Hauptseminar: Spiralen
WS 05/06
Dozent: Prof. Dr. Deißler
Datum: 31.01.2006
Vorgelegt von Sascha Bürgin

# Archimedische Spiralen

Man kann sich auf zwei Arten zeichnerisch den archimedischen Spiralen annähern. Eine Methode ist es durch exakte Konstruktion weitere Punkte zu finden, die wirklich auf der Spirale liegen:
Indem man bei gegebenem Pol und zwei Punkten, die direkt hintereinander liegen, weitere Punkte konstruiert, erhält man solche, die zwar exakt auf der Spirale liegen aber keine durchgängige dichte Kurve ergeben.

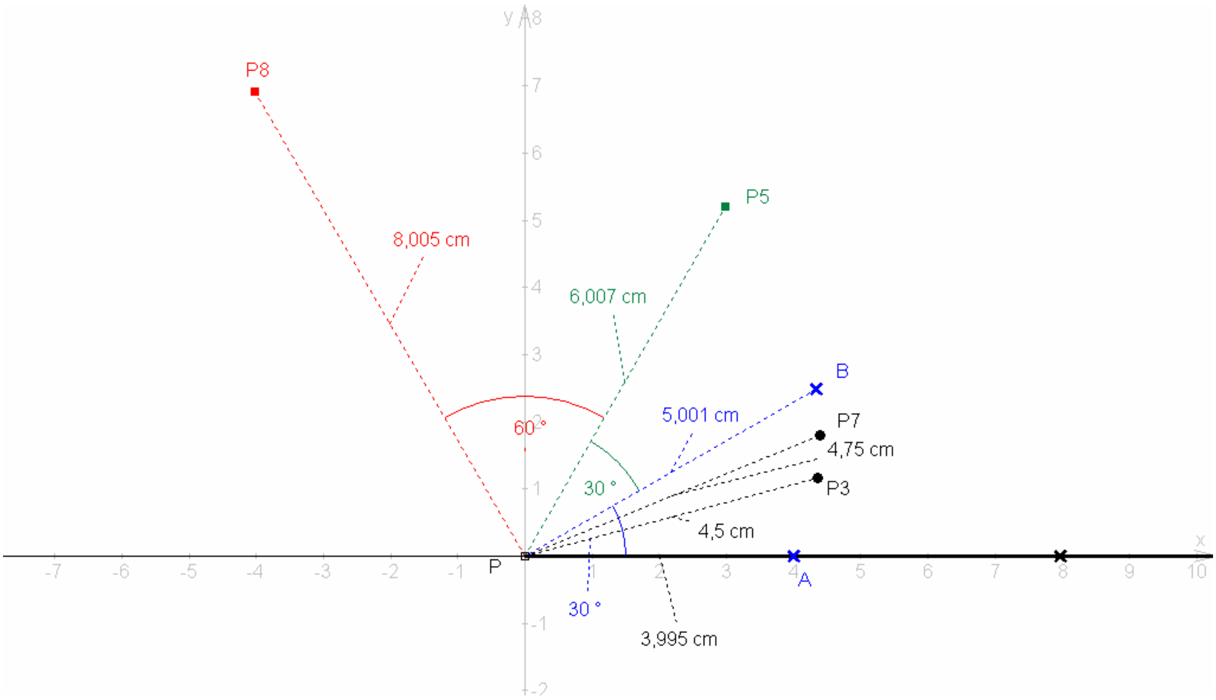


Abb. 1

In Abb. 1 sind die Punkte A, B und der Pol P gegeben. Weitere Punkte dazwischen (P3 und P7) können gefunden werden, indem man das konstante Verhältnis ausnutzt, das jeweils zwischen der Vergrößerung des Winkels und der Verlängerung des Radius' besteht. Man konstruiert zunächst den Punkt, der genau zwischen den

beiden gegebenen Punkten A und B liegt (P3). P3 wird erhalten indem man die Winkelhalbierende des Winkels BPA konstruiert und danach den Mittelwert der Strecken PA und PB als neuen Radius PP3 nimmt. P7 kann auf gleiche Weise gewonnen werden.
Ein weiteres Problem stellt nun die Aufgabe dar, Punkte zu konstruieren, die nicht zwischen den zwei gegebenen liegen (z.B. P5 und P8). Auch hierbei wird das konstante Verhältnis, das jeweils zwischen der Vergrößerung des Winkels und der Verlängerung des Radius' besteht, berücksichtigt: Konstruiert man also zur Strecke PB von Punkt P eine Halbgerade mit dem Winkel 30°, so liegt auf dieser ein weiterer Punkt, den man dadurch erhält, dass der Radius, wie von PA zu PB (von 4cm auf 5cm), um 1 cm erweitert wird (auf 6cm). Der Winkel P8PP5 beträgt nun das Doppelte (60°) des Winkels P5PB (30°). Deshalb muss nun auch der Radius PP8 um das Doppelte zunehmen (von 6cm auf 8cm [um 2cm]).
Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Punkte einer archimedischen Spirale exakt konstruieren. Nur wird die Punktemenge durch dieses Vorgehen niemals wirklich dicht (unendlich). Es ist deshalb auch nicht möglich eine Gerade mit einer auf diese Weise konstruierten Spirale zu schneiden (siehe Abb. 2).

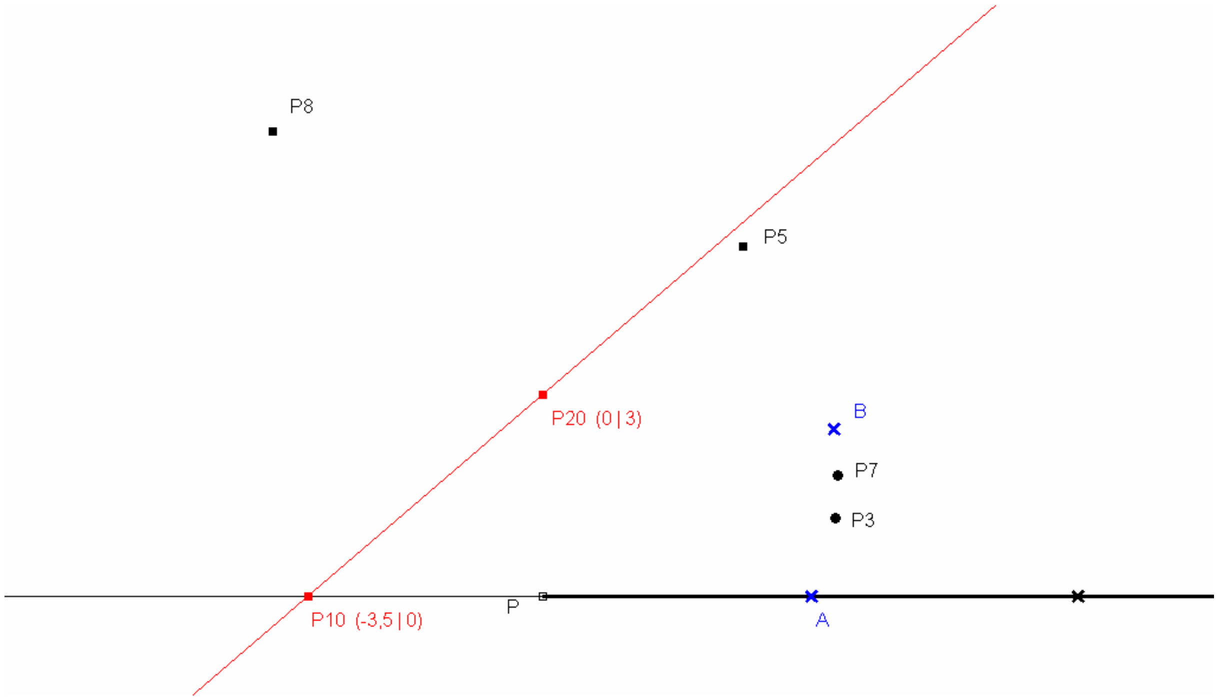


Abb. 2

Um graphisch zu beweisen, dass die eben konstruierten Punkte wirklich auf einer archimedischen Spirale liegen, kann man eine Gleichung einer solchen in Polarkoordinaten angeben und die Kurve mit Hilfe des Geometrieprogramms DynaGeo aufzeichnen lassen (siehe Abb. 3).

