Vorfassung von: Leuders, T. (2019). Mathematik erkunden und verstehen mit unterrichtsintegrierten Lern-Apps – Fachdidaktische Kriterien
kognitive Aktivierung und Verstehensunterstützung. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Eds.),
wirklich verstehen: Mit digitalen Werkzeugen zeitgemäßen Mathematikunterricht erlebbar machen (pp. 219-231). Wiesbaden: Springer.
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-658-24292-3_16

1 Mathematik erkunden und verstehen mit unterrichtsintegrierten Lern-Apps – Fachdidaktische Kriterien für die kognitive Aktivierung und Verstehensunterstützung

Timo Leuders

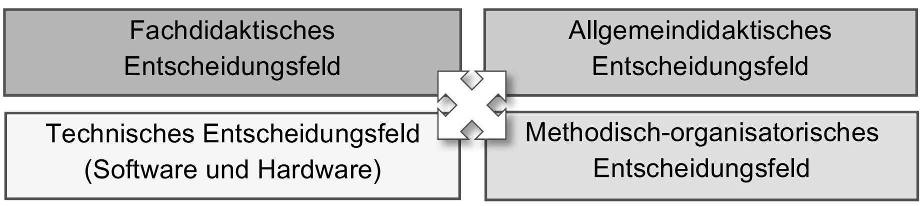
Apps als thematisch fokussierte und flexibel nutzbare Programme können als „Lern-Apps“ mit unterschiedlichen Funktionen in den Mathematikunterricht eingebunden werden. Im Entwicklungsforschungsprojekt KOSIMA wurden solche Lern-Apps vor allem in Form von interaktiven Simulationen in Erkundungsphasen entwickelt und erprobt. Dabei zeigt sich, wie solche Lern-Apps nicht nur hinsichtlich technischer, methodischer und allgemeindidaktischer Aspekte, sondern auch hinsichtlich fachdidaktischer Aspekte durchdacht werden müssen, damit sie zur Qualität der Prozesse und Ergebnisse der Lernumgebungen beitragen können. Für das KOSIMA-Unterrichtskonzept geht es dabei vor allem um die kognitive Aktivierung und Verstehensunterstützung beim Erkunden auf eigenen Wegen innerhalb genetischer, sinnstiftender Lernumgebungen. In diesem Beitrag werden drei konkrete Beispiele analysiert: Potenzdarstellungen in der wissenschaftliche Schreibweise, Modellierung mehrstufiger Zufallsversuche und der Satz des Pythagoras.

Timo Leuders
Institut für Mathematische Bildung (IMBF)
Pädagogische Hochschule Freiburg
E-Mail: leuders@ph-freiburg.de

1.1 Einführung

Computergestütztes Lernen ist schon seit Jahrzehnten ein zentrales Feld für Forschung und Entwicklung, insbesondere für den Mathematikunterricht, denn hier ergeben sich viele fach- und gegenstandsspezifische Fragen (Barzel 2012, Drijvers et al. 2016). Dabei hat sich der Bereich des schulischen und außerschulischen computergestützten Lernens noch einmal dynamisiert, angetrieben durch die rasanten technischen Entwicklungen. Ein markantes Beispiel ist die überbordende Fülle so genannter Lern-Apps, die auf Smartphones und Tablets die schulischen Lernkulturen beeinflussen – ob nun die Lehrkraft sie im Rahmen ihres Unterricht einsetzt, oder Schüler und Eltern sie auswählen und nutzen. In diesem Beitrag soll es um solche Apps gehen, die einerseits dem schulischen Lernen dienen (Lern-Apps) und andererseits ihr Potenzial erst durch die Einbindung in den Unterricht entfalten (unterrichtsintegrierte, oder kurz integrierte Lern-Apps). Charakteristisch für den Softwaretyp App ist nicht der jeweilige Gerätetyp, sondern (1) eine *inhaltliche enge Fokussierung in der Funktion*, (2) eine *flexible mobile Einsatzmöglichkeit* und (3) eine relativ *intuitive Zugänglichkeit und Bedienbarkeit*. Lern-Apps sind in der Regel ohne größere Hürden für jeden einzelnen Lernenden verfügbar und nutzbar, was aber noch nicht impliziert, dass damit eine maximale Individualisierung und Digitalisierung angestrebt wird. Im Gegenteil: als Qualitätskriterien für Lern-Apps wird angesehen, dass diese eine Verbindung mit der Realität und Interaktionen zwischen Personen fördern (Hirsh-Pasek et al. 2015). In dem hier beschriebenen Sinne gab es im Mathematikunterricht immer schon Apps, anfangs als spezielle Computersoftware, seit vielen Jahren dann auf der Basis bestehender Computerwerkzeuge (z.B. Excel-Apps oder Geogebra-Apps) und mittlerweile in Form von Tablet- und Smartphone-Apps.
Will man die Qualität von Lernsoftware allgemein und Lern-Apps im Speziellen einschätzen, oder will man didaktisch hochwertige Produkte entwickeln, so kommt man nicht umhin, die in Abb.1 skizzierten Entscheidungsfelder einzubeziehen.

