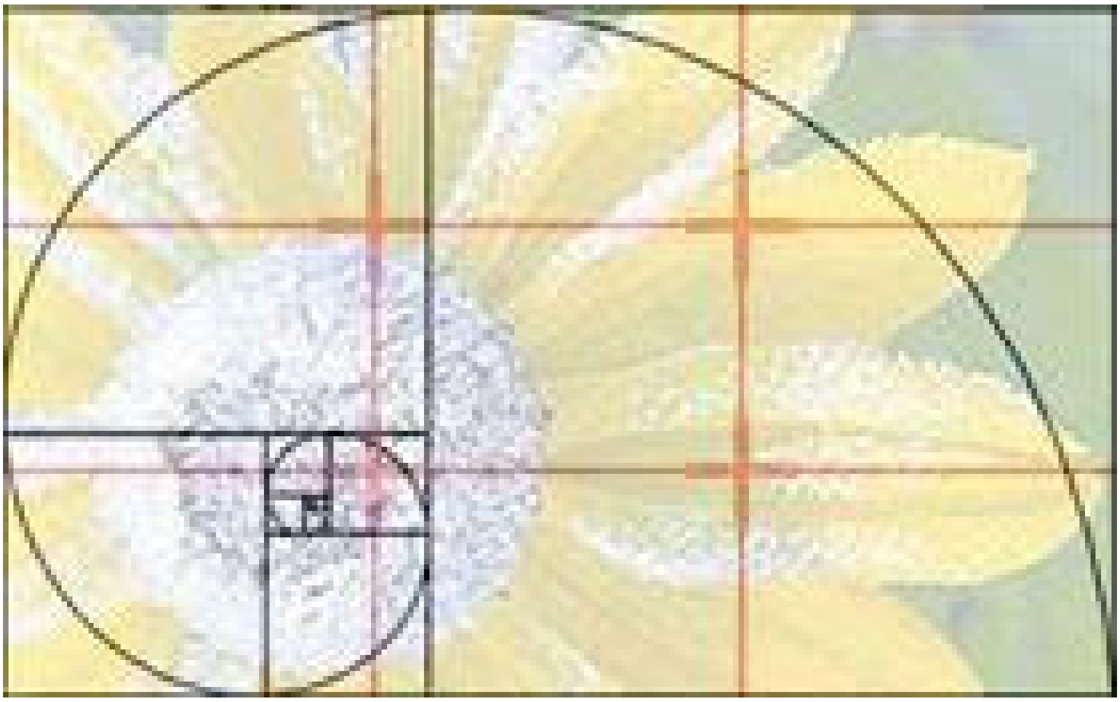
Die Goldene Spirale



Fach: Mathematik

Hauptseminar: Spiralen, WS 2005/2006

Dozent: Prof. Dr. R. Deißler

Referenten: Judith Stoiber 1389024

Peter Rath 1389345

Handout zum Referat vom 24.01.2006

Inhaltsverzeichnis:

Die Goldene Spirale 1

Der Goldene Schnitt 3

Das Goldene Rechteck 7

Gruppenarbeit 8

Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und Phi 9

Besonderheiten der Goldenen Spirale 11

Herleitung der Gleichung 12

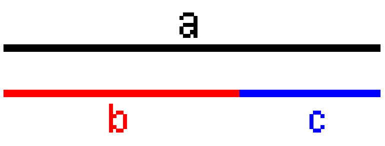
Quellen: 13

Der Goldene Schnitt

Was versteht man darunter?

Der Goldene Schnitt teilt eine Strecke in einem bestimmten Verhältnis.

Die Strecke **a** wird beim Goldenen Schnitt in **b** und **c** unterteilt, die zueinander im Verhältnis PHI stehen.



a verhält sich dabei zu **b**, wie a zu **c**. **b** wird als Major, **c** als Minor bezeichnet.

Der Goldene Schnitt lässt sich wie folgt konstruieren:

Eine Strecke AB wird halbiert.

Auf AB durch den Punkt B wird ein Lot gefällt.

Der Punkt C auf der Lotgerade hat von B den Abstand AB/2.