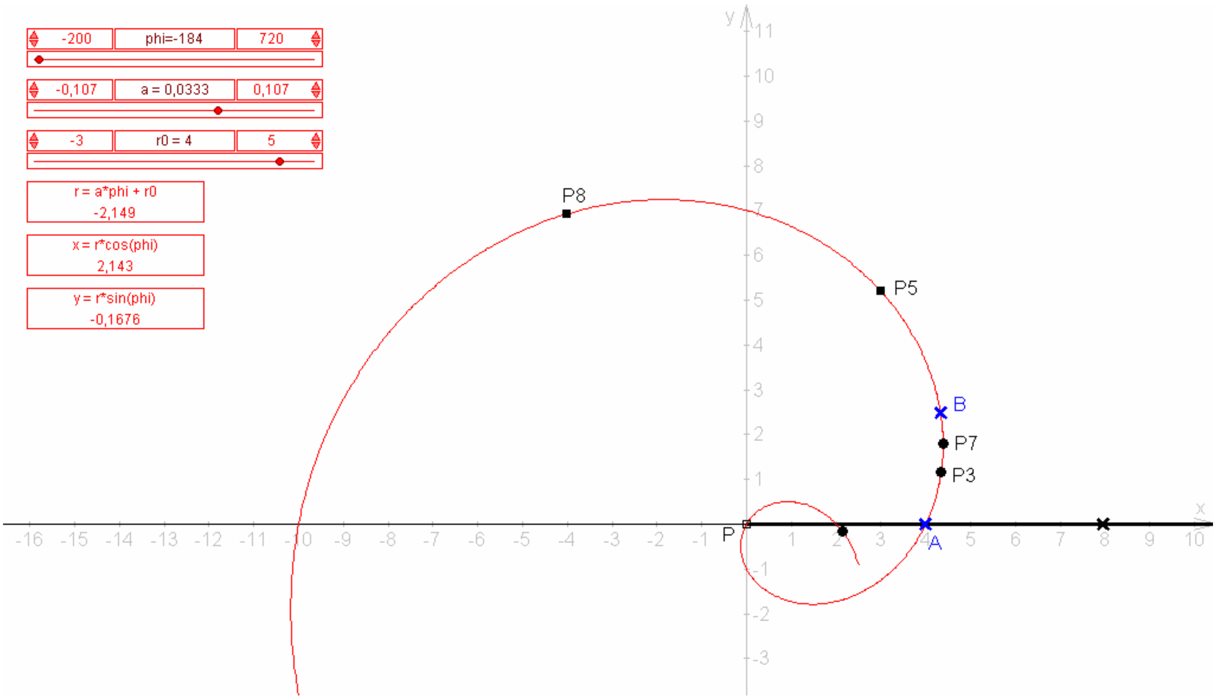


Abb. 3

Die Gleichung dieser archimedischen Spirale kann relativ einfach gefunden werden, weil die Polarachse so liegt, dass Punkt A ein Punkt auf der Spirale ist.
Die Polarkoordinaten lauten deshalb für den Punkt A: (4cm / 0°) und für den Punkt B: (5cm / 30°).
Die allgemeine Gleichung für archimedische Spiralen heißt $\boxed{r = a * phi + r0}$.

Setz man nun die Polarkoordinaten der Punkte A und B ein, erhält man die folgenden beiden Gleichungen:

I   4 = a * 0° + r0   =>   r0 = 4

II  5 = a * 30° + r0

I in II   5 = a * 30° + 4   =>   a = 1/30°

=>   $\boxed{r = 1/30° * phi + 4}$.

Somit haben wir die Gleichung für die Spirale von Abb. 3 gefunden und erkennen, dass die konstruierten Punkte exakt auf ihr liegen.

Allerdings ist es ein Nachteil, dass diese Gleichung die Form $\boxed{r = a * phi + r0}$ hat. Denn manche Computerprogramme benötigen die allgemeine Form $\boxed{r = a * phi}$.

Deshalb ist es sinnvoll die Polarachse so zu drehen, dass die Gleichung die Form $\boxed{r = a * phi}$ annimmt.

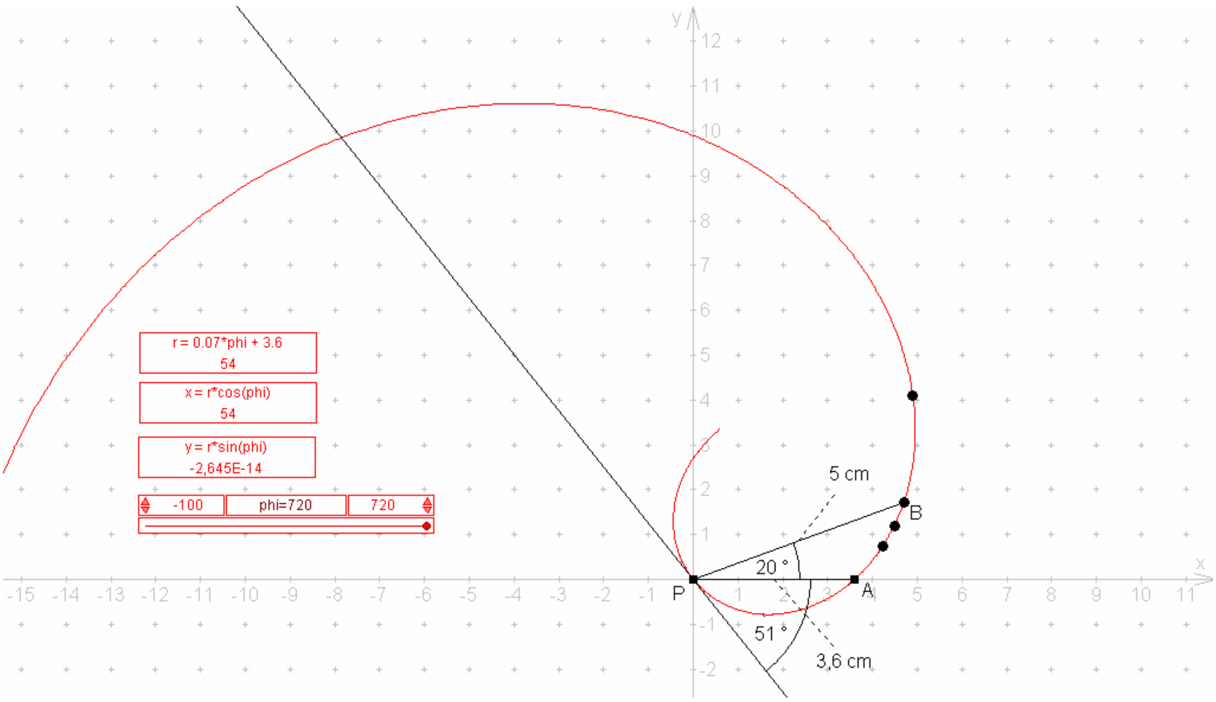


Abb. 4

Die Spirale von Abb. 4 hat folgende Gleichung:

$\boxed{r = 0,07 * phi + 3,6}$. [Ermittlung der Gleichung wie oben aber diesmal mit den Polarkoordinaten für Punkt A (3,6 / 0°) und für Punkt B (5 / 20°).]