Abb. 1.1 Entscheidungsfelder für Entscheidung über eine App-Qualität (bei der Entwicklung oder Bewertung)



Im **technischen Entscheidungsfeld** finden rasante Enzwicklungen statt, hinsichtlich der rechnerischen Leistungsfähigkeit (z.B. für Visualisierungen) oder bei den Nutzerschnittstellen (z.B. Gestensteuerung), was langfristig die stärkere Einbindung virtueller Realität ermöglicht. Ebenfalls entwickeln sich die Geräteunabhängigkeit oder die Möglichkeiten der Geräteinteraktion weiter. Diese Entwicklungen bieten Optionen für die anderen Entscheidungsfelder, manchmal machen sie sich allerdings selbstständig und technische Möglichkeiten und ökonomische Faktoren bestimmen die Entwicklung. Die lerntheoretischen Grundlagen sind dann mitunter auf die subjektiven Lerntheorien der Programmierenden reduziert, eine begleitende Forschung mit Blick auf die kurzen Entwicklungszyklen eher minimalistisch. (ebd., S.5)
Im **methodischen Entscheidungsfeld** geht es um die Organisation des Einsatzes von app-fähigen Geräten an der Schule und im Unterricht. Hier gibt es große Herausforderungen zu bewältigen, Schulen haben sich mit Beginn der Einführung des iPad kreativ auf den Weg gemacht. Diese Entwicklung und die begleitende Forschung konzentriert sich allerdings noch überwiegend auf die äußeren Umsetzungsformen (Sichtstrukturen) und die Zufriedenheit der Akteure (Bastian & Aufenanger 2016). Die Wahl und der Einsatz der Apps beruht oft ausschließlich auf Einschätzungen der Lehrkräfte.
Im **(allgemein-)didaktischen Entscheidungsfeld** geht es um die Struktur der Lehr-Lernprozesse. Eine stärkere Eigenverantwortung und Individualisierung werden als wesentliche Vorzüge der Digitalisierung in den Blick genommen, inwieweit veränderte Lernkulturen auch eine höhere Qualität der Lernprozesse *und* Lernergebnisse bedingen ist noch weitgehend offen. Allerdings hat die Medienpsychologie bereits vielfältige Aspekte untersucht und kann allgemeine Prinzipien formulieren (z.B. Clark & Mayer 2016). Man muss also fragen, welche Formen des Lehrens und Lernens auf welche Weise von einer bestimmten Lern-App profitieren können: Geht es z.B. um ein kognitiv aktivierendes gemeinsames Erkunden, geht es um ein effektives individuelles Erarbeiten, geht es um das Verwalten einer gemeinsamen Wissensbasis oder geht es um adaptives individualisiertes Üben?
Im **fachdidaktischen Entscheidungsfeld** geht es vor allem um die inhaltliche Qualität des Lernangebots. Passen die durch Lern-Apps ermöglichten Lernwege zu den zentralen inhaltlichen Zielen und fördern sie ihre Erreichung? Unterstützt z.B. eine Lern-App Problemlöseprozesse, oder verhindert sie sie durch zu viel Steuerung? Werden die zentralen Verstehenselemente eins Themas geeignet repräsentiert? In solchen fachdidaktischen Fragen entscheiden sich die Tiefenstrukturen des Lernens und hier gibt es noch viel Forschungsbedarf. In diesem Sinn wurde in den letzten Jahren im Rahmen der Entwicklungsforschung im Projekt KOSIMA (Hußmann et al. 2011) auch die Rolle von Lern-Apps in den Blick genommen.

1.2 Simulationen für das kognitiv aktivierende Erkunden in sinnstiftenden Kontexten

Die Entwicklung und Untersuchung von Lern-Apps ist im KOSIMA-Projekt kein Selbstzweck, sondern eingebettet in ein theoretisch ausdifferenziertes Unterrichtskonzept. Seine Kernelemente bestimmen auch die Formate und Qualitätskriterien der entwickelten Apps. Dabei waren in den vier Entscheidungsfeldern die folgenden Überlegungen leitend.

