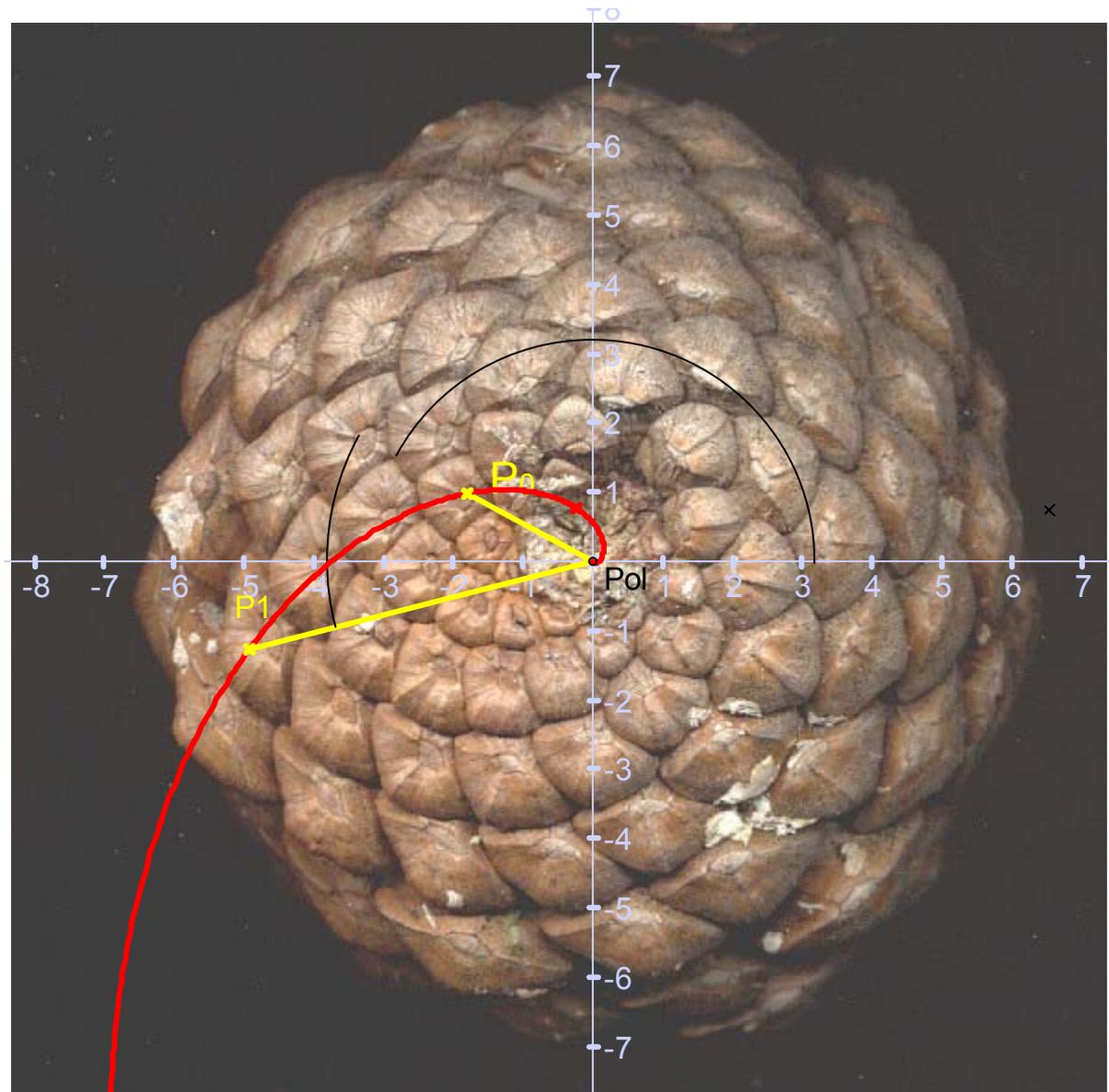


## Zapfenspiralen