Um den Winkel zu ermitteln, um welchen man die Polarachse, die im Moment noch auf der x - Achse des eingezeichneten kartesischen Koordinatensystems liegt, gegen den Uhrzeigersinn drehen muss, ist die Bedingung in der allgemeinen Gleichung, dass r = 0 ist. Im Pol ist diese Bedingung erfüllt, d.h. es gibt keinen Radius, aber die Richtung des Radius' ist gleich der Polarachse.

r = 0,07 * phi + 3,6

=> 0 = 0,07 * phi + 3,6

=> phi = - 51,43° (Das heißt man muss die Polarachse um 51,43° im Uhrzeigersinn [wegen des Minuszeichens] drehen.)

Die Gleichung in der Form $\boxed{r = a * phi}$ erhält man indem man den Drehwinkel in die alte Gleichung einsetzt:

r = 0,07 * (phi – 51,43°) + 3,6

=> r = 0,07 * phi – 3,6 + 3,6

=> $\boxed{r = 0,07 * phi}$.

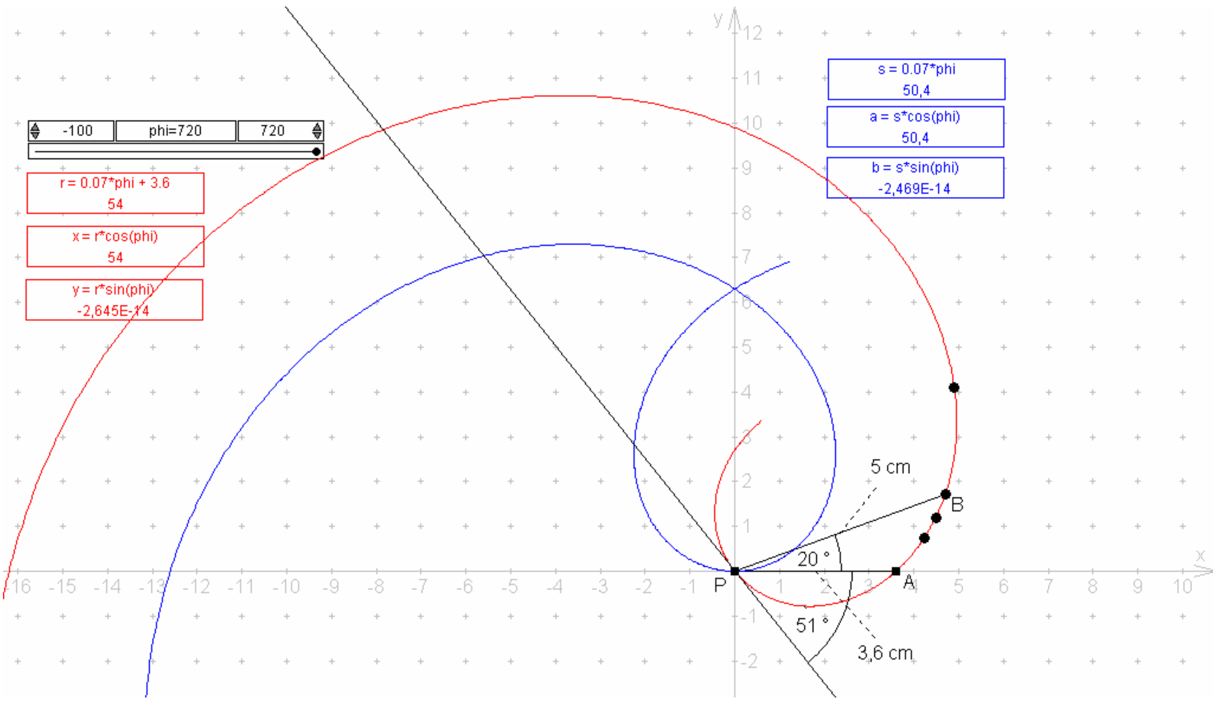


Abb. 5

Die blaue Spirale ist diejenige mit der Gleichung $\boxed{r = 0,07 * phi}$.

Die Spirale ist offensichtlich gleich der roten. Der Unterschied besteht darin, dass die blaue Spirale um 51,43° gegen den Uhrzeigersinn gedreht wurde. Somit ist also die Polarachse die Tangente im Pol, so wie auch die gedrehte Polarachse Tangente der roten Spirale ist.

Die zweite Art sich zeichnerisch archimedischen Spiralen anzunähern erfolgt mit dem Zirkel. Diese Spiralannäherungen sind zwar durchgängig, doch wie wir sehen werden liegt kein einziger Punkt zwingend genau auf der Spirale.

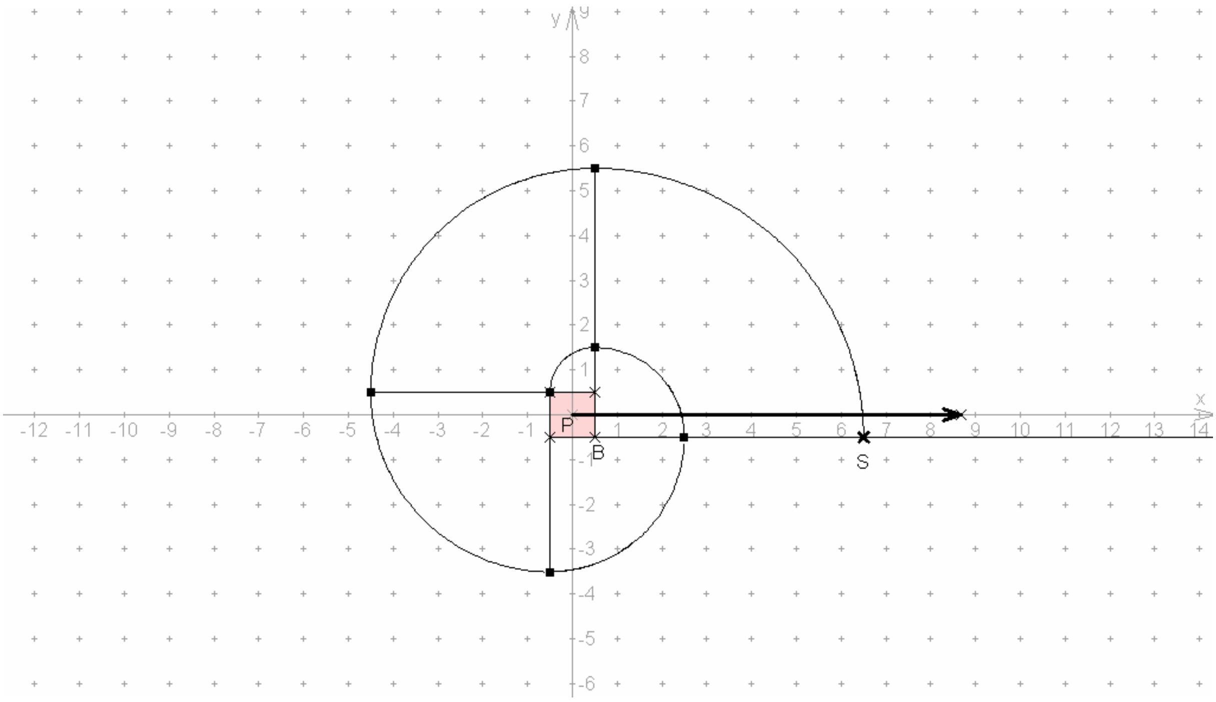


Abb. 6

Eine Ziege (Punkt S) wurde an einem Seil an einem Pflock (Punkt B) festgemacht. Die Ziege spannt das Seil maximal, sodass die Strecke BS zustande kommt. Nun bewegt sich die Ziege im Gegenuhrzeigersinn um das rote Quadrat, solange bis sie an dieses stößt (nach anderthalb Umdrehungen der Ziege um das Quadrat in Punkt A). Der Radius, mit dem sie sich um Punkt B bewegt, bleibt aber zunächst konstant (die Strecke BS).

