Leuders, T. (2018). Vom Rechnen zum Beweisen -Konkrete Zugänge zum Satz des Pythagoras. Mathematik lehren, 210, 24-28.

Vom Rechnen zum Beweisen –
Konkrete Zugänge zu dem Satz des Pythagoras

Timo Leuders

Der Satz des Pythagoras als einer der berühmtesten Sätze der Mathematik hat seinen Ruf verdient. Er gehört zu den herausragendsten Beispielen für tiefe mathematische Kenntnisse früher Hochkulturen in Indien, Griechenland und China (Schreiber 2000). In der Schulmathematik kennt man schon seit langem viele Zugänge und Beweise. Der im Folgenden dargestellte Unterrichtsgang ist daher auch kein gänzlicher neuer Weg zum Satz des Pythagoras, sondern eine ganz konkrete Kombination bekannter Zusammenhänge und Begründungen, die für Lernende besonders überzeugend und sinnstiftend werden kann.

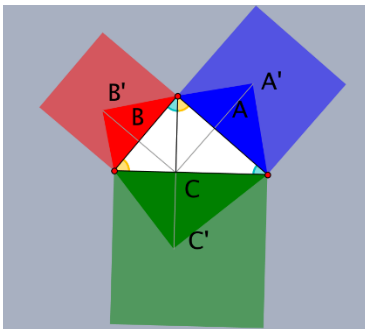
Ein Satz – zwei Facetten

Der Satz des Pythagoras tritt uns mit zwei unterschiedlichen Gesichtern entgegen:

Auf der einen Seite wird er meist als Flächensatz, also als Aussage über die Beziehungen zwischen der Größe bestimmter *Flächen*, wahrgenommen. Nicht nur die übliche Formulierung, sondern die meisten *Beweise* basieren auf einer solchen Sichtweise**.** Hier ein Beweis, der ausschließlich auf Flächen abhebt, und nicht einmal mehr eine Variable für eine Länge enthält.

Der Satz des Pythagoras durch die Flächen-Brille

In der Figur ist das Dreieck über die Höhe in zwei kleinere rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt.



Das Dreieck und seine beiden Teildreiecke werden an ihrer jeweiligen Hypotenuse nach außen gespiegelt. Für die Flächeninhalte der Dreiecke gilt daher A + B = C. Jedes Dreieck liegt in einem Quadrat, dessen Flächeninhalt um einen bestimmten Faktor größer ist: A’ = *k*·A, B’ = *k*·B, C’ = *k*·C. Die Faktoren sind tatsächlich alle gleich, denn die rote, grüne und blaue Figur mit je einem Dreieck im Quadrat sind alle drei ähnlich (wegen der Rechtwinkligkeit der Ausgangsdreiecks haben die Dreiecke dieselben Winkel). Durch Multiplikation der Flächensumme erhält man A’ + B’ = C’, die pythagoräische Beziehung zwischen den Quadraten.

Auf der anderen Seite spielen bei der *Anwendung* des Satzes Flächen kaum noch eine Rolle. In den meisten Fällen geht es um die Bestimmung einer unbekannten *Länge* in einem rechtwinkligen Dreieck (**Abb. 1**).

Von Längen zu Flächen und wieder zu Längen

Was bedeutet diese Feststellung für das Messen im Geometrieunterricht? Beim Unterrichten macht sich ein merkwürdiges Problem bemerkbar: Der Beweiskontext und der Anwendungskontext beim Satz des Pythagoras fallen auseinander:

- Der Satz wird zunächst *entdeckt*, oft durch *Messen von Längen* an Beispieldreiecken. Flächen tauchen dabei erst einmal nicht auf. Warum man Quadrate betrachtet, ist nicht von selbst zu ersehen.

- Danach wird der Satz bewiesen, in der Regel durch *Zerlegen und Zusammensetzen von Flächen*. Die Beweisidee kommt als weitere „Zutat", gewissermaßen von außen dazu.
- Anschließend wird der Satz dann vorwiegend *verwendet* zum *Berechnen von Längen* in Figuren mit rechtwinkligen Dreiecken, eine Fläche wird selten berechnet.