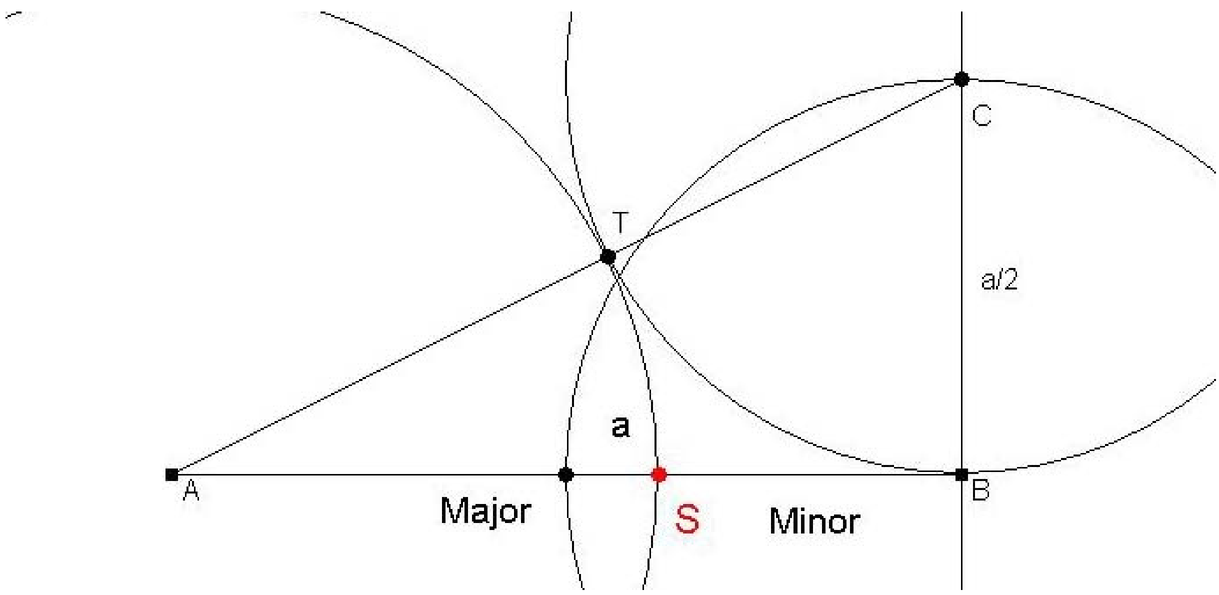
Man verbindet die Punkte A und C

Um C wird ein Kreis mit AB/2 geschlagen

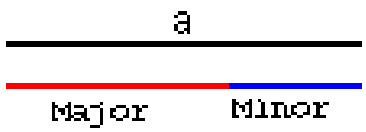
Der Schnittpunkt T auf AC wird mit einem Kreis um A mit dem Radius AT auf AB übertragen

Der dabei entstandene Schnittpunkt ist S

S teilt die Strecke AB im Goldenen Schnitt



Dieses Verhältnis, genannt Φ (PHI), kann auch errechnet werden.



$\frac{a}{M} = \frac{M}{m}$ $\qquad\qquad$ $\frac{M}{m}$ = Φ (PHI)

Berechnung von PHI:

$\frac{a}{M} = \frac{M}{m}$ $\qquad$ I a = M + m (siehe oben)

$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m}$ $\qquad$ I Ziel ist das Verhältnis $\frac{M}{m} = x$ oder auch $\frac{m}{M} = \frac{1}{x}$

$\frac{M}{M} + \frac{m}{M} = \frac{M}{m}$

$1 + \frac{m}{M} = \frac{M}{m}$ $\qquad$ I $\frac{M}{m} = x$ und $\frac{m}{M} = \frac{1}{x}$ in Gleichung einsetzen:

$1 + \frac{1}{x} = x$ $\qquad$ I $*x$

$1 + x = x^2$ $\qquad$ I auf andere Seite bringen

$x^2 - x - 1 = 0$ $\qquad$ I hier schließt die p/q-Formel an $x_{1/2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ = 1,618033989… = PHI [Zahlenverhältnis]