Anmerkung: Es kann sich also schon aufgrund dieser Tatsache um keine Spirale handeln, da sich bei Spiralen in jedem Punkt der Radius ändert.

Wenn die Ziege jetzt an ihrem gestrafften Seil an Punkt C (Weitere Punkte, außer Punkt B, des Quadrates wurden auf der Abbildung nicht benannt, doch gilt die allgemeine Konvention für die Benennung von Punkten eines Quadrates.) stößt, wird dieses schlagartig um die Strecke BC (1cm) verkürzt. Gleiches geschieht wenn sie an Punkt D, an Punkt A und wieder an Punkt B kommt. An dieser Stelle ist die Ziege einmal um das Quadrat herummarschiert (360°) und das Seil wurde dabei um

4cm verkürzt. Mit Hilfe dieser Informationen kann man die passende Gleichung einer archimedischen Spirale bekommen: $\boxed{r = 4/360° * phi}$

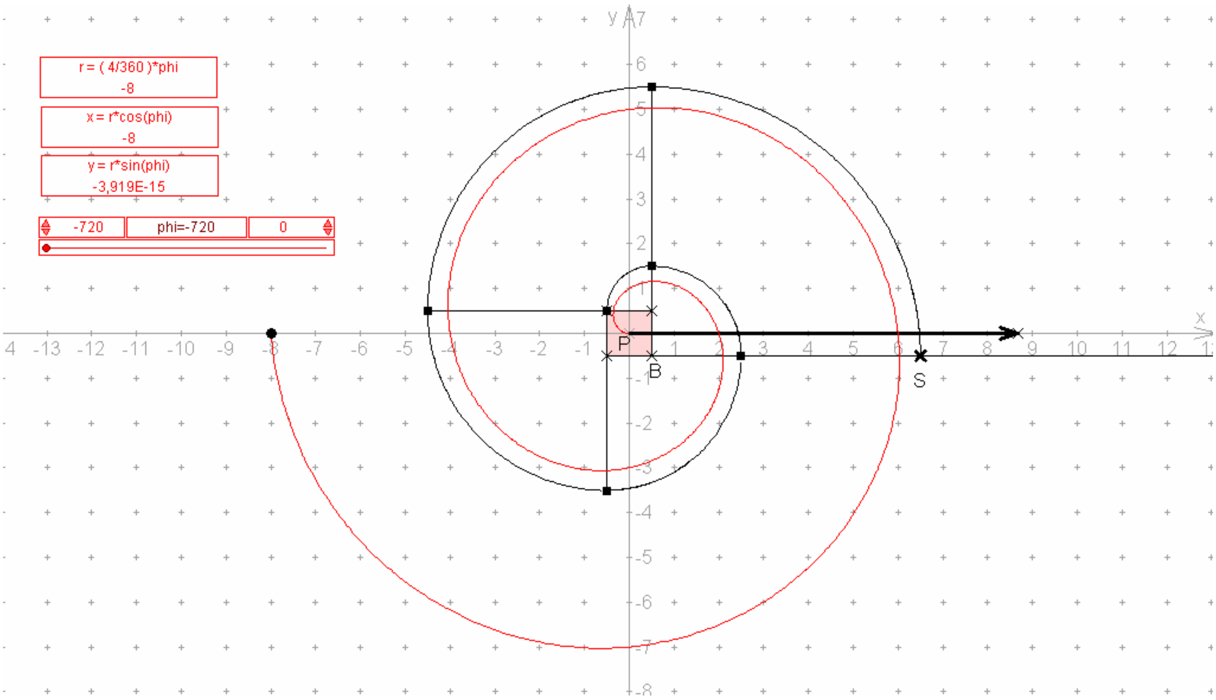


Abb. 7

Allgemein lautet die Gleichung für ein beliebiges N-Eck also $\boxed{r = N/360° * phi}$.
Bei dieser Zirkelkonstruktion springt das Zentrum der Teilkreise von Punkt zu Punkt (von B nach C usw. entgegen des Uhrzeigersinnes).
In Abb. 7 wurde die Spirale mit dieser Gleichung neben die Zirkelkonstruktion gelegt. Noch deutlicher wirkt die Ähnlichkeit zwischen den beiden Kurven, wenn man die Spirale so dreht, dass die beiden aufeinander liegen (siehe Abb. 8).
Es mag hierbei fast keinen Unterschied zwischen den beiden Kurven geben. Sie scheinen ziemlich genau aufeinander zu liegen.

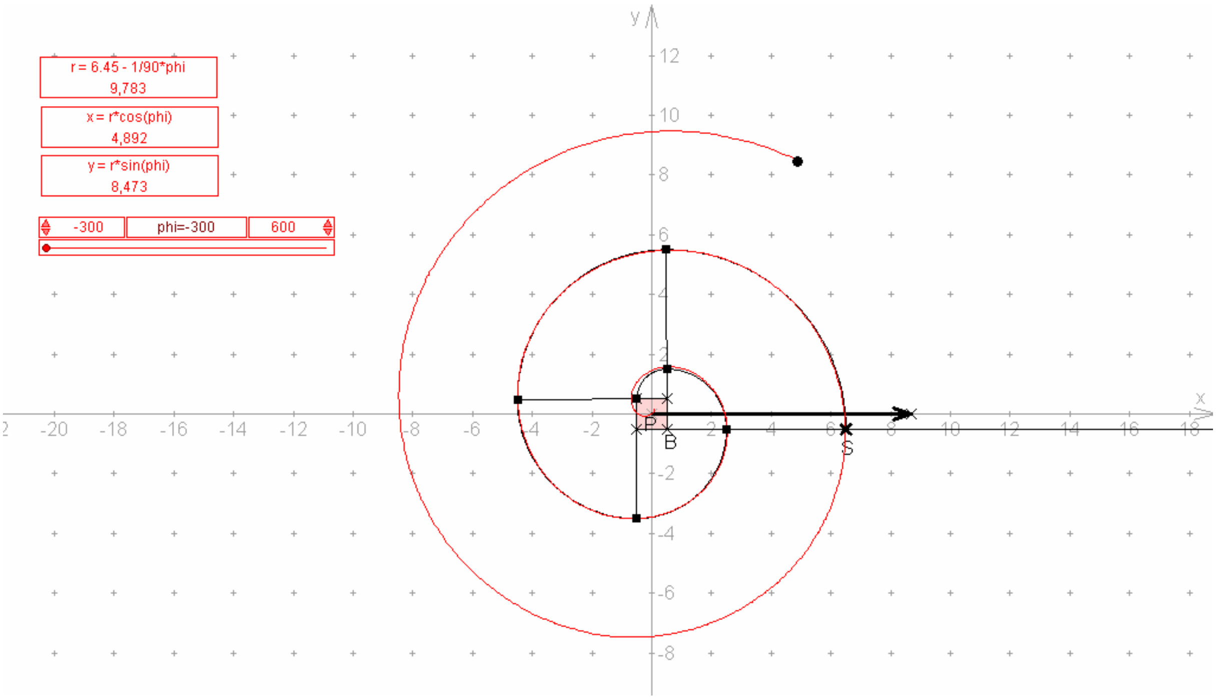


Abb. 8

Die weitere Frage ist nun, ob man die Ziege auch um andere Vielecke marschieren lassen kann, sodass dabei spiralenähnliche Kurven erzeugt werden.

