (186)_{10}$
		7	5	9		
	+		6	A	E	
			1			
		(7	C	3	E)16	$(31806)_{10}$

- Schriftliche Division im Hexadezimalsystem

	(A	B	2	8)16	:	(8)16	=	(1565)16	$(43816)_{10}:(8)_{10}=(5477)_{10}$
-	8								
	2	B							
-	2	8							
		3	2						
	-	3	0						
			2	8					
		-	2	8					
			0	0					

Übung 7.16:

Lösungsmöglichkeit
Teilbarkeit durch $(2)_{16}$
Es gilt analog zu Dezimalsystem: Wenn die letzte Ziffer der Zahl im Hexadezimalsystem durch 2 teilbar, so ist es auch die ganze Zahl.

Teilbarkeit durch $(4)_{16}$

Eine Zahl *x* ist genau dann durch $(4)_{16}$ teilbar, wenn die letzte Ziffer durch $(4)_{16}$ teilbar ist. Da die Zahl 4 Teiler von 16^1, also den zweiten Stellenwert des Hexadezimalsystems ist, so ist 4 auch Teiler aller Vielfachen von 16^1. Somit muss zur Überprüfung der Teilbarkeit einer Zahl *x* im Hexadezimalsystem nur die letzte Ziffer betrachtet werden. Auch diese Teilbarkeitsregel existiert analog im Dezimalsystem für die Zahl $(4)_{10}$. Allerdings gilt hier, dass eine Zahl *x* im Dezimalsystem dann durch $(4)_{10}$ teilbar ist, wenn die letzten beiden Ziffern durch $(4)_{10}$ teilbar sind.

Beispiel:

1. $(4)_{16}$ ist Divisor von $(23C)_{16}=(572)_{10}$, da $(C)_{16}=(12)_{10}$ durch $(4)_{16}$ teilbar ist.

Teilbarkeit durch $(8)_{16}$

Ist die letzte Ziffer der Zahl *x* $\frac{n}{2}$ oder 0 in einem Stellenwertsystem mit der Basis *n,* so ist die Zahl selbst durch $\frac{n}{2}$ teilbar. Im Hexadezimalsystem ist $\frac{n}{2}=\frac{16}{2}=8$, im Dezimalsystem ist $\frac{n}{2}=\frac{10}{2}=5$.

Beispiele:

1. $(110)_{16}=(272)_{10} \Rightarrow$ also teilbar durch $(8)_{16}$.
2. $(228)_{16}=(1088)_{10} \Rightarrow$ also teilbar durch $(8)_{16}$.

Teilbarkeit durch $(3)_{16}$, $(5)_{16}$ und $(F)_{16}$

Eine Zahl im Hexadezimalsystem ist genau dann durch 3, 5 und F teilbar, wenn ihre Quersumme durch 5, 3 und F teilbar ist. Die gilt allgemein für jedes Stellenwertsystem: Die Zahl *x* ist genau dann durch die Zahl *y* teilbar, wenn ihre Quersumme (in diesem Stellenwertsystem) durch *y* teilbar ist. *y* sind dabei die Teiler von *n*-1 in einem Stellenwertsystem mit der Basis *n*. Diese Regel kennt man sicherlich aus dem Dezimalsystem. Hier gilt: Eine Zahl x ist genau dann durch Zahl y teilbar, wenn ihre Quersumme durch y teilbar ist. Da y die Teiler von 10-1 sind, ist y=1, 3 und 9.

Beispiele:

1. $(3)_{16}$ ist Divisor von $(3E)_{16}=(63)_{10}$, da:
   Die Quersumme von $(3E)_{16}$ ist $(3)_{16}+(E)_{16}=(12)_{16}$
   Die Quersumme von $(12)_{16}=(1)_{16}+ (2)_{16}=(3)_{16} \Rightarrow$ also teilbar durch $(3)_{16}$

2. $(5)_{16}$ ist Divisor von $(7D)_{16}=(125)_{10}$, da:
   Die Quersumme von $(7D)_{16}=(7)_{16}+(D)_{16}=(14)_{16}$
   Die Quersummen von $(14)_{16}=(1)_{16}+(4)_{16}=(5)_{16} \Rightarrow$ also teilbar durch $(5)_{16}$

3. $(F)_{16}$ ist Divisor von $(C3)_{16}=(195)_{10}$
   Die Quersumme von $(C3)_{16}=(C)_{16}+(3)_{16}=(F)_{16} \Rightarrow$ also teilbar durch $(F)_{16}$