Tab. 1.1 Typen von computerbasierten Elementen von Lernumgebungen (mit zunehmender Offenheit von links nach rechts). Der Schwerpunkt der Lern-Apps bei KOSIMA liegt auf den Animationen und Simulationen

Hypertext	**Animationen**	**Simulationen**	**Modellierungswerkzeuge**
Multimediale Verbindungen von Bild Ton und Text, mit flexibler Navigation	Dynamische, visuelle Darstellungen von Situationen mit Prozesscharakter, mit der Möglichkeit der Beeinflussung weniger Freiheitsgrade, insbesondere der zeitlichen Abläufe und der Wahl der Darstellung	Komplexere Systeme, deren Verhaltensweisen durch eine größere Zahl von Parametern interaktiv beeinflusst werden können. Hier geht es vor allem um die offene Exploration mathematischer Zusammenhänge	Offene Systeme, bei denen mit gegebenen Bausteinen und Werkzeugen eine Vielzahl variierender Situationen erstellt und dann untersucht werden können (z.B. DGS).
	KOSIMA-Apps für das Erkunden		

Allgemeindidaktisches Entscheidungsfeld: Der Unterricht im KOSIMA-Konzept ist gegliedert in Phasen des Orientierens (durch Kernprobleme und Kernfragen), des Erkundens auf eigenen Wegen, des Systematisieren und Sichern in eigens entwickelten Ordnenaufgaben (Barzel et al. 2013), des Vertiefens durch Produktives Üben und Vernetzen, und des Reflektierens des Lernstands durch Kompetenzen (Prediger et al. 2014). In allen diesen Phasen können Lern-Apps im Prinzip eine Funktion erfüllen, z.B. durch eine Unterstützung der Selbstorganisation oder durch ein adaptives individuelles Üben. Wir haben einen Schwerpunkt der Entwicklung von Lern-Apps allerdings auf die Phase des Erkundens gelegt: Neben den universellen Werkzeugen des Mathematikunterrichts (z.B. Tabellenkalkulation, DGS) bestand hier bei vielen Themen die Notwendigkeit, die offenen Erkundungen durch *interaktive Simulationen* gezielt zu unterstützen und dabei fokussiert kognitiv anzuregen (Renkl 2014m Leuders & Holzäpfel 2011). Eine Simulation soll dabei verstanden werden als eine computergestützte (hier App-basierte) Erkundungsumgebung, die im Spektrum zwischen statischen Bild-Ton-Text-Darstellungen (z.B. einem Erklärvideo) und universellen mathematischen Werkzeugen (z.B. einem CAS) eine mittleren bis hohen Grad von Offenheit hat (vgl. Plötzner, Leuders & Wichert 2009):
Fachdidaktisches Entscheidungsfeld: Das KOSIMA-Konzept basiert auf dem Prinzip der genetischen Entwicklung mathematischer Begriffe in sinnstiftenden Kontexten und unter Berücksichtigung inhaltlicher Vorstellungen (ausführlich bei Hußmann et al. 2011). Die hierzu entwickelten Lernumgebungen gehen daher von konkreten Kernfragen aus, zu deren Beantwortung die Lernenden individuell oder in Gruppen, auf jeden Fall aber zunächst auf eigenen Wegen die mathematischen Zusammenhänge erkunden. Für die Lern-Apps als die computergestützten Elemente der Lernumgebungen ergeben sich daraus u.a. als Anforderungen:

- Sie müssen eingebunden sein in konkrete, orientierende Fragestellungen, d.h. in die nach fachdidaktischen Kriterien konzipierten Aufgabenstellungen der Lernumgebung („genetisches Lernen durch Erkundung dynamischer Prozesse")
- Sie sollten Elemente des sinnstiftenden Kontextes, in didaktisch jeweils passendem Realitätsgrad bzw. Abstraktionsgrad visuell oder interaktiv repräsentieren („kognitive Aktivierung in Animationen und Simulationen")
- Sie müssen für jeden Lerngegenstand die zentralen Verstehenselemente geeignet repräsentieren („Aufbau inhaltlicher Vorstellungen durch geeignete Visualisierungen und Prozesse")

Methodisches Entscheidungsfeld: Hier macht das KOSIMA-Unterrichtskonzept keine engen Vorgaben, setzt aber einen dialogischen Unterricht in der Klasse mit flexibler Binnendifferenzierung voraus (Leuders & Prediger 2016). Die Apps müssen daher flexibel (je nach Themenbereich) in der Hand einzelner Lernender oder Kleingruppen genutzt werden können. Je nach Ausstattung können das Gruppenlaptops oder Tablets sein. Erwünschte Austausch- und Kooperationsprozesse müssen unterstützt und nicht behindert werden. Die kognitive Aktivierung geht also nicht allein von der Lern-App aus, sondern ergibt sich nur in der Verbindung mit der Aufgabenstellung und dem Unterrichtsrahmen.
Technisches Entscheidungsfeld: Das KOSIMA-Konzept braucht einen Rahmen, der es erlaubt, für jeden Inhalt spezifische Applikationen zu erstellen und dabei die Möglichkeiten der Visualisierung und Interaktivität des Geräts auszuschöpfen. Hier haben wir uns für die Software Cinderella entschieden, die zusammen mit der integrierten Programmiersprache CindyScript eine leistungsfähige *universelle Simulationsumgebung* darstellt (Kortenkamp & Richter-Gebert 1999).

