Kurt Daubert / Martin Duffner / Klaus Günther

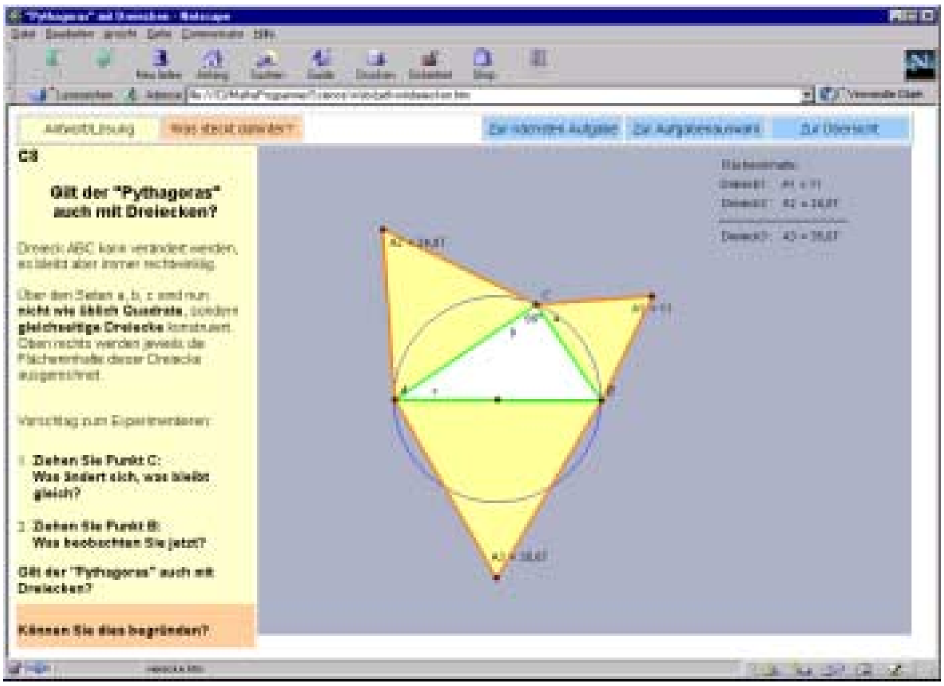
Geometrie entdecken mit dem Computer

Zirkel und Lineal waren jahrhundertelang die einzig verwendeten Werkzeuge in der Geometrie. In den letzten Jahren kam jedoch der Computer hinzu, denn Dynamische Geometrie-Software (DGS) bietet in didaktischer Hinsicht beeindruckende neue Möglichkeiten: hier ist beispielsweise eine geometrische Zeichnung nicht mehr starr, sondern sie kann quasi-stetig verformt werden („Zugmodus“).

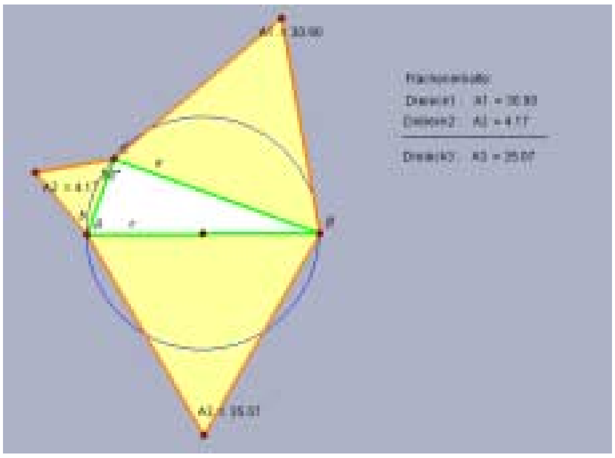
<u>Unser System</u>

Beim Freiburger Science-Festival (21.6. – 9.7.2000) beteiligten wir uns mit „Billard, Sterne und Parkette – Geometrie entdecken mit dem Computer“. Dieses von uns erstellte System besteht aus ca. 160 Web-Seiten, die mit DGS konstruierte Zeichnungen und Texte (Aufgabe, Lösung, mathematischer Hintergrund) enthalten. Die Web-Seiten sollen ohne Kenntnisse der verwendeten DGS zu bearbeiten sein; daher stellen wir keinerlei Konstruktionsbefehle zur Verfügung, sondern präsentieren fertige Zeichnungen. Mit Hilfe von ästhetischen Figuren, interessanten Problemstellungen und vor allem der Möglichkeit, jederzeit die Figuren im Zugmodus zu variieren und zu experimentieren, wollten wir den vielen jungen Besucherinnen und Besuchern Interesse und Freude an Mathematik vermitteln.

Beispiel 1: Gilt der „Pythagoras“ auch mit Dreiecken? (Abb.1)



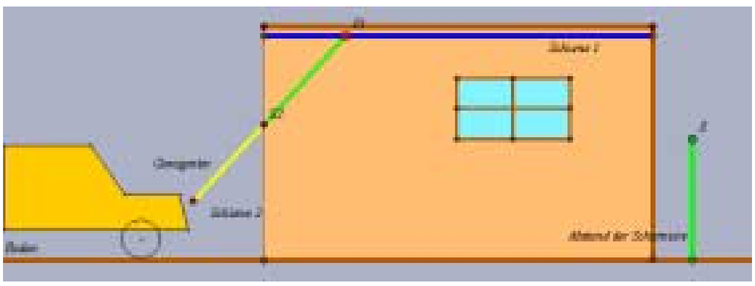
Der Punkt C kann mit der Maus auf der Kreislinie bewegt („gezogen") werden und so entstehen andere rechtwinklige Dreiecke ABC. Die beiden oberen Dreiecke wandern aber mit; sie bleiben zwar immer gleichseitig, doch ändert sich ihre Größe. Die Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 der Dreiecke werden stets automatisch berechnet und rechts oben eingeblendet. Den Zugmodus können wir leider nicht darstellen, sondern nur durch eine zweite Momentaufnahme andeuten (Abb.2).