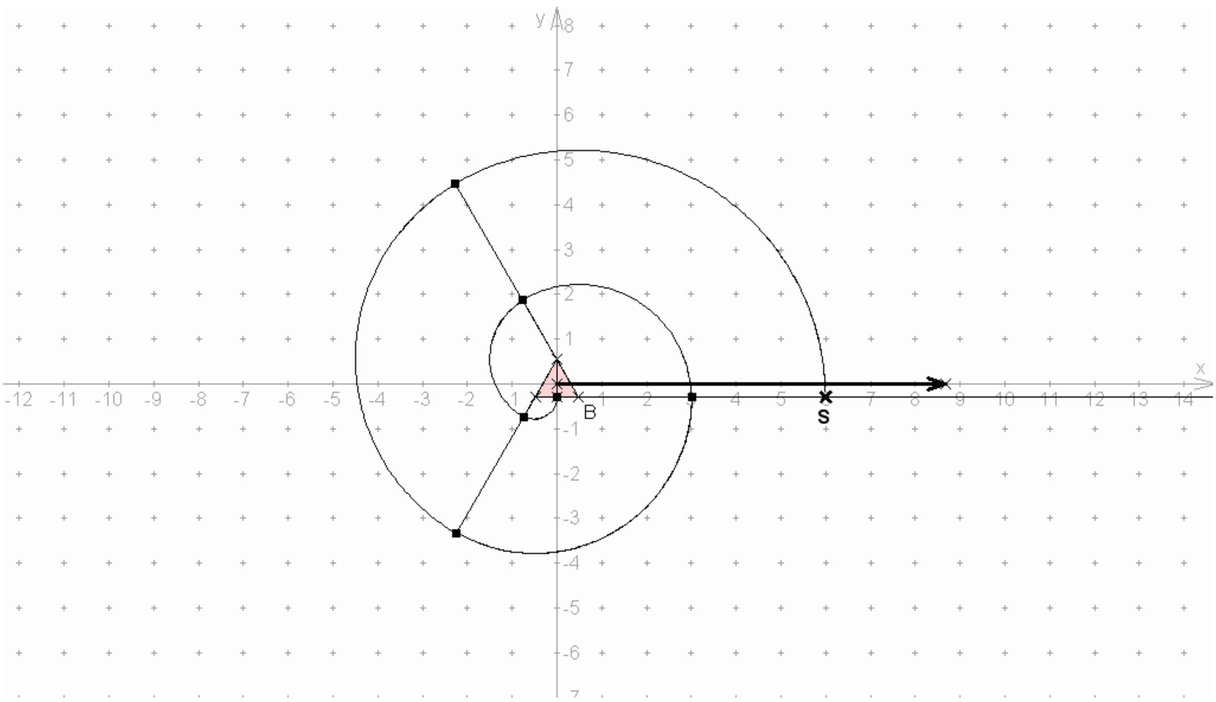

Abb. 9

In Abb. 9 läuft die Ziege um ein Dreieck. Bei einer Umrundung um dieses verliert das Seil 3cm an Länge. Die Gleichung für eine Spirale, der sich die Zirkelkonstruktion annähert lautet also:

$\boxed{r = 3/360 * phi}$

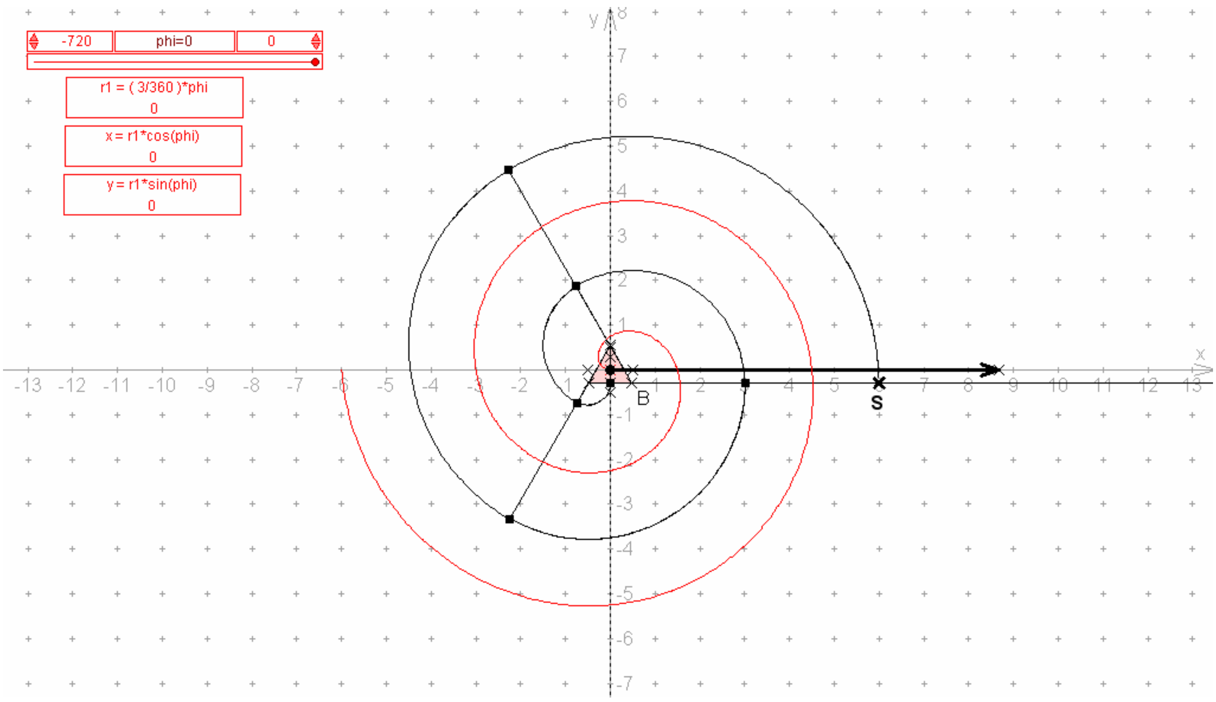


Abb. 10

Die rote Kurve stellt diejenige der archimedischen Spirale dar. Um die beiden Kurven vergleichen zu können, wird die Spirale so gedreht, dass die beiden aufeinander liegen (siehe Abb. 11).