1.3 Beispiele aus den KOSIMA-Apps

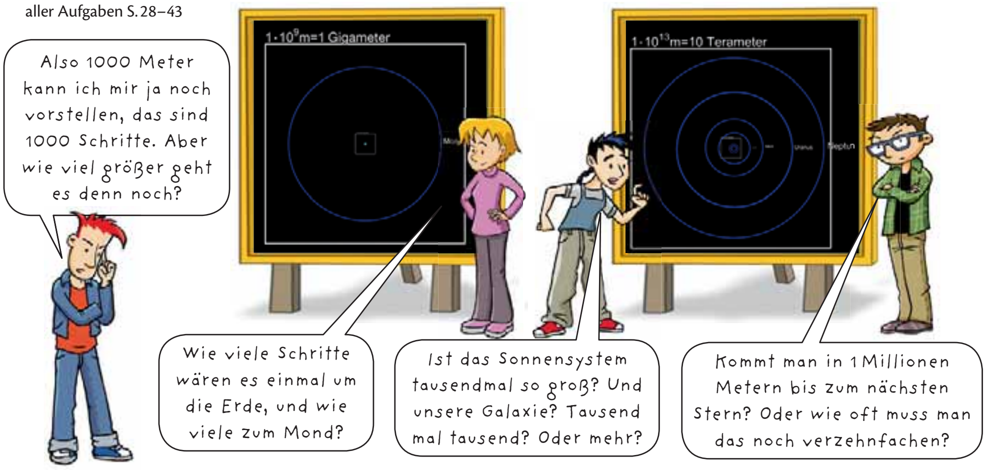
Die hier vorgestellten Beispiele (aus einer Sammlung von über 30 Apps für die Schuljahre 6-10) wurden unter Cinderella entwickelt und funktionieren im Zusammenhang mit der Software an allen Computersystemen. Mittlerweile sind sie auch plattformunabhängig, und damit auch auf Tablets einsetzbar. Sie können erreicht bzw. heruntergeladen werden unter www.ko-si-ma.de → Produkte. Es wird empfohlen die jeweiligen Apps neben dem Text anzuschauen, da viele Aspekte in Text und Bild allein nicht plastisch werden.

Beispiel 1: Zehnhoch – Riesiges und Winziges in Zeitraffer durchschreiten

Erkunden A **Wie kann ich mit riesigen und winzigen Größen umgehen?**

► Materialblock S. 14–19 Basisaufgaben anstelle aller Aufgaben S. 28–43

1 Unvorstellbar riesig und weit weg



028-1; 028-2 *Applet; Film; Bilder*

► Materialblock S. 11 Arbeitsmaterial

a) Wenn man die Welt des Großen untersucht, kann man all diese Fragen stellen. Formuliert auch eigene Fragen.
Untersucht die Fragen mit der Bilderfolge, dem Computerprogramm oder dem Film.

Abb. 1.2 Die App erlaubt einen schnellen Durchgang durch Größenordnungen und zeigt unterstützende Darstellungen.

Lernkontext: Gegenstand des Kapitels „Von den Quarks bis ins Universum – Mit riesigen und winzigen Größen umgehen" sind mathematische Darstellungen von Zahlen und Größen mit Potenzen als mathematisches Handwerkszeug (Leuders & Neumann 2016). Wesentliches didaktisches Prinzip ist aber, dies in einem sinnstiftenden Kontext zu tun, in dem die Lernenden erkennen können, auf welches Problem diese mathematischen Notationen eine Antwort sind: Potenzdarstellungen bieten zum einen eine kompakte und effiziente, das Dezimalsystem nutzende und erweiternde Darstellung, zum zweiten die Möglichkeit des effizienten Umgangs mit Einheiten über viele Größenordnungen hinweg. Wir haben es also mit der didaktischen Herausforderung zu tun, dass die Lernenden zwar ihren alltäglichen Erfahrungsbereich verlassen müssen, dass aber auch in einem solchen virtuellen Umfeld nicht nur symbolische Probleme bearbeiten, sondern auch Handlungen und Vorstellungen aktiviert werden.
Fachdidaktische Entscheidungen: Die Möglichkeiten der Visualisierung und Dynamisierung wurden genutzt, um die Potenzdarstellung mit verschiedenen verstehensfördernden Vorstellungen zu verbinden: Die im Symbolischen prägnante durchgehende Systematik der Zehnerpotenzschritte wird geometrisch durch die Darstellung verschachtelter Quadrate mit der jeweiligen Seitenlänge deutlicher, allerdings erst

über mehre Größenordnungen wahrnehmbar, wenn man die Möglichkeit hat, schnell durch diese herein und heraus zu zoomen. Dabei wird zugleich deutlich, dass die *diskreten* Zehnerstufen einen *kontinuierlichen* Übergang strukturieren. Durch die jeweils eingeblendeten verschiedenen Objekte, die Lernenden aus Unterricht und Medienwelt bekannt sein sollten, und die ebenfalls in der Natur ineinander verschachtelt sind, verbinden sich die sonst getrennten Größenbereiche. Die Objekte können zugleich als Stützpunktvorstellungen dienen. Die in Abb. 1.2 dargestellte Aufgabe macht deutlich, wie die Problemsituation zudem kognitiv aktiviert und auf die genannten Aspekte fokussiert. Die Lern-App allein hat durch ihre wenigen Freiheitsgrade der Interaktion eher den Charakter einer Animation, sie wird erst durch die Aufgabenstellungen, die mit ihr bearbeitet werden, kognitiv aktivierend.