$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ = - 0,618…

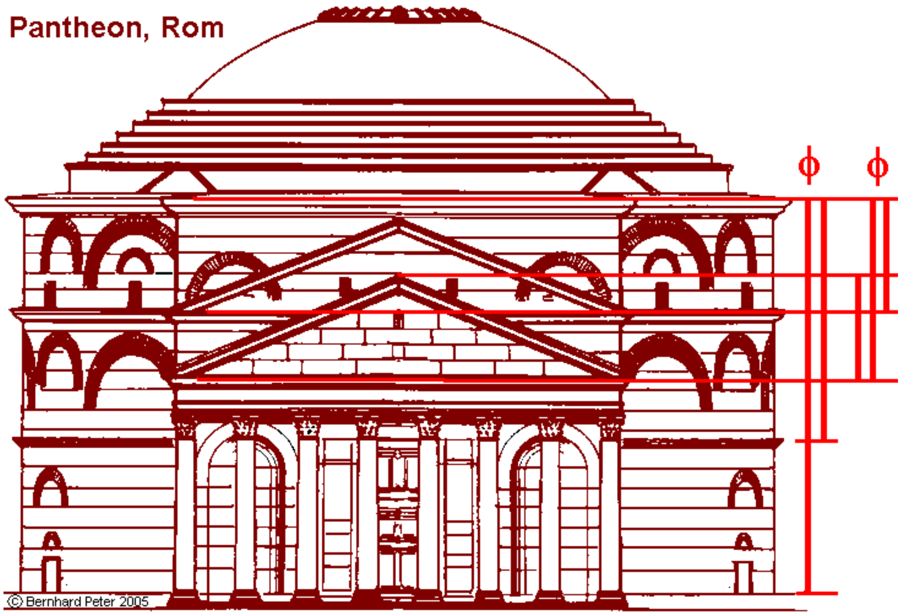
[X_2 ist für den Goldenen Schnitt nicht von Bedeutung]

Wo sieht man den Goldenen Schnitt?

Zu sehen ist der Goldene Schnitt z.B. am Pantheon in Rom:

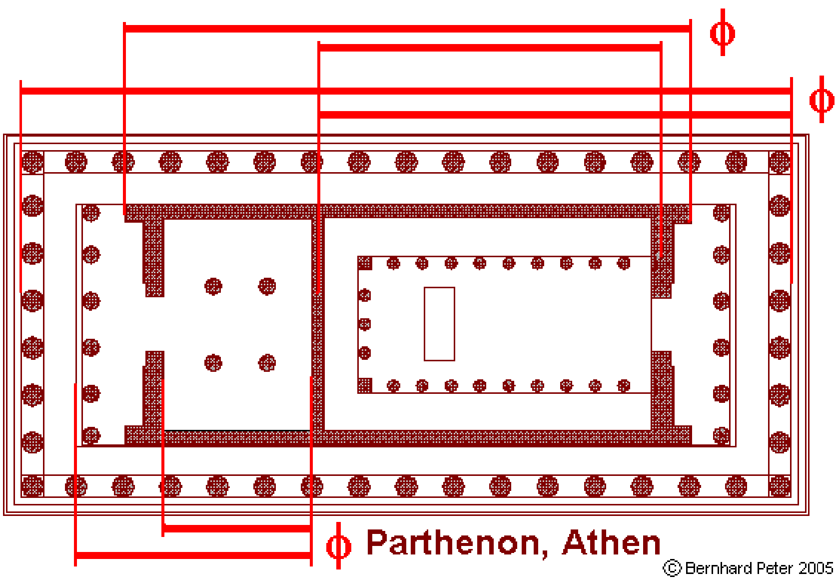
- an der Anordnung der Säulenhöhe zu den Dächern
- an den Absätzen der einzelnen Etagen bzw. Bogengängen zur Gesamthöhe