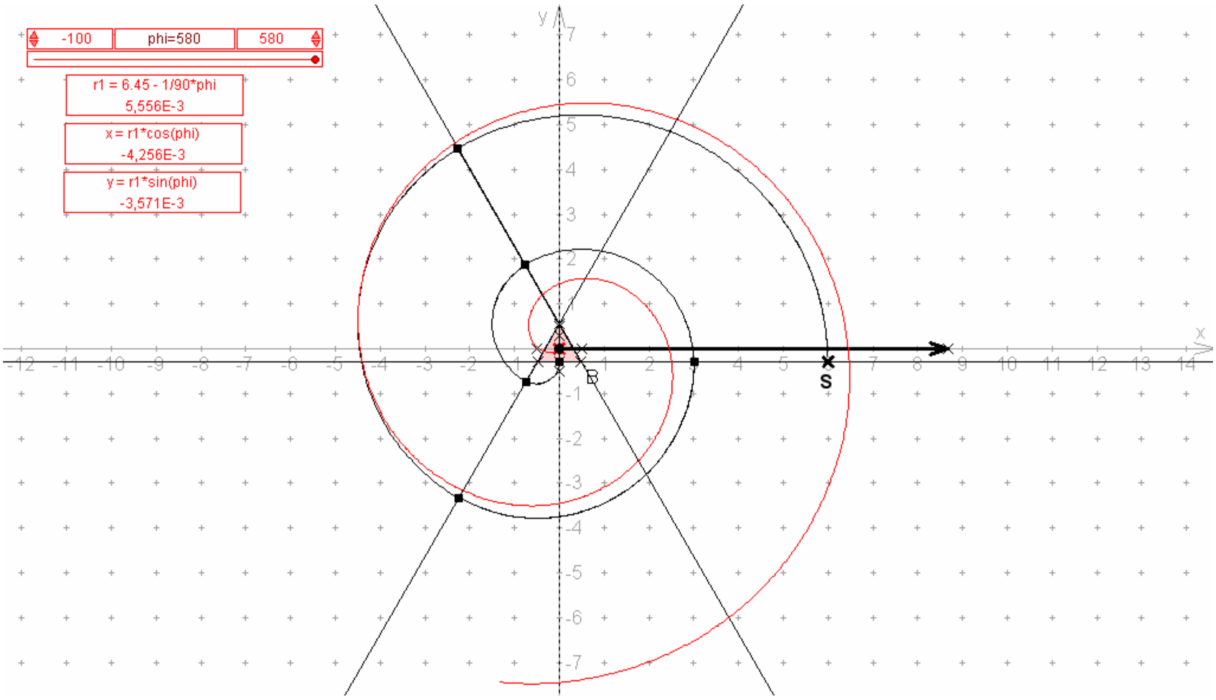


Abb. 11

Die Zirkelkonstruktion nähert sich offensichtlich wiederum dem Graphen einer archimedischen Spirale an. Doch war der Bereich, auf dem die beiden Kurven sich scheinbar überlagerten, größer, als die Ziege um das Quadrat lief.
Überprüfen wir nun die Annahme, die sich hieraus ergibt, dass umso mehr Ecken ein N-Eck besitzt desto genauer die Annäherung an eine archimedische Spirale gegeben ist. Betrachten wir also zunächst ein gleichseitiges Sechseck (Abb. 12, Abb. 13 und Abb. 14):

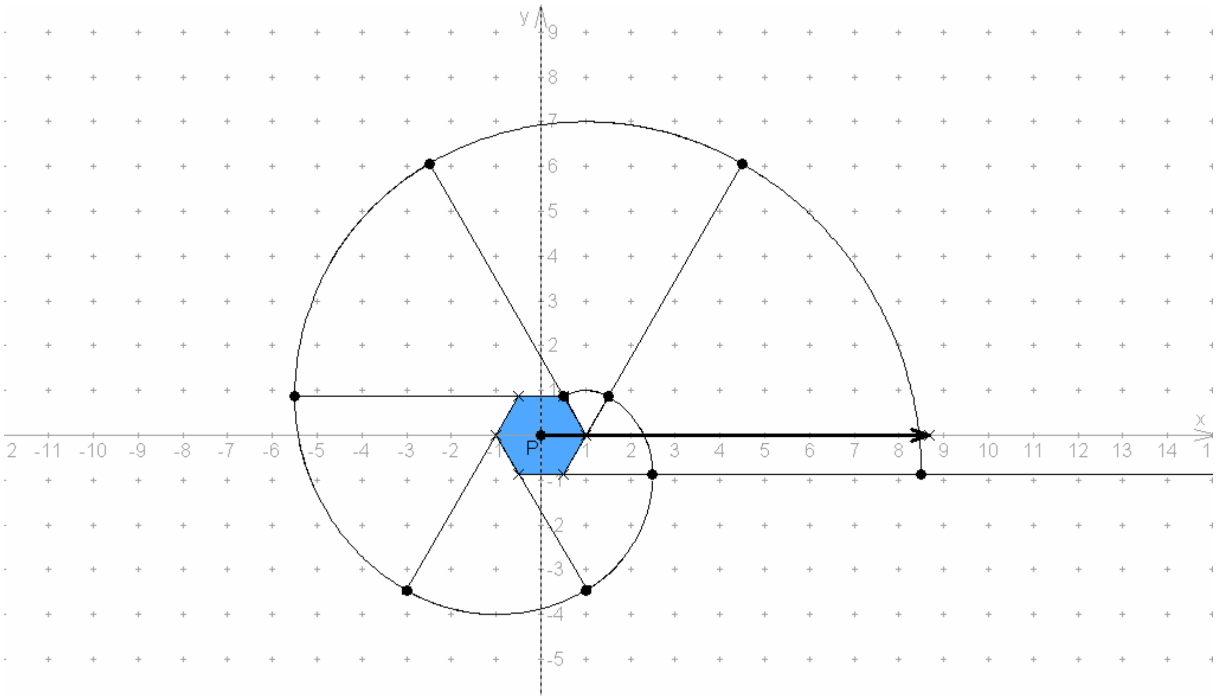

Abb. 12

Die Gleichung der Spirale lautet $\boxed{r = 6/360 * phi}$.