Beispiel 2: Der Wahrscheinlichkeitserkunder – Zufallsversuche konstruieren und explorieren

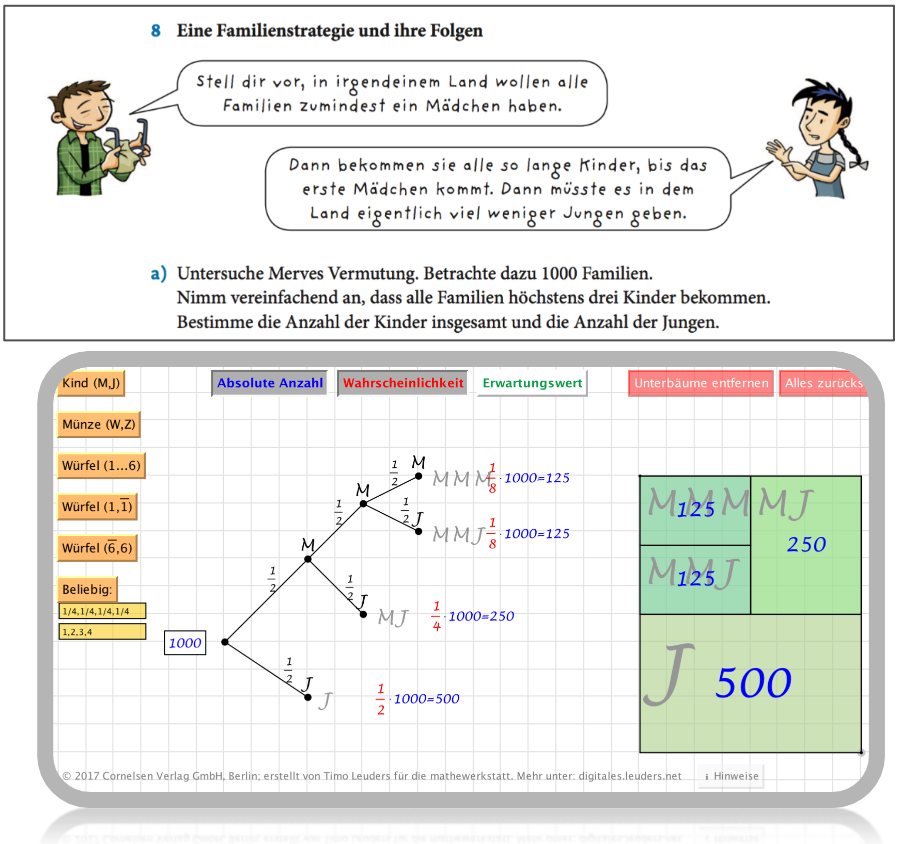


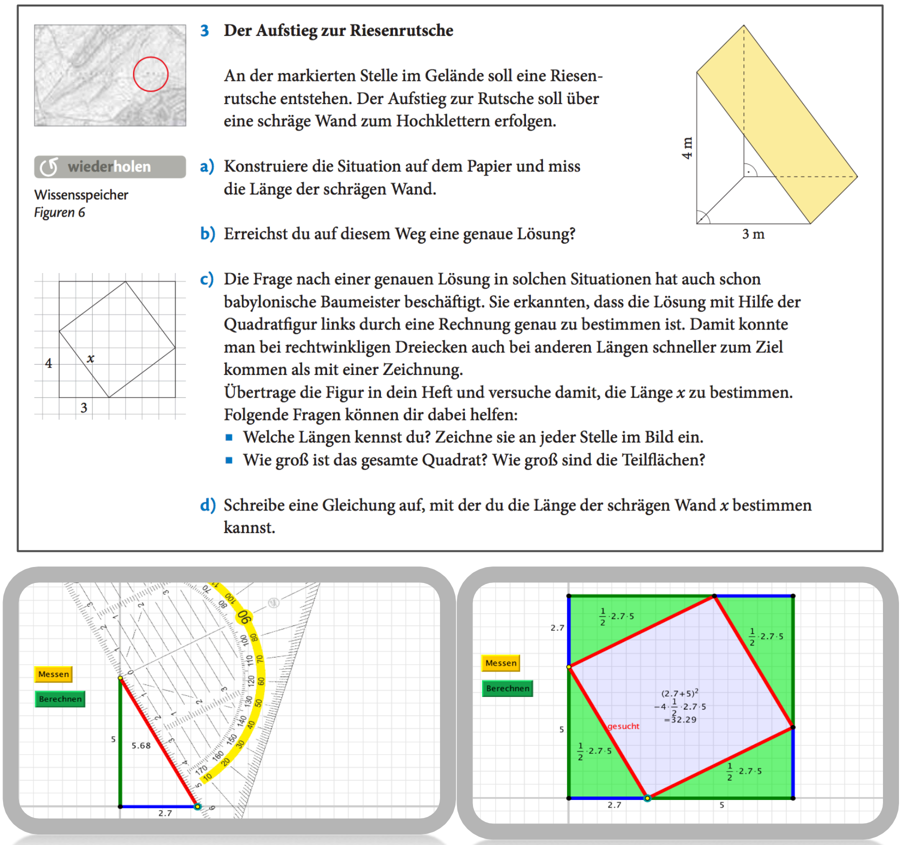
Abb. 1.3 Ein Modellierungswerkzeug zur Konstruktion und Erkundung mehrstufiger Zufallsversuche