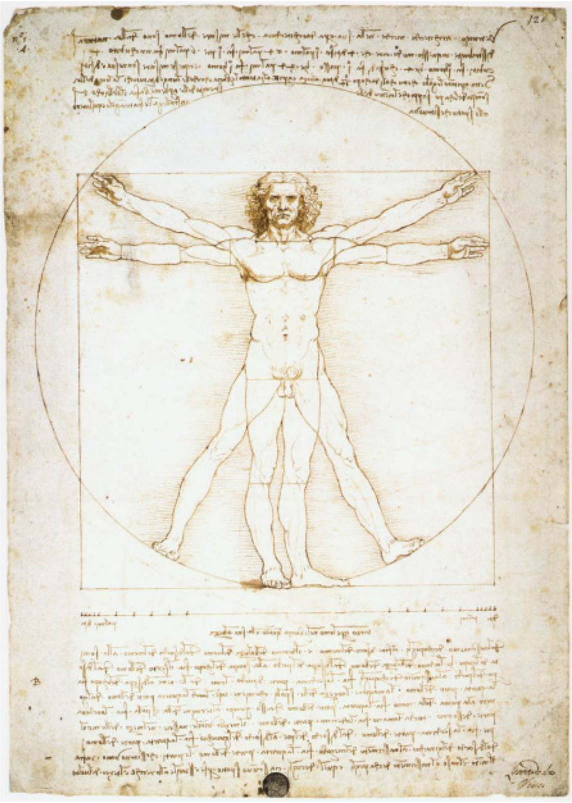
-



am Parthenon in Athen:

- bei den Größenverhältnissen der Räume des Tempels mit den Säulengängen
- der Raumaufteilung untereinander



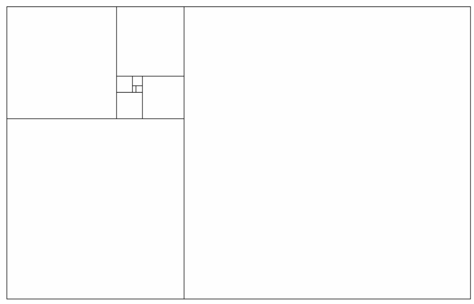


Am Vitruvian kann man Goldene Verhältnisse sehen, wenn er mit seinen Gliedmaßen einen Kreis darstellt. Außerdem ist der Goldene Schnitt z.B. am Größenverhältnis der Hände bis zum Ellenbogen, bzw. der Füße bis zu den Knien zu sehen.

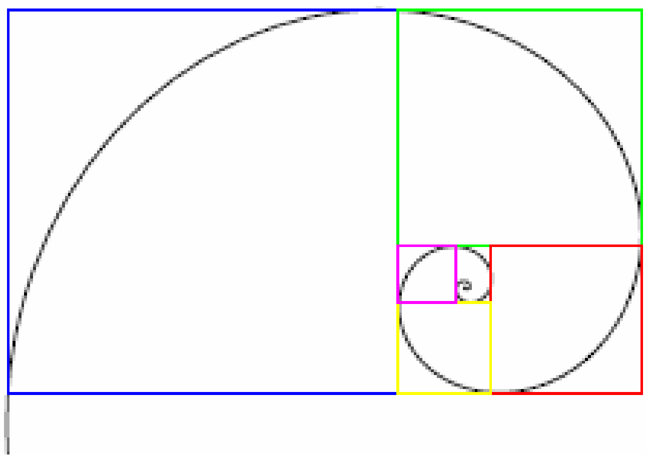
Das Goldene Rechteck

Die Seiten im Goldenen Rechteck stehen im Verhältnis Φ zueinander. Teilt man die größere durch die kleinere Seite, erhält man im Goldenen Rechteck das Verhältnis Φ.
Man kann sich ein Goldenes Rechteck konstruieren, in dem man eine beliebige Stecke mit dem Faktor Φ streckt und diese beiden Stecken als Rechtecksseiten a und b verwendet.
Durch abtrennen des Quadrates der kürzeren Seite an der längeren, ist das verbleibende Rechteck wieder ein Goldenes, welches um 90° gedreht wurde. Dies kann man dadurch erklären, da das Quadrat die längere Seite im Goldenen Schnitt teilt.

Durch fortführen dieser Handlung kann man ein Goldenes Rechteck immer wieder in ein ähnliches, kleineres überführen.