Teilbarkeit durch $(6)_{16}$

Eine Zahl *x* im Hexadezimalsystem ist dann durch $(6)_{16}$ teilbar, wenn ihre Quersumme durch $(3)_{16}$ teilbar ist

Beispiel:

$(6)_{16}$ ist Divisor von $(2A0)_{16}=(672)_{10}$, da:

Die Quersumme von $(2A0)_{16}$ ist $(2)_{16}+(A)_{16}+(0)_{16}=(C)_{16} \Rightarrow$ also teilbar durch $(6)_{16}$

Übung 7.17:

Lösungsmöglichkeit:

1. Addition im Binärsystem

   Das schriftliche Addieren im Binärsystem funktioniert nach dem gleichen Prinzip wie die schriftliche Addition im Dezimalsystem. Der Unterschied ist jedoch, dass es im Binärsystem keine Einer (10^0), Zehner (10^1), Hunderter (10^2)… wie im Dezimalsystem gibt, sondern Einer (2^1), Zweier (2^1), Vierer (2^2), Achter (2^3), Sechszehner (2^4)… Dies hat zur Folge, dass der Übertrag bei der schriftlichen Addition schon bei einer Summe ≥ 2 stattfinden muss und nicht wie beim Dezimalsystem bei einer Summe ≥10. Beim der binären Addition zweier Einser wird als Ergebnis an der jeweiligen Stelle keine Zwei notiert wird, sondern eine Null. Äquivalent zur Addition im Dezimalsystem muss dann ein Übertrag (rot markierte Zahl) auf die nächste Stelle notiert werden.

   Beispielrechnung:

Achter(2^3)	Vierer(2^2)	Zweier(2^1)	Einer(2^0)	Dezimalsystem
	(1	1	$0)_2$	$(6)_{10}$
+	(1	1	$1)_2$	$(7)_{10}$
1	1			
(1	1	0	$1)_2$	$(13)_{10}$

   Begonnen wird rechts, wie bei der schriftlichen Addition im Dezimalsystem.

   Schritt 1: 0+1=1 ⇒ Schreibe 1, kein Übertrag.

   Schritt 2: 1+1=10 ⇒ Schreibe 0, übertrage 1an die dritte Stelle.

   Schritt 3: 1+1+1=11 ⇒ Schreibe 1, übertrage 1 an die vierte Stelle.

   Schritt 4: 1 ⇒ Schreibe 1.

2. Subtraktion im Binärsystem

Auch die binäre schriftliche Subtraktion entspricht im Prinzip der schriftlichen Subtraktion im Dezimalsystem. Wieder verläuft der Übertrag, durch die anderen Stellenwerte ein wenig anders ab. Wird bei der schriftlichen Subtraktion im Dezimalsystem zum Beispiel 3-8 (lese: von der Acht bis zur Drei), so muss man sich eine Zehnerstelle vor die Drei denken, so dass die Rechnung 13-8 entsteht. Die gedachte Zehnerstelle wird als Übertrag an die nächste Stelle im Stellenwertsystem notiert. Analog dazu könnte die Rechnung im Binärsystem 0-1 (lese: von der Eins bis zur Null) lauten. Hier wird sich vor die Null eine Eins gedacht, so dass die Rechnung 10-1 lautet und das Ergebnis eine Eins ist. Als Übertrag muss äquivalent zum Dezimalsystem

die gedachte Eins an die nächste Stelle im Stellenwert übergeben werden.

Beispielrechnung:

Achter(2^3)	Vierer(2^2)	Zweier(2^1)	Einer(2^0)	Dezimalsystem

	$(1$	1	0	$1)_2$	$(13)_{10}$
-		$(1$	1	$1)_2$	$(7)_{10}$
	1	1			
		$(1$	1	$0)_2$	$(6)_{10}$

Begonnen wird rechts, wie bei der schriftlichen Subtraktion im Dezimalsystem.

Schritt 1: 0-0=0 ⇒ Schreibe 0, kein Übertrag.

Schritt 2: 0-1 ⇒ Übertrag notwendig: Schreibe 10-1=1, Übertrag an die dritte Stelle.

Schritt 3: 1-1=0, da Übetrag von zweiter Stelle muss weiter gerechnet werden: 0-1⇒Übertrag notwendig: Schreibe 10-1=1, Übertrag an die vierte Stelle.

Schritt 4: 1-1=0, Schreibe 0, kein Übertrag.