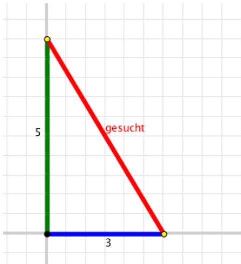
Der Beweis des Satzes ist in dieser Kette also eine Art „Fremdkörper", ein Einschub, den Lernende bestenfalls fasziniert und befriedigt zur Kenntnis nehmen und sogar aktiv mitentwickeln, oder den sie schlimmstenfalls über sich ergehen lassen und wieder vergessen.

Im Folgenden wird eine unterrichtliche Vorgehensweise vorgestellt, die dieses Problem vermeidet oder mindestens abmildert und Entdeckung, Beweis und Anwendung in zusammenhält (Barzel u.a. 2016) und in einen einem gemeinsamen sinnstiftenden Kontext zusammenhält (Leuders u.a. 2011).

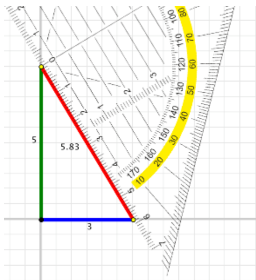
Ein sinnstiftender Weg zum Satz des Pythagoras

1. Schritt: Messen

Den Ausgangspunkt bildet eine *problemgenetische Frage* in einer konkreten Situation (inner- oder außermaßthematisch): Sie lautet hier „Wie lang ist die Strecke c"?



Die konkrete Aufgabe kann man in vielen Kontexten stellen. Eine Lösung, die den Lernenden zur Verfügung steht, ist das *Konstruieren* eines (maßstäblichen) Dreieckes und das *Nachmessen*.



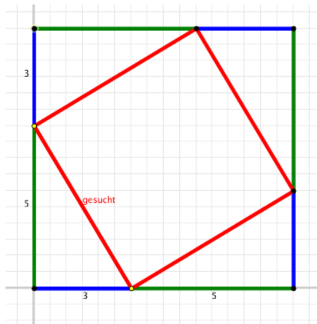
Das kann man für jede Situation immer wieder aufs Neue tun. Man könnte auch für jedes Verhältnis Werte tabellieren (diesen Weg geht man, wenn man nicht die Seitenlänge, sondern den Winkel bestimmten will und gelangt so zu den trigonometrischen Funktionen).

Die folgende Computersimulationen hilft ein wenig: Sie erspart einem das Zeichnen und Ablesen, bringt aber keine neuen Erkenntnisse, wie man sich diese systematisch erleichtern kann. (Die Cinderella-App findet Sie im **Online** unter digitales.leuders.net)

2. Schritt: Rechnen

Gesucht ist also eine Idee, wie man die Lösung möglicherweise durch *Rechnen* erhält. Hier braucht es einen Impuls von außen. Dieser sieht in diesem Fall so aus:

→ *Die Figur wird auf die folgende Weise erweitert, so dass zwei Quadrate entstehen:*



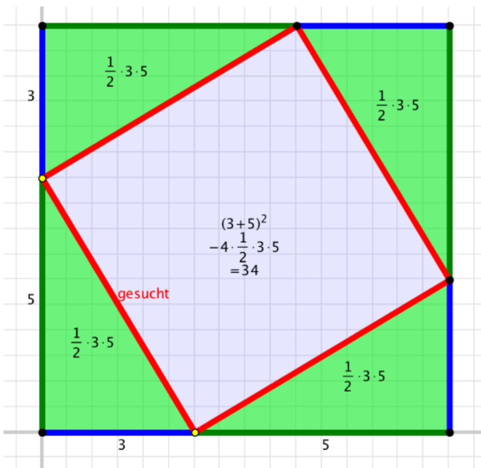
> *Mit so einer Figur konnten vermutlich schon die Baumeister in Babylon und Ägypten die gesuchte Länge rechnerisch bestimmen. Welche Längen und Flächeninhalte kannst du nacheinander ausrechnen? Kannst du schließlich auch die Länge der roten Strecke bestimmen? Finde einen Rechenweg und schreibe ihn auf.*