Durch die inneren Eckpunkte der Quadrate lassen sich Kreisbögen legen, die eine Spirale ergeben. Dies ist eine Annäherung an die Goldene Spirale. Die Goldene Spirale verläuft wie auch die Kreisbögen durch die Eckpunkte der Quadrate.



Gruppenarbeit

Wir haben die Seminarteilnehmer in drei Gruppen unterteilt, welche unterschiedliche Aufgaben zu lösen hatten.
Die erste Gruppe hatte die Aufgabe, die oben beschriebene Unterteilung mit einem beliebigen Rechteck durchzuführen und anschließend eine Spirale durch die Ecken zu zeichnen.
Die zweite Gruppe hatte die gleiche Aufgabenstellung, aber mit einem Goldenen Rechteck.
Die Dritte Gruppe hatte ein Rechteck mit den Seitenlängen 21cm und 13 cm.
Jeder Gruppe haben wir entsprechend zugeschnittene Rechtecke ausgeteilt.
Zusätzlich sollten sich die Studenten überlegen, welche Art Spirale bei dieser Konstruktion entsteht.

Ergebnisse der Gruppenarbeit

Die Ergebnisse der Gruppen waren, dass die erste Gruppe mit dem beliebigen Rechteck nicht weit gekommen ist, da sich die Unterteilung nicht durchführen ließ, da das Rechteck keinerlei Goldene Proportionen aufwies.
Die zweite Gruppe sollte eine Annäherung an die Goldene Spirale erreichen. Dies hat in der Gruppenarbeit allerdings nicht funktioniert, da die Zeichnungen zu ungenau waren. Die Kreisbögen werden zum Zentrum hin immer kleiner, wodurch man sie von Hand nur schwer zeichnen kann. Die Spirale ist unendlich.
Die dritte Gruppe kam zu dem Ergebnis, dass sich die Unterteilung bis zu zwei Quadraten mit der Seitenlänge 1cm durchführen lässt. Auch die Spirale kann gezeichnet werden, welche aber endlich ist. Der Grund dafür liegt an den Seitenlängen, die auf zwei benachbarten Fibonacci-Zahlen basieren.

Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und Phi

Die Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Reihe wurde von dem Mathematiker Leonardo von Pisa (1180-1250, heute bekannt unter dem Namen Fibonacci) entdeckt. Diese stellte er anhand einer etwas unrealistischen Aufgabe der Vermehrung von Kaninchen dar.

Die Reihe setzt sich aus Zahlen zusammen, bei denen immer zwei aufeinander folgende Zahlen addiert werden und so die darauf folgende Zahl ergeben. Diese Reihe sieht folgendermaßen aus:

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...

Zusammenhang

Eine weitere Besonderheit der Fibonacci-Zahlen ist, dass es einen engen Zusammenhang mit der Goldenen Schnittzahl Φ gibt.

Der Dividend zweier aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen nähret sich Phi an. Dabei verläuft die Annäherung abwechselnd von untern und dann wieder von oben.