3. Multiplikation im Binärsystem

Prinzipiell kann die schriftliche Multiplikation im Dualsystem wieder wie im Dezimalsystem vollzogen werden. Im Dualsystem existieren jedoch nur die Ziffern Null und Eins. Diese Eigenschaft des Dualsystems macht die schriftliche Multiplikation in gewisser Weise sogar einfacher. Das für die schriftliche Multiplikation benötigte „kleine Einmaleins" ist viel kürzer. Es beinhaltet lediglich folgende Kombinationen:

0_2	1_2
0_2	0_2
0_2	1_2

Bei der schriftlichen Multiplikation können so auch keine Überträge entstehen. Die Zwischenergebnisse, welche bei der Multiplikation entstehen werden, äquivalent zur schriftlichen Multiplikation im Dezimalsystem, dem Stellenwert entsprechend versetzt untereinander notiert. Am Ende werden die Zwischenergebnisse binär addiert.

Beispielrechnung:

$(1$	0	$1)_2$	$\cdot$	$(1$	$1)_2$	$(5)_{10} \cdot (3)_{10}$
		1	0	1		
	+		1	0	1	
		$(1$	1	1	$1)_2$	$(15)_{10}$

4. Division im Binärsystem

Bei der schriftlichen binären Division geht man im Grunde genau so vor wie bei der schriftlichen Division der Dezimalzahlen. Zu bedenken ist wieder, dass nur die Ziffern Null und Eins existieren.

Man beginnt mit der höchsten Stelle des Dividenden (ganz links) prüft, ob der Divisor kleiner, gleich groß oder größer ist. Wenn der Divisor kleiner oder gleich groß ist, so notiert man eine Eins an die entsprechende Stelle des Quotienten. Nun subtrahiert man den Divisor von den entsprechenden Ziffern des Dividenden, die nächste Stelle des Dividenden wird runtergeholt und es wird wieder geprüft, ob der Divisor kleiner, gleich groß oder größer ist.

Ist der Divisor nicht kleiner oder gleich groß, sonder größer als die entsprechenden Ziffern des Dividenden, notiert man eine Null an die entsprechende Stelle des Quotienten und hängt sofort die nächste Ziffer des Dividenden an, ohne dass der Divisor von der entsprechenden Ziffer des Dividenden subtrahiert wird.

Beispielrechnung:

	(1	1	1	$1)_2$	:	(1	$1)_2$	=	$(0101)_2$	$(15)_{10}:(3)_{10}=(5)_{10}$
-	1	1								
		0	1							
	-	0	0							
			1	1						
		-	1	1						
				0						

Der Divisor $(11)_2$ ist größer als erste Ziffer (1) des Dividenden ⇒ Es wird beim Quotienten eine Null notiert und sofort eine weitere Ziffer des Dividenden angehängt. Da der Divisor nun gleich der entstandenen Ziffernfolge (11) ist, wird beim Quotienten eine Eins notiert. Nun wird der Divisor von der entstandene Ziffernfolge (11) subtrahiert und eine weitere Ziffer des Dividenden heruntergeholt. In diesem Fall ist der Divisor $(11)_2$ wieder größer als die Differenz von Divisor und Ziffernfolge ⇒Es wird beim Quotienten eine Null notiert und eine weitere Ziffer des Dividenden angehängt. Da der Divisor nun gleich der entstandenen Ziffernfolge (11) ist, wird beim Quotienten eine Eins notiert.

Übung 7.18:

Lösungsmöglichkeit:

- Größte Dezimalzahl mit 10 Ziffern im Binärsystem

  $(1111111111)_2=1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3+1\cdot 2^4+1\cdot 2^5+1\cdot 2^6+1\cdot 2^7+1\cdot 2^8+1\cdot 2^9=\sum_{i=0}^{9} 2^i=1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=(1023)_{10}$

  Wie viele Ziffern hat $(2046)_{10}$ im Dualsystem?

  $(2046)_{10}=1\cdot 2^{10}+1\cdot 2^9+1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0=$

  $(11111111110)_2$

  Die Zahl benötigt als elf Ziffern.

- Quadratzahlen im Binärsystem

  Leicht zu erkennen sind die Quadratzahlen im Binärsystem, wenn sie wie in folgender Tabelle untereinander notiert werden.