Konnten die antiken Baumeister tatsächlich schon mit Hilfe des Satzes des Pythagoras Längen bestimmen? Der Satz des Pythagoras wurde vermutlich mehrfach und unabhängig voneinander gefunden. Bei den Babyloniern (ca. 1500 v. Chr.), den Ägyptern, den Indern und auch bei den Chinesen gibt es Fundstellen, die die Kenntnis Satzes – in unterschiedlicher Allgemeinheit – wahrscheinlich machen. Oft findet man rechnerische Vorschriften, wie eine unbekannte Seite zu berechnen ist. Allerdings gibt es keine Hinweise, wer den Satz erstmals bewiesen hat.

Die Behauptung dieser Aufgabe, dass man bereits einen Rechenweg kennt, ist also nicht aus der Luft gegriffen. Dass dieser aber gerade so entdeckt oder begründet wurde, wie in der Aufgabe vorgeschlagen, bleibt aber natürlich Spekulation.

Auf der Basis der Aufgabenstellung können Lernende nun nach dem Prinzip des Vorwärtsarbeitens konkrete Größen bestimmen. Dass die Flächen hinzutreten, ist ein Impuls von außen, da es nicht wahrscheinlich ist, dass Lernende diesen Schritt „out of the box“ individuell finden. Die Idee, aus dem Flächeninhalt wieder auf eine Länge zurückzuschließen, ist ebenfalls nicht selbstverständlich und ein möglicher Aha-Moment.

Eine wichtige Stelle, die bereits auf den späteren Beweis vorausweist, ist die Annahme, dass die innere Figur wirklich ein Quadrat ist. Hier kann man bewusst Zweifel säen und Begründungen einfordern.



Wichtig ist, dass das Ergebnis nicht nur in Form einer Zahl notiert wird, sondern der Rechenweg (der durchaus verschieden verlaufen kann) festgehalten wird.

3. Schritt: Gleichung aufstellen

Die einfachste und knappste Form, einen Rechenweg festzuhalten, ist das Notieren eines *mathematischen Terms* als Beschreibung einer *allgemeinen Rechnung*. Sollten Lernende das noch nicht getan haben (man kann Rechenwege ja auch schrittweise oder verbal notieren) erfolgt, kann man auffordern:

→ *Schreibe deinen Rechenweg als eine einzige Rechnung $c^2 = \ldots$ oder $c = \ldots$ auf, ohne die Zwischenschritte auszurechnen.*

Entscheidender ist aber nun der Schritt von der konkreten zur allgemeinen Rechnung, bei der die beiden gegebenen Seitenlängen als Unbestimmte gewählt werden.

→ *Schreibe deinen Rechenweg für beliebige Seitenlängen a und b auf. Mit deinem Term soll man möglichst praktisch die dritte Seitenlänge in jeder beliebigen Situation berechnen können.*

Möglicherweise scheuen die Schülerinnen und Schüler davor zurück, eine Wurzel aus einem sehr langen Term zu ziehen – sie kennen Wurzeln aus Zahlen und haben womöglich die Vorstellung einer Wurzel als Zahl, aber nicht als Operation. Die Notation ohne Wurzel ist ohnehin für das weitere Vorgehen die elegantere, die man zulassen oder möglicherweise sogar anregen sollte:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b \quad c = \sqrt{(a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b}$$

Auf der Suche nach möglichst einfachen Darstellungen findet man natürlich weitere Formen für diesen Term. Entweder die Schülerinnen und Schüler haben bereits andere Formen gefunden, oder die können noch einmal zum Umformen und Vereinfachen aufgefordert werden und können z.B. erhalten:

$$c^2 = (a+b)^2 - \frac{1}{2} a \cdot b - \frac{1}{2} a \cdot b - \frac{1}{2} a \cdot b - \frac{1}{2} a \cdot b \quad c^2 = (a+b)^2 - \frac{4}{2} a \cdot b$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \frac{4}{2} a \cdot b$$

Diejenigen, die tatsächlich an diese Stelle gelangen:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

staunen möglicherweise über diese überraschende Vereinfachung.