PHI ~ 1,618033989

Bsp.: 5:3 ~ 1,6667 $\Uparrow$

8:5 = 1,6 $\Downarrow$

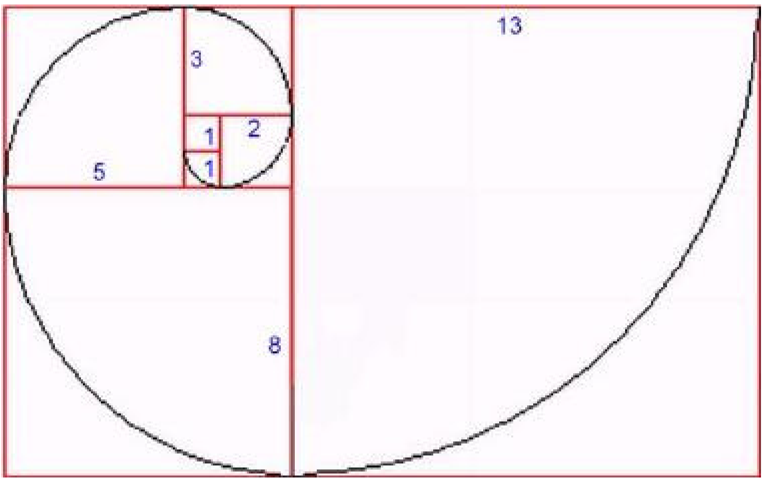
13:8 = 1,625 $\Uparrow$

21:13 ~ 1,615384615 $\Downarrow$

34:21 ~ 1,619047619 $\Uparrow$

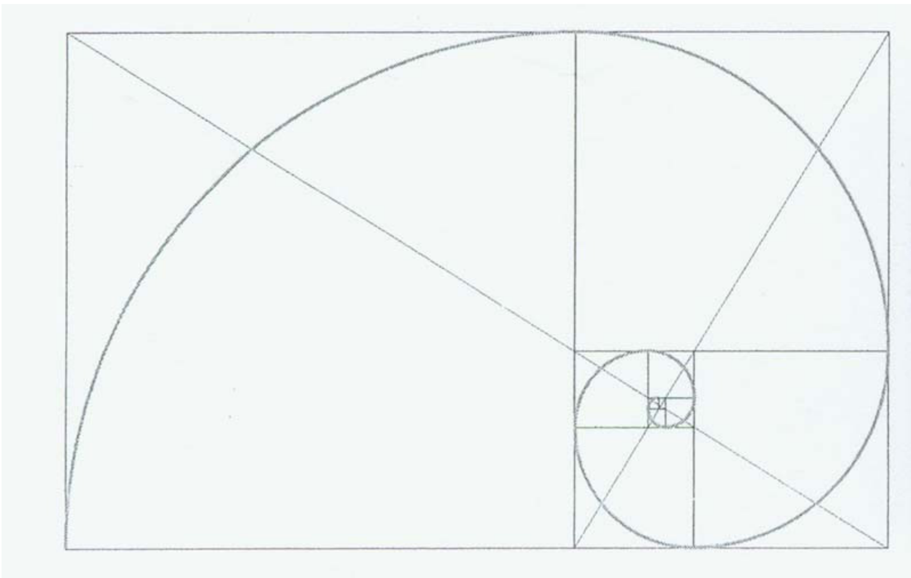
Die Annäherung an die Goldene Spirale, kann auch durch anfügen von Quadraten erreicht werden. Die Quadrate entsprechen hierbei in ihren Kantenlängen den Fibonacci-Zahlen (siehe Gruppenarbeit Gruppe drei).

Begonnen wird mit zwei Quadraten der Kantenlänge eins. An die längere der beiden Seiten wird ein neues Quadrat der Seitenlänge zwei angehängt. An dieses wiederum ein Quadrat der Seitenlänge drei, etc.
Die sich daraus ergebende Spirale, ist nach innen in ihrem Zentrum endlich, nach außen dagegen unendlich.