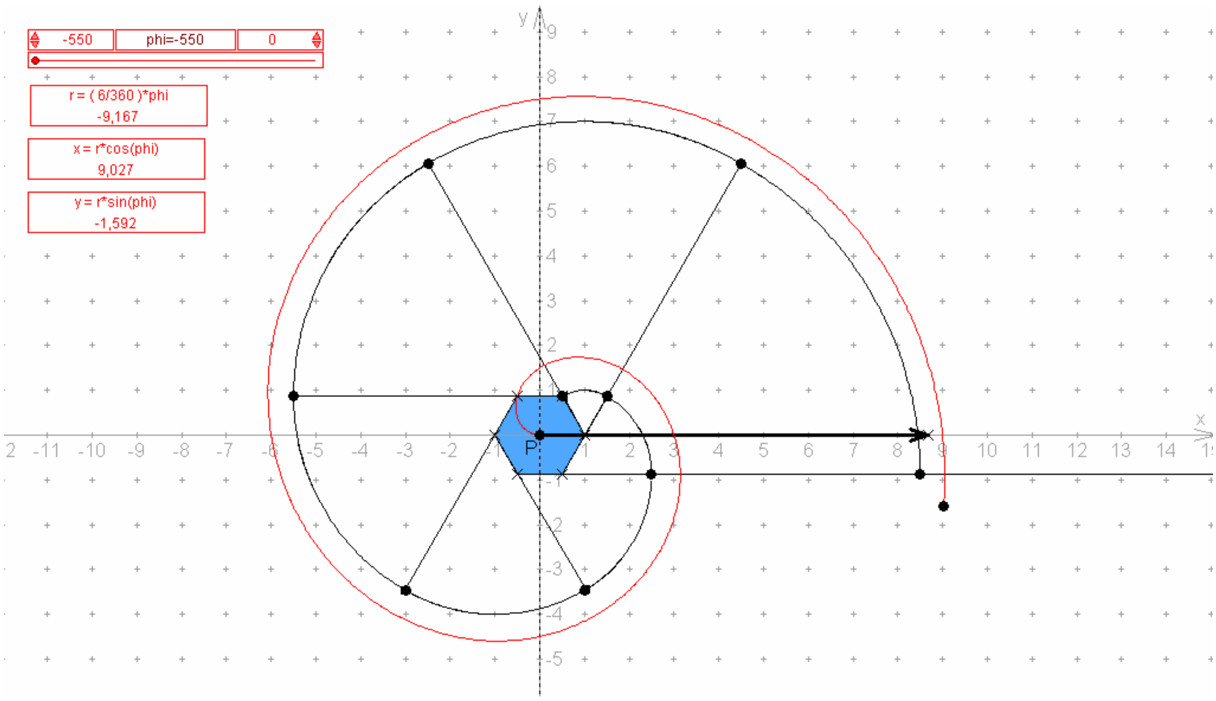


Abb. 13

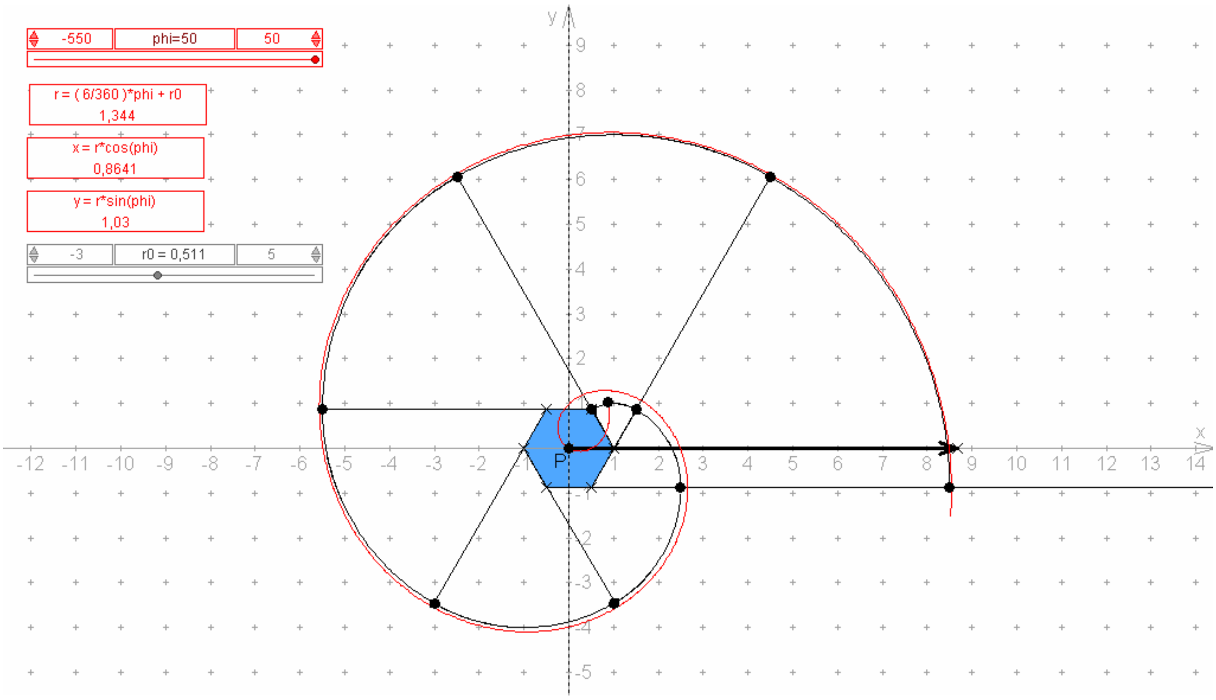


Abb. 14

Offensichtlich decken sich die beiden Kurven noch besser als bei der Quadrat-Konstruktion. Eine weitere Beobachtung ergibt, dass die Ungenauigkeit sich umso mehr verstärkt je näher man die Kurven in der Nähe des Pols der Spirale untersucht. Auch kann dieser bei den Zirkelkonstruktionen nicht erreicht werden, weil die Kurve jeweils im N-Eck endet.