Lernkontext: In der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden in der Klasse 10 stochastische Situationen mit mehrstufigen Zufallsversuchen und bedingten Wahrscheinlichkeiten modelliert (Leuders, Holzäpfel & Storz 2017). Für die Umsetzung in einem sinnstiftenden Kontext wurde nicht ein Glücksspiel, sondern die Frage der Konstellationen von Mädchen- oder Jungen in Mehrkinderfamilien (bei gleicher Geburtswahrscheinlichkeit) gewählt. Ein frequentistischer Zugang über die Simulation der Geburtenfolge durch Simulation mit Münzen und dem Computer wird gefolgt von Modellierungen verschiedener mehrstufiger Zufallsversuche.
Fachdidaktische Entscheidungen: Als passende Unterstützung wird eine Lern-App zur Simulation von vielfach durchgeführten Wiederholungen zur Aktivierung frequentistischer Vorstellungen angeboten (hier nicht abgebildet). Dabei ist denkbar, dass Lernende dabei auch selbst Zufallsversuche mit einem universellen Werkzeug wie Excel generieren und anhand der Konstruktion die Struktur der Zufallssituation besser verstehen. Dies würde sich allerdings nur lohnen, wenn die nötigen technischen Fähigkeiten des Umgang mit der Generierung und Auswertung von Zufallsimulationen auch wieder genutzt würden. Für die Lernumgebung dieses Kapitels wurde stattdessen der Schwerpunkt auf die Entwicklung einer Lern-App gelegt, die flexibel zur Konstruktion und Exploration von mehrstufigen

Zufallsversuchen genutzt werden kann. Kernelement ist ein Werkzeug zur Baumkonstruktion: Per drag-and-drop werden Astsysteme zu Bäumen kombiniert. Sie können jederzeit strukturell umgebaut oder optisch optimiert werden. Je nach Aufgabenstellung können bedingte und totale Wahrscheinlichkeiten, Häufigkeiten und sogar Erwartungswerte angezeigt werden. Diese Lern-App soll den Lernenden nicht das Rechnen abnehmen, sondern ihnen ermöglichen, Wahrscheinlichkeitssituationen flexibel zu variieren und zu explorieren. Dies erlaubt unter anderem eine Aufgabenstellungen des operativen Durcharbeitens konzeptueller Aspekte („Was ändert sich wenn...“). Zusätzlich zur Baumdarstellung wird ein Flächendiagramm angezeigt, das die Situation strukturanalog darstellt in der Form verändert werden kann. Sofern die technische Ausstattung es ermöglicht können Lernende mit diesen Darstellungen in physischen oder digitalen Lerntagebüchern arbeiten. Auch ein Einsatz an einem interaktiven Smartboard ist mit dieser App durchführbar. Die Lern-App hat bereits eher den Charakter eines Modellierungswerkzeuges als einer vorgefertigten Simulation.

Forschungsbezüge: Im hier angedeuteten Kapitel werden durchgehend konkrete Anzahlen und die doppelte Darstellungen als Flächenbild und als Baum genutzt. Im Rahmen des KOSIMA-Konzeptes bettet sich das Flächenbild in eine vom 5. Schuljahr an genutzte vorstellungsaufbauende Darstellung von multiplikativen Situationen (insbesondere Anteile von Anteilen, vgl. Prediger, Glade & Schmidt 2011) ein. Zur didaktischen Strategie, zunächst absolute Häufigkeiten zu betonen, gibt es mittlerweile eine breiten Befundstand, der dieses Vorgehen als verstehensunterstützend nahelegt (Johnson & Tubau 2015). Flächenbilder sind hingegen weniger beforscht, hier findet man aber auch bereits empirische Hinweise, dass die Flächendarstellung nicht nur zu Größenvorstellung von Wahrscheinlichkeiten beiträgt, sondern auch das für mehrstufige Wahrscheinlichkeitssituation wichtigen Verständnis einer geschachtelten Struktur unterstützt (Böcherer-Linder, Eichler & Vogel 2018). Da die App aufgrund ihrer Universalität eine relativ hohe Bedienkomplexität hat, wurde in einer qualitativen Begleitforschung sichergestellt, dass Lernende hiermit angemessen umgehen können.