Auf jeden Fall ist von hier aus ein einfacher Rechenweg zu Bestimmung der dritten Seite gefunden. Der Satz des Pythagoras ist gewissermaßen sogar bereits bewiesen, denn die Schritte, nach denen die Berechnung gefunden wurde, waren ja für beliebige *a* und *b* möglich.

Schreibt man dies nachträglich noch einmal auf, so erscheint der Satz in ungefähr der folgenden Form. (Die Lernende können den Auftrag erhalten, die Aussage und die Begründung möglichst klar und einfach aufzuschreiben.)

Blick auf Längen beim Satz des Pythagoras

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck aus zwei Seiten *a, b* die dritte Seite *c* berechnen so rechnet man so:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beweis:
Man zeichnet diese Figur... (präziser: ergänzt zu einem Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$)

Der Flächeninhalt des Quadrates ist $(a + b)^2$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist ½ *ab*

Das Quadrat, das schräg in der Figur liegt hat den Flächeninhalt $(a + b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} ab = \ldots\ldots = a^2 + b^2$

Also ist Seitenlänge *c* die Wurzel daraus.

Dies ist ein vollständiger und überzeugender Beweis, der gleich mehrere Schritte benötigt (geometrische und algebraische), und damit noch einmal bestätigt, dass der Satz nicht offensichtlich ist. Er ist sicherlich nicht der schönste Beweis, aber er entsteht unmittelbar aus der Problemlösen, die sozusagen die Beweisidee „latent“ in sich trug (vgl. bei Meyer/Voigt 2013).

In dieser Form ist der Satz noch vorläufig, denn manche Dinge sind möglicherweise noch nicht explizit:

- Es ist vielleicht noch nicht klar, dass es die gesuchte Seite die größte sein muss.
- Die Voraussetzung der Rechtwinkligkeit ist möglicherweise noch nicht als wesentlich erkannt!

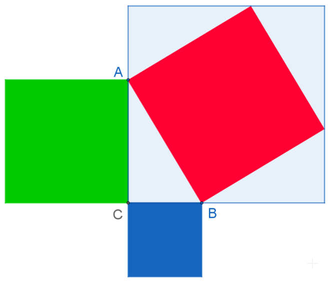
- Der Satz ist eine Aussage über eine Längenberechnung, also die Abhängigkeit einer Größe von zwei anderen. Die Sicht, dass hier eine Aussage über einen Zusammenhang von drei Größen getroffen ist, aus der man diese Berechnung, aber auch noch andere folgern kann, sticht noch nicht hervor.

4. Schritt: Bedeutung vertiefen

Mit passenden Impulsen durch die Lehrenden geht es nun darum, den Erkenntnisstand weiter zu entwickeln, gewissermaßen aufzuräumen – und nicht nur mit dem Ergebnis, dem gefundenen „Rechenweg des Pythagoras" zufrieden zu sein. Man kann Schülerinnen und Schüler also noch einmal auffordern, die Form des Satzes anzuschauen und ihre Bedeutung besser zu verstehen:

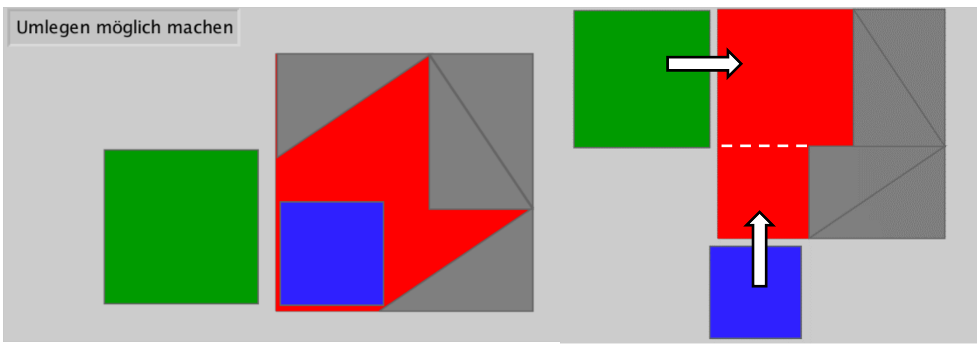
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Es ist eine Aussage über drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Allerdings tauchen die Seitenlängen alle im Quadrat auf, es ist also eigentlich eine Aussage über drei Quadrate. Wo sind die zu sehen? Die Quadrate über a und b muss man tatsächlich erst einmal hinzufügen. In eine solche Figur kann nun die bereits berechnete allgemeine Beziehung auch zu „sehen":