Quadratzahlen im Dezimalsystem	Quadratzahlen im Binärsystem
0	000000000
1	000000001
4	000000100
9	000001001
16	000010000
25	000011001
36	000100100
49	000110001
64	001000000
81	001010001
100	001100100
121	001111001
144	010010000
169	010101001
196	011000100
225	011100001
256	100000000

Durch diese Notation lassen sich die binären Quadratzahlen an Hand einer entstehenden Zahlenfolge identifizieren. Betrachtet man die letzte Ziffer der Quadratzahlen, so erkennt man, dass die Quadratzahlen im Binärsystem stets die Zahlenfolge 0, 1, 0, 1, 0, 1,… aufweisen. Dies liegt daran, dass das Binärsystem nur aus den Ziffern Null und Eins besteht. Berechnet man nun die Quadratzahlen aufeinanderfolgender binärer Zahlen, so ergibt sich bei der letzten Ziffer immer abwechselnd die Rechnung $1 \cdot 1=1$, was eine Eins als letzte Ziffer der Quadratzahl zur Folge hätte oder $0 \cdot 0=0$, was eine Null als letzte Ziffer der Quadratzahl zur Folge hätte.

Als vorletzte Ziffer besitzt jede binäre Quadratzahl immer eine Null. Die dritt letzten Ziffern der Quadratzahlen im Dualsystem ergibt sich die Zahlenfolge 0, 0, 1, 0. Die viertletzen Ziffern bilden die Zahlenfolge 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0. Auch bei den weiteren Ziffern ergeben sich ähnliche Zahlenfolgen.

- Teilbarkeitsregel

  Eine Binärzahl ist dann durch $3 = 11_2$ teilbar, wenn ihr alternierende Quersumme Null ist.
  Beispiel:

  $(11)_2$ ist Divisor von $(11110)_2=(30)_{10}$, da:
  Die alternierende Quersumme von $(11110)_2$ ist $(1)_2-(1)_2+(1)_2-(1)_2+=(0)_2 \Rightarrow$ also teilbar durch $(11)_2$.

Übung 7.19:

Lösungsmöglichkeit

Das besondere an der Zahl 1679 ist, dass es für diese Zahl nur eine einzige Zerlegung in Primfaktoren gibt, nämlich die Zerlegung in die Primfaktoren 23 und 73. Dies ist eine Eigenschaft, welche die Zahl 1679 in jedem Zahlensystem besitzt. Diese Primfaktoren geben die Maße für das Rechteck an, in welches die gesendete Botschaft transformiert werden muss, um sie lesbar zu machen. Der Empfänger muss also zur Entschlüsselung zunächst die Primfaktorzerlegung kennen und erkennen, diese als Längen- und Breitenangaben für ein Rechteck interpretieren.

Nun muss das Dualsystem genutzt werden, um die Botschaft lesbar zu machen. Hierzu werden die Einsen farbig markiert, wodurch einzelne Codebilder entstehen.

Die Botschaft ist in sieben Teile unterteilt.

Der erste Teil zeigt die binäre Codierung der Zahlen 1-10. Hierbei sind die einzelnen Zahlen jeweils durch Nullen seitlich getrennt. Die unterste Zeile zählt nicht zur Codierung, sondern gibt die Position der Ziffer mit dem kleinsten Stellenwert an.

Durch die Anleitung zur Identifizierung von Zahlen im ersten Abschnitt kann nun der zweite Abschnitt gelesen werden. Hier sind die Zahlen 1, 6, 7, 8 und 15 notiert. Dies sind die Ordnungszahlen der chemischen Elemente (Wasserstoff, Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff und Phosphor), aus denen unsere DNA aufgebaut ist.

Mit dem dritten Teil wird der Aufbau der DNA mit Hilfe von zwölf Objekten gezeigt.

Der vierte Teil wird die Struktur der DNA gezeigt.

Der fünfte Teil zeigt, mit Hilfe eines Strichmännchens die grobe Anatomie der Menschen. Auch eine Durchschnittsgröße kann entschlüsselt werden. Mittels eines binären Codes ist die Zahl 14 angegeben, welche mit der Wellenlänge der Nachricht (12,6cm) multipliziert die ungefähre Größe der Menschen (176,4 cm) angibt. Durch einen senkrechten Balken in der Mitte des Strichmännchens wird vermittelt, dass es sich um die Höhe der Menschen handelt. Zudem ist in diesem Abschnitt auch die damalige Anzahl der Erdbevölkerung mit Hilfe der binären Zahl $(11111111110111111011111111110110)_2=(4292853750)_{10}$ angegeben.

Im sechsten Teil wird unser Sonnensystem und die Position der Erde dargestellt. Das Verhältnis der Größe der dargestellten Objekte zueinander zeigt die ungefähren Größenverhältnisse der Himmelskörper. Das Strichmännchen befindet sich genau über der Erde, was den Planeten der Menschen anzeigen soll.

Der letzte Abschnitt zeigt Informationen über den Sendestadtion.

Weitere Details: Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Arecibo-Botschaft