Beispiel 3: Pythagorasrechner – Der Satz des Pythagoras als praktisches Problem


3 Der Aufstieg zur Riesenrutsche

An der markierten Stelle im Gelände soll eine Riesenrutsche entstehen. Der Aufstieg zur Rutsche soll über eine schräge Wand zum Hochklettern erfolgen.

wiederholen

Wissensspeicher
Figuren 6

a) Konstruiere die Situation auf dem Papier und miss die Länge der schrägen Wand.

b) Erreichst du auf diesem Weg eine genaue Lösung?

c) Die Frage nach einer genauen Lösung in solchen Situationen hat auch schon babylonische Baumeister beschäftigt. Sie erkannten, dass die Lösung mit Hilfe der Quadratfigur links durch eine Rechnung genau zu bestimmen ist. Damit konnte man bei rechtwinkligen Dreiecken auch bei anderen Längen schneller zum Ziel kommen als mit einer Zeichnung.
Übertrage die Figur in dein Heft und versuche damit, die Länge x zu bestimmen.
Folgende Fragen können dir dabei helfen:
- Welche Längen kennst du? Zeichne sie an jeder Stelle im Bild ein.
- Wie groß ist das gesamte Quadrat? Wie groß sind die Teilflächen?

d) Schreibe eine Gleichung auf, mit der du die Länge der schrägen Wand x bestimmen kannst.

Abb. 1.3 Der „Pythagorasrechner“ ermöglicht das Bestimmen von Hypotenusenlängen und enthält bereits eine latente Beweisidee für den Satz des Pythagoras.

Lernkontext: Der Satz des Pythagoras ist eine zentrales und vielfach beforschtes Thema des Mathematikunterrichtes, bei dem unterschiedlichste Zugänge möglich sind (Drollinger-Vetter 2011). Im Rahmen des KOSIMA-Projektes, das genetischen Zugängen eine hohen sinnstiftende Funktion beimisst, wurde entschieden, dass die letztlich häufigste praktische Nutzung des Satzes zur Berechnung unbekannter Längen auch schon zu Beginn im Zentrum steht, konkret im Kontext der Planung eines Abenteuerspielplatzes (Barzel et al. 2016). Mit Blick auf Lern-Apps gibt es vielfältige Möglichkeiten, den Satz des Pythagoras computergestützt zu entdecken, zu visualisieren oder zu beweisen. Für die konkrete Realisierung des hier angedeuteten Kapitels war das Ziel eine einzelne Lern-App zu entwickeln, die zugleich die Funktion haben sollte, im Anwendungskontext die Längenberechnung zu unterstützen, die Aufmerksamkeit auf die konzeptuellen Verstehenselemente des Satzes zu lenken und zugleich auf einen Beweis vorzubereiten (sog. latente Beweisidee, Meyer & Voigt 2008).

Fachdidaktische Entscheidungen: Die genannten Funktionen sind in der Lern-App „Pythagorasrechner" vereint. Sie stellt schrittweise einen konkreten Rechenweg zur Bestimmung einer Hypotenusenlänge aus einstellbaren Kathetenwerten dar. Damit ist sie über viele Aufgaben hinweg als Rechenwerkzeug nutzbar. Aus der mehrfachen Nutzung der Lern-App kann man dann die Idee einer allgemeinen Durchführung mit Variablen entwickeln (je nach Klasse mit mehr oder weniger Anleitung, ausführlicher bei Leuders, 2018). Die Umsetzung als Lern-App hat also die Funktion der *Unterstützung* des Lernwegs, von der konkreten Anwendung bis zur allgemeinen Darstellung des Satzes. Die wichtigsten konzeptuellen Schritte (z.B. die Umformung des Rechenterms zum Pythagoras-Satz in vertrauter Form) sollten allerdings weiterhin im Dialog im Unterricht vollzogen werden

1.4 Fazit und offene Fragen

Der hier vorgestellte Typus von Lern-Apps für das Erkunden mathematischer Situationen hat sich in KOSIMA neben den hier vorgestellten Beispielen in noch vielen weiteren Themengebieten bewähren müssen. Besonders augenfällig wurden bei der Entwicklung und Umsetzung dabei drei Phänomene:

- Es gibt keine Lösungen „von der Stange", jeder Gegenstandsbereich erfordert neue fachdidaktische Designentscheidungen und Erprobungen. Relevant für die Qualität ist schließlich nicht die technische Machbarkeit, sondern die Passung zum didaktischen Konzept der Lernumgebung.
- Es ist günstig, wenn die organisatorische und methodische Umsetzung in der Praxis nicht zu eng vorgegeben wird, da hier die Bedingungen und Arbeitsweisen zwischen Schulen und Lehrkräften erheblich variieren.
- Voraussetzung auf der technischen Seite ist weniger die Hardware (hier werden Lösungen mit der Zeit ohnehin immer plattformunabhängiger), sondern die Qualität und Mächtigkeit der Software. Cinderella inklusive seiner Programmiermöglichkeiten hat sich als mathematisch fundierter, universeller und beinahe unbegrenzter Simulationsbaukasten erwiesen.

