

# Länge der logarithmischen Spirale

Herleitung der endlichen und unendlichen geometrischen Reihe:

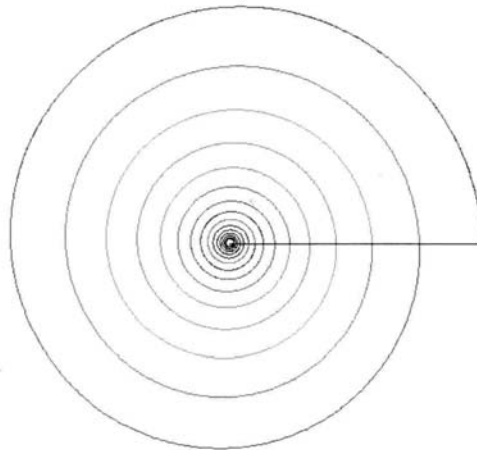
Endliche geometrische Reihe: 
$$\sum_{i=1}^n q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Unendliche geometrische Reihe: 
$$\sum_{i=1}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Mit Beispiel  $q = \frac{1}{2}$  beginnen, als Längen interpretieren. Man sieht die 2. Formel dann sofort

anschaulich ein. Weitere Beispiele machen.

Herleitung der 1. Formel mit dem üblichen Verfahren: Nenne die unbekannte Summe  $S_n$ , multipliziere die Gleichung  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = S_n$  mit  $q$ , subtrahiere die entstandene Gleichung von der ursprünglichen und löse nach  $S_n$  auf. Die 2. Gleichung ergibt sich sofort aus 1. Gleichung der (anschaulich klaren) Beobachtung, dass für  $n \rightarrow \infty$  der Wert  $q^{n+1}$  gegen Null geht, wenn  $|q| < 1$  ist.



Gleichung für diese Spirale: 
$$r = r_0 \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{\varphi}{2\pi}} = r_0 \cdot e^{\frac{\ln(\frac{3}{4})}{2\pi} \cdot \varphi}$$

Aus der Selbstähnlichkeit der Spirale erhält man:

Wird die Spirale mit dem Faktor  $q = \frac{3}{4}$  verkleinert, dann werden die farbigen Stücke der

Spirale aufeinander abgebildet. Jedes markierte Stück gehört zu einer Drehung um  $2\pi$ . Es wird das rote Stück auf das blaue, das blaue auf das grüne usw. abgebildet.

Damit erhält man für die Gesamtlänge  $l$  der Spirale ausgehend von der Länge  $l_0$  des roten Stücks ( $\varphi=0$ ):

$$l = l_0 + q \cdot l_0 + q^2 \cdot l_0 + q^3 \cdot l_0 + q^4 \cdot l_0 + \dots = l_0 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots) = \frac{1}{1 - q} \cdot l_0$$

Im Beispiel erhält man also  $l = 4l_0$

Diese Überlegung zeigt zwar, dass die Länge der logarithmischen Spirale endlich ist und erlaubt die Berechnung der Länge, wenn man die Länge eines Stückes  $l_0$  zum Winkel  $2\pi$  kennt. Dessen Länge ergibt sich aber nicht aus der Überlegung.

Um die Länge mit elementaren Mitteln absolut zu bestimmen, muss das Argument verfeinert werden.