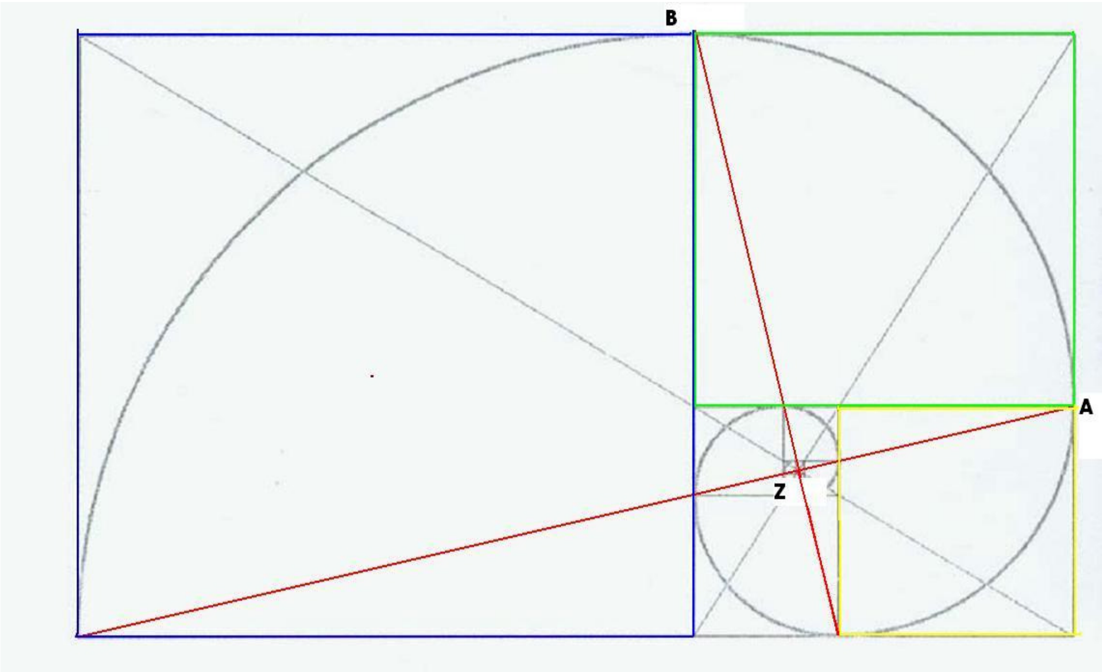


Besonderheiten der Goldenen Spirale

Die Goldene Spirale ist eine logarithmische Spirale, welche durch die Kreisbögen im Goldenen Rechteck angenähert werden kann. Die Goldene Spirale geht durch die Eckpunkte der Quadrate, verläuft aber sonst leicht anders als die Kreisbögen.
Der Radius der Goldenen Spirale vergrößert bzw. verkleinert sich pro 90° um den Faktor Phi. Das bedeutet, dass der Radius je Quadrat im Goldenen Rechteck um den Faktor Phi wächst bzw. gestaucht wird.
Die Diagonalen der Goldenen Rechtecke schneiden sich alle in einem Punkt. Dieser Schnittpunkt ist das Zentrum der Goldenen Spirale.



Herleitung der Gleichung



Da alle Diagonalen der Goldenen Rechtecke durch das Zentrum der Goldenen Spirale gehen, kann man sich eine geeignete Polarachse auswählen. In diesem Beispiel wird die Polarachse so gewählt, dass sie durch Z und A verläuft. Des weiteren wird der Einfachheit halber der Radius $\overline{ZA}$ so gewählt, dass er gerade eins ist. Dies ist durch Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Spirale möglich. Der Winkel ist hierbei 0°.

Um nun vom Radius ZA zum Radius ZB zu kommen, bzw. vom gelben zum grünen Quadrat, muss man den Radius bzw. das Quadrat, um den Faktor Φ strecken und um Π/2 drehen. In Polarkoordinaten ist 90°= Π/2.

In die andere Richtung, um vom grünen Rechteck zum gelben zu kommen, muss dementsprechend um den Faktor Φ stauchen und um -Π/2, d.h. im Urzeigersinn bzw. mathematisch negativen Sinn, drehen.

Somit haben die Radien bei den weiteren Streckungen vom Zentrum zu den Ecken den Wert: 1, Φ, Φ^2,Φ^3,... und die entsprechenden Winkel: 0°, Π/2, Π, 3/2 Π, ... bzw. bei der Stauchung die Werte: 1, Φ^{-1}, Φ^{-2},Φ^{-3},... und die Winkel: 0°, - Π/2, - Π, - 3/2 Π, ...

Der Radius des n-ten Quadrates ist somit $r_n = \Phi^n$ und der Winkel ist $\alpha = n*\Pi/2$. Durch umformen bekommt man: $n = \frac{2\alpha}{\pi}$

Damit ist die allgemeine Gleichung für die Goldene Spirale

$$r_{(\alpha)} = \Phi^{2\alpha/\pi}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die Goldene Spirale für beliebige Winkel α konstruiert werden.

Quellen:

Literatursammlung Deißler

www.mathe-seiten.de

http://www.khg.bamberg.de/comenius/gold/inhgs.htm

www.wikipedia.org/wiki/goldener_schnitt

http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2003/pre_gold_schnitt.pdf

http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/goldenerschnitt/lu/

http://www.fh-lueneburg.de/mathe-lehramt/mathe-lehramt.htm?show=http://www.fh-lueneburg.de/mathe-lehramt/geo/grund/golden/golden.htm