Für künftige Entwicklungen von Lern-Apps, die an die KOSIMA-Erfahrungen anknüpfen, bleiben noch viele Entwicklungsziele und Forschungsfragen offen, z.B.: Wie können Lernumgebungen und Lern-Apps noch stärker in computerbasierte digitale Lernumgebungen integriert werden – ohne allerdings die kommunikativen Aspekte aufzugeben? Welche weiteren App-Formate müssen entwickelt werden, die sich jenseits des Erkundens, z.B. für eine Wissensorganisation oder ein adaptives Üben eignen? Aber auch: Was sollten Lehrkräfte können und tun, um die Lehrangebote angemessen einzusetzen?

Literatur

Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht: ein Mehrwert-aber wann?*. Münster: Waxmann

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2016). *mathewerkstatt 9*. Berlin: Cornelsen.

Barzel, B., Leuders, T., Prediger, S. & Hußmann, S. (2013). Designing Tasks for Engaging Students in Active Knowledge Organization. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. Thompson, & Y. Yang (Eds.), *ICMI Study 22 on Task Design* (pp. 285-294). Oxford

Bastian, J., & Aufenanger, S. (Eds.). (2016). *Tablets in Schule und Unterricht: Forschungsmethoden und-perspektiven zum Einsatz digitaler Medien*. Springer-Verlag.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A. & Vogel, M. (2018). Die Formel von Bayes. Kognitionspsychologische Grundlagen und empirische Untersuchung zur Bestimmung von Teilmenge-Grundmenge-Beziehungen. *Journal für Mathematikdidaktik,* 39 (1), 127-146.
Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2016). *E-learning and the science of instruction: Proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning*. John Wiley & Sons.
Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y. & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. Springer, Cham.
Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Münster: Waxmann.
Hirsh-Pasek, K., Zosh, J. M., Golinkoff, R. M., Gray, J. H., Robb, M. B., & Kaufman, J. (2015). Putting education in "educational" apps: Lessons from the science of learning. *Psychological Science in the Public Interest*, 16(1), 3-34.
Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011). Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 419-422). Münster: WTM Verlag.
Johnson, E. D., & Tubau, E. (2015). Comprehension and computation in Bayesian problem solving. *Frontiers in psychology*, 6*(*938), 1–19.
Leuders, T. (2018). Vom Rechnen zum Beweisen -Konkrete Zugänge zum Satz des Pythagoras. *Mathematik lehren* 210, 24-28.
Leuders, T. & Neumann, R. (2016). Von den Quarks bis ins Universum – Mit riesigen und winzigen Größen umgehen. In B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders, & S. Prediger (Eds.), *mathewerkstatt 9* (pp. 25-44). Berlin: Cornelsen.
Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*, *39*(3), 213-230.
Leuders, T., & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
Leuders, T., Holzäpfel, L. & Storz, R. (2017). Verteilung von Jungen und Mädchen – Wahrscheinlichkeiten vorhersagen. In S. Hußmann, T. Leuders, S. Prediger, & B. Barzel (Eds.), *mathewerkstatt 10* (pp. 5-25). Berlin: Cornelsen.
Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). „Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule* (37), 2-9.
Meyer, M. & Voigt, J. (2008): Entdecken mit latenter Beweisidee – Analyse von Schulbuchseiten. *Journal für Mathematik-Didaktik* 29(2), 124–151.
Plötzner, R., Leuders, T.,& Wichert, A. (2009). *Lernchance Computer. Strategien für das Lernen mit digitalen Medienverbünden*. Münster u.a.: Waxmann.
Prediger, S., Glade, M. & Schmidt, U. (2011). Wozu rechnen wir mit Anteilen? Herausforderungen der Sinnstiftung am schwierigen Beispiel der Bruchoperationen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(37), 28-35.
Renkl, A. (2014). Lernaufgaben zum Erwerb prinzipienbasierter Fertigkeiten: Lernende nicht nur aktivieren, sondern aufs Wesentliche fokussieren. Ralle B. u.a. *.(Hrsg.): Lernaufgaben entwickeln, bearbeiten und überprüfen–Ergebnisse und Perspektiven fachdidaktischer Forschung. Reihe: Fachdidaktische Forschungen Bd*, *6*, 12-22.
Richter-Gebert, J., & Kortenkamp, U. H. (1999). *The interactive geometry software Cinderella*. Berlin: Springer.