→ *Lege in der Figur die Teile um. Versuche damit zu begründen, warum die beiden kleinen Quadrate denselben Flächeninhalt wie das rote haben.*

Dieses Umlegen kann man kaum im Geiste vollziehen. Hier braucht man Material oder eine interaktive Computerdarstellung, mit denen man Herumprobieren kann.



Was hier geschehen ist, ist ein nicht untypischer Prozess für die Genese mathematischer Erkenntnis. Zunächst ist ein konkretes Problem zu lösen (hier das Bestimmungsproblem). Man entwickelt dazu Lösungswege, die sich verallgemeinern lassen und die auf einen allgemeinen Zusammenhang führen. Den Beweis für diesen Zusammenhang kann man (nicht immer, aber hier) aus dem Rechenweg entwickeln. Dazu muss man den Weg verallgemeinern und kann weitere Argumente und Zusammenhänge nutzen (hier z.B. algebraische in Form von binomischen Formeln).

Beim Ergebnis bleibt man aber nicht stehen, sondern versucht den Gehalt des Satzes noch besser zu verstehen: Welche Aussagen macht er? Welche Elemente enthält er? Welche Voraussetzungen benötigt er (das wurde in diesem Beitrag nicht ausgeführt)? Wie kann man ihn noch einfacher erklären oder verstehen? Der „zweite Beweis" dient also weniger der Absicherung (das hat der erste schon geliefert), sondern dem Verständnis.

Fazit

In dem hier gezeigten Erarbeitungsweg, findet man keine unbekannten oder neuartigen Schritte oder Begründungen zum Satz des Pythagoras. Besonders ist hier nur die Art und Weise, wie die beiden Elemente „Berechnen“ und „Beweisen“ ineinandergreifen. Alle zentralen Verstehenselemente zum Satz (Drollinger-Vetter 2011) werden auf bestimmte Weise kombiniert und bauen aufeinander auf. Dadurch wird zusätzlich die Kluft zwischen dem Flächensatz und dem Berechnungssatz etwas verkleinert – aber auch nicht ganz aufgelöst. Und natürlich müssen weitere Verstehenselemente hinzukommen, wie z.B. das Wissen um die Umkehrung und um die genauen Bedingungen der Gültigkeit.

Das hier beschriebene Prinzip lässt sich auf andere Bereiche übertragen, zum Beispiel beim Satz des Thales: Aus einem Bestimmungsproblem mit konkreten Zahlen, über das problemlösende Finden eines Rechenweges und dessen Verallgemeinerung zum Beweis eines allgemeinen Zusammenhangs.

Anmerkung

Die hier vorgestellten Unterrichtsbeispiele stammen aus dem Entwicklungsforschungsprojekt KOSIMA (Hussmann u.a. 2011). Insbesondere waren an der Entwicklung der hier vorgestellten Lernwege Bärbel Barzel, Joachim Poloczek, und Benjamin Rott beteiligt.

Literatur

Barzel, B./Hußmann, S./Leuders, T./Prediger, S. (2016): mathewerkstatt 9. Berlin: Cornelsen.

Drollinger-Vetter, B. (2011): Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht. Münster: Waxmann.

Hußmann, S./Leuders, T./Prediger, S./Barzel, B. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM Verlag S. 419–422.

Leuders, T./Hußmann, S./ Barzel, B./Prediger, S. (2011): „Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. – In: Praxis der Mathematik in der Schule (37), S. 2–9.

Meyer, M./Voigt, J. (2008): Entdecken mit latenter Beweisidee – Analyse von Schulbuchseiten. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 29(2): S. 124–151.