Die Schüler erzeugten durch wechselnde Lage von C zahlreiche verschiedene Figuren. Sie bemerkten, dass jeweils $A_1 + A_2 = A_3$ gilt, d.h. die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke über den Katheten a und b ist genau so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks über der Hypotenuse c. Daher konnten sie vermuten, dass der „Pythagoras" auch mit Dreiecken gilt.

Die Variation beweglicher Punkte führt also rasch zur Vermutung eines Zusammenhangs. Mit klassischen Werkzeugen wäre ein entsprechendes probierendes Vorgehen erheblich schwieriger und zeitaufwendiger. Dieses experimentelle Verfahren liefert freilich keinen mathematischen Beweis.

Beispiel 2: Steht das Auto wieder zu dicht am Garagentor? (Abb.3)



Wenn man das Garagentor bewegt, dann wandern die Scharniere S_1 und S_2 in den Schienen. Wie weit schwingt das Tor nach außen?

Interessant ist folgende (weitergehende) Frage: Auf welcher Bahn bewegt sich denn das untere Ende des Tors? Hier kommt eine weitere nützliche Eigenschaft zum Tragen: Von Punkten, die in Abhängigkeit von anderen bewegten Punkten wandern, kann man die Bahnkurve aufzeichnen lassen („Ortslinie“) und auch dadurch geometrische Eigenschaften entdecken. Zudem kann der Abstand der Scharniere verändert werden. So kann man ausprobieren, dass das Tor beim Öffnen ganz verschieden weit nach außen schwingt.

Sie können die Lösungen selbst experimentell finden (und auch weitere Beispiele ausprobieren), wenn Sie folgende Adresse wählen: www.ph-freiburg.de/mathe/projekte.htm

Einige Eindrücke vom Science-Festival

Erstaunlich war, wie viele Schülerinnen und Schüler zu unseren „Geometrie-Computern“ fanden und sich mit den angebotenen Aufgaben beschäftigten. Die Bedienung des Systems war für sie ganz problemlos. Wir beobachteten vor allem drei Gruppen mit unterschiedlichen Verhaltensmustern:

- Schülerinnen und Schüler, die rasch durch die einzelnen Seiten „zappten“, ohne sich sehr lange bei einer Aufgabe aufzuhalten.
- Schülerinnen und Schüler, die Aufgaben mit hohem Aufforderungscharakter und ästhetischen Reiz der Figuren wählten. Sie variierten sogleich spielerisch die geometrischen Figuren und erzeugten zum Teil sehr schöne Bilder. Die zugehörigen Texte wurden vermutlich kaum gelesen.
- Schülerinnen und Schüler, die sich lange und intensiv mit einer Aufgabe beschäftigten. Sie lasen in der Regel zuerst die Arbeitsanleitungen und begannen dann, die Figuren zu verändern. Oft riefen sie nach dieser experimentellen Phase auch die Lösungsseite sowie die Seite zum mathematischen Hintergrund auf.

Die Randbedingungen des Festivals gestatten leider nicht zu explorieren, welche Variablen (Alter, Geschlecht, Schultyp, Mathematik-Interesse und –Leistung, Sachgebiet, Aufgabenformulierung usw.) das unterschiedliche Verhalten beeinflussen. Aussagen über den Lernerfolg können ebenfalls nicht gemacht werden.

Eine nicht geringe Anzahl von Lehrkräften war überzeugt davon, unsere Software nutzbringend im Unterricht einsetzen zu können, wobei offen blieb, an welcher Stelle und mit welcher Funktion im Lernprozess.

Ein Beitrag zur Verbesserung des Lernens von Geometrie?

Es ist offensichtlich, dass unsere „elektronischen Geometrie-Arbeitsblätter" einen hohen Motivationswert für das Lernen von Geometrie haben. Bisher wurden Computer im Geometrieunterricht vorwiegend eingesetzt, um das Konstruieren mit Hilfe von DGS zu erleichtern und Zirkel und Lineal zumindest teilweise zu ersetzen. Unsere Erfahrungen mit Studierenden sowie Schülerinnen und Schülern zeigen jedoch, dass der Lernaufwand für ein halbwegs sicheres Konstruieren mit Computerhilfe erheblich ist. Dagegen erscheint uns das Experimentieren mit fertigen Figuren im Zugmodus wesentlich einfacher. Viele geometrische Eigenschaften – auch solche, die mit klassischen Hilfsmitteln kaum zu finden sind – können so entdeckt werden. Die „visuelle Evidenz" macht natürlich das Begründen und Beweisen keineswegs überflüssig.

Somit stellt sich uns die Aufgabe zu erforschen, welche Lehrplaninhalte für das experimentelle Vorgehen geeignet sind, wie unsere „elektronischen Geometrie-Arbeitsblätter" verbessert und in den üblichen Mathematikunterricht eingebettet werden können und wie man zum Konstruieren und Beweisen überleiten kann.