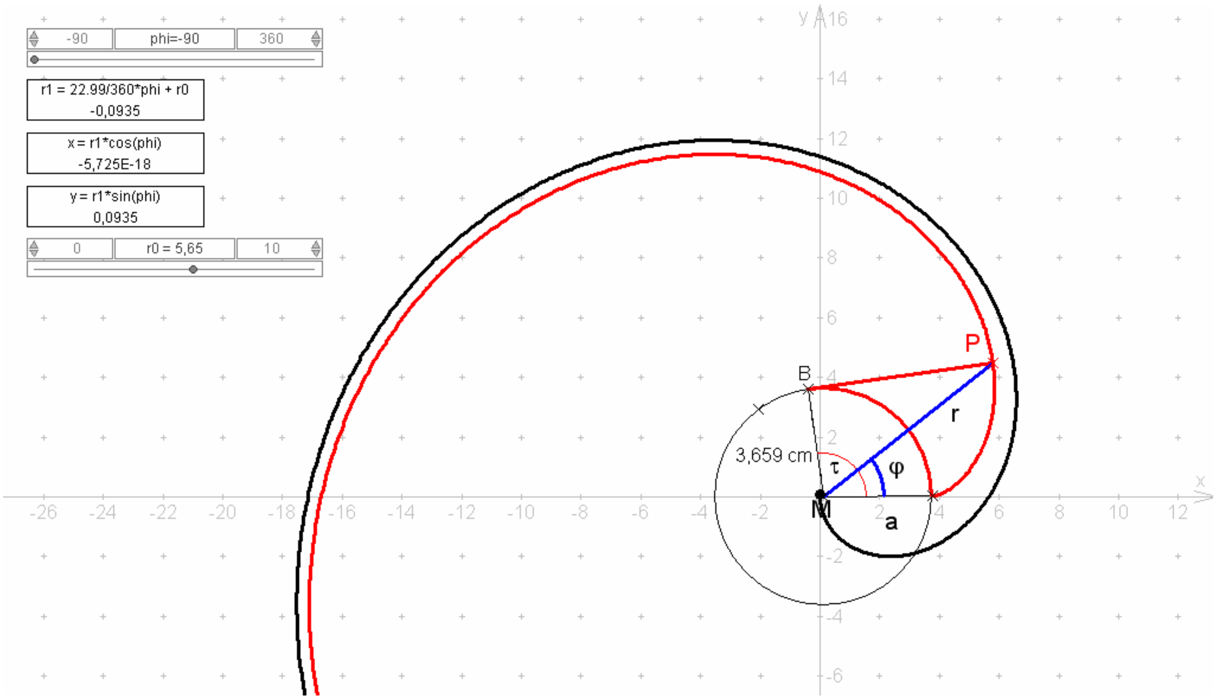


Abb. 15

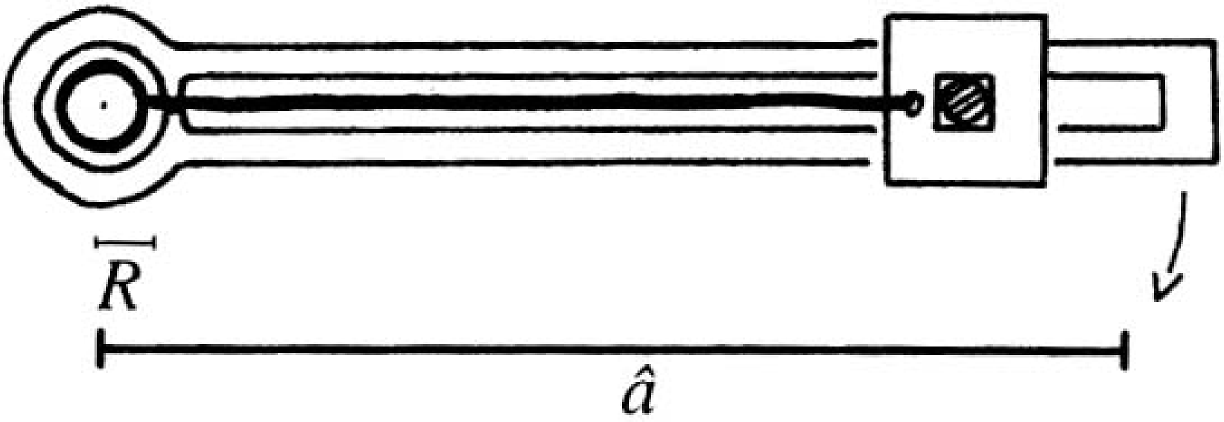


Abb. 16

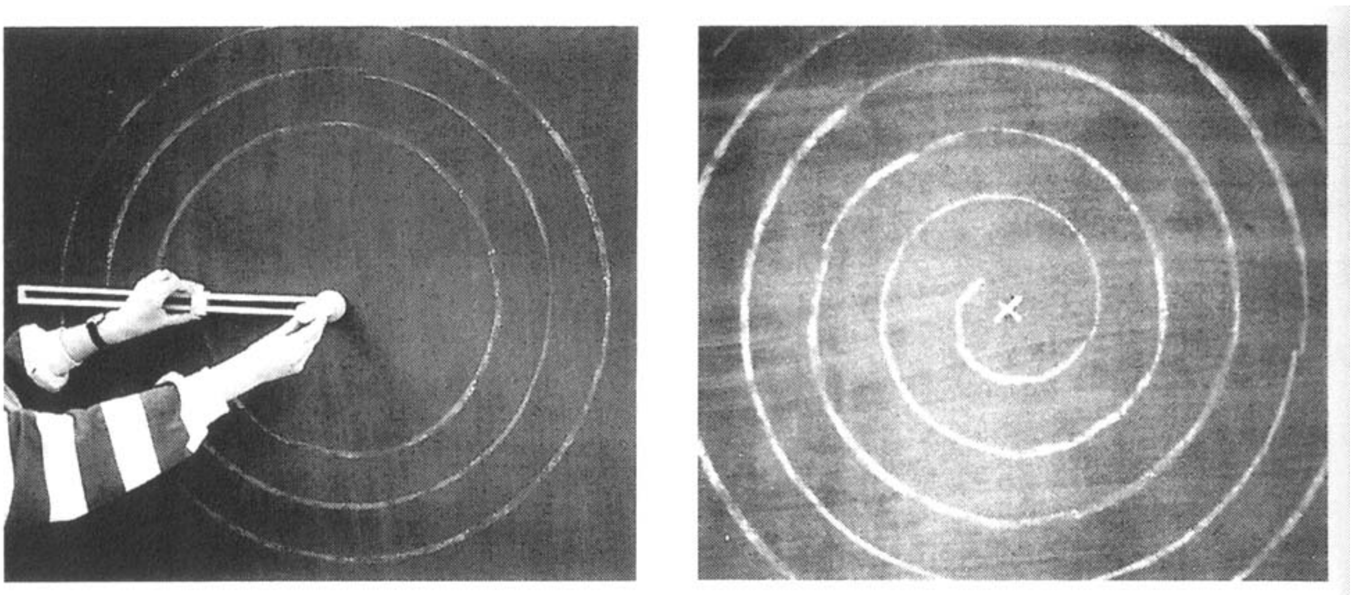

Abb. 17

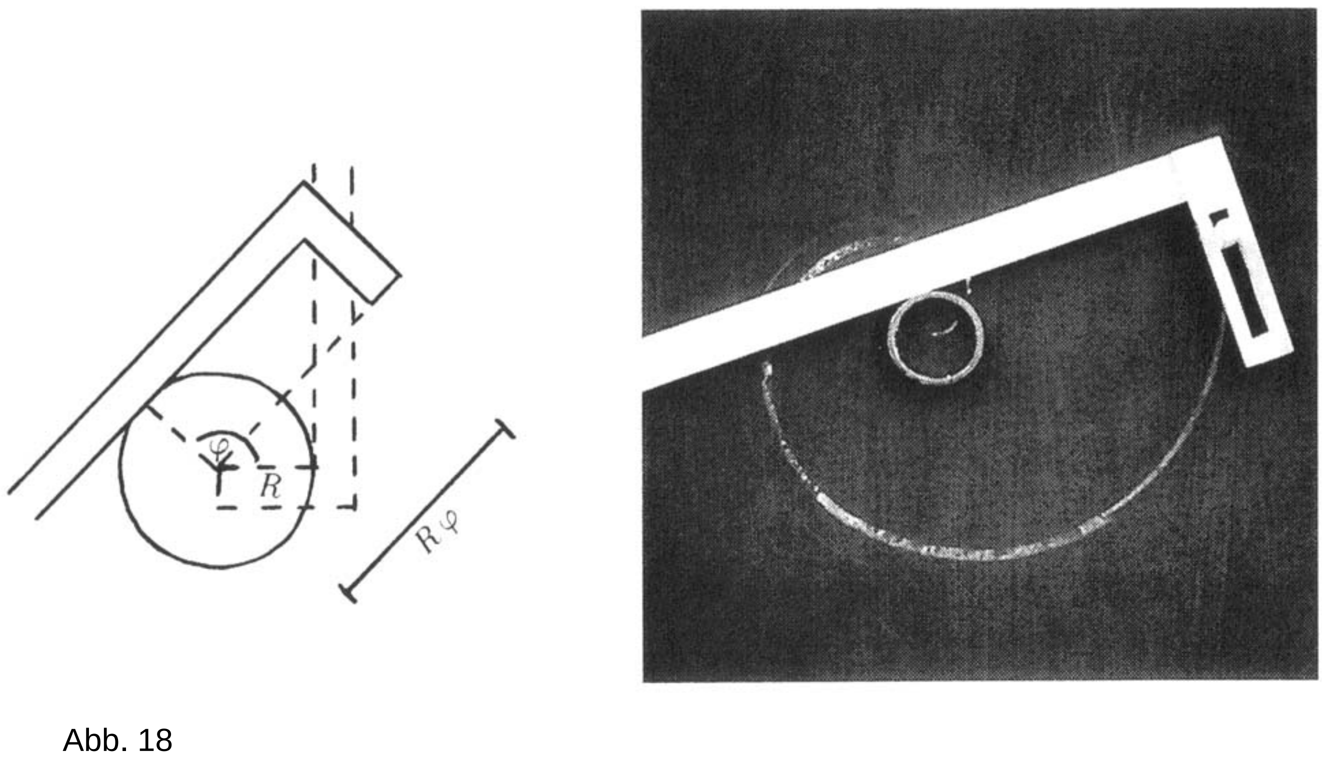


Abb. 18

Da sich die Qualität der Kurve immer weiter verbessert je mehr Ecken das N-Eck besitzt, mit dem die Zirkelkonstruktion vollbracht wird, liegt es nahe daraus zu schließen, dass das ideale Objekt, um archimedische Spiralen mit dem Zirkel zu konstruieren, der Kreis ist (siehe Abb. 15).
Das einzige Problem stellt bei einer Versuchsanordnung, wie sie in Abb. 15 dargestellt wird, die Tatsache dar, dass beim Abrollen eines Seiles von einem runden Pfahl, so wie es dort erfolgt, das Seil tangential vom Pfahl läuft. Idealerweise würde es aber radial, immer in die selbe Richtung, abgewickelt werden. Kann man dieses Problem umgehen, dann ist es möglich archimedische Spiralen zeichnerisch herzustellen:

Abb. 16, Abb. 17 und Abb. 18 zeigen Vorrichtungen für Zeichengeräte, mit denen sich archimedische Spiralen zeichnen lassen.
Die wohl am meisten vollendete dieser drei Vorrichtungen ist auf Abb. 16 zu sehen ist:
Ein Seil ist dort um einen runden Pflock gewickelt und soll in möglichst konstanter Bewegung abgewickelt werden. Auch soll der Hebel in konstanter Geschwindigkeit in Pfeilrichtung bewegt werden. Das Problem, das in Abb. 14 auftrat wird hier umgangen, indem das Seil durch die Vorrichtung radial heraus läuft.
Die beiden anderen Vorrichtungen funktionieren auf ähnliche, jedoch etwas schlichtere Art und Weise.

Zusammenfassung:
Es besteht durch zweierlei Arten die Möglichkeit sich zeichnerisch den archimedischen Spiralen anzunähern:
1. Durch punktweise exakte Konstruktion.
2. Indem man mit dem Zirkel durchgängige Linien zeichnet, wobei deren Radius sprungweise verkürzt wird und auch das Zentrum sich sprungweise verändert.

Mit geeigneten Vorrichtungen ist es möglich archimedische Spiralen, durch ideale Vorgehensweise, für das bloße Auge so gut wie exakt zu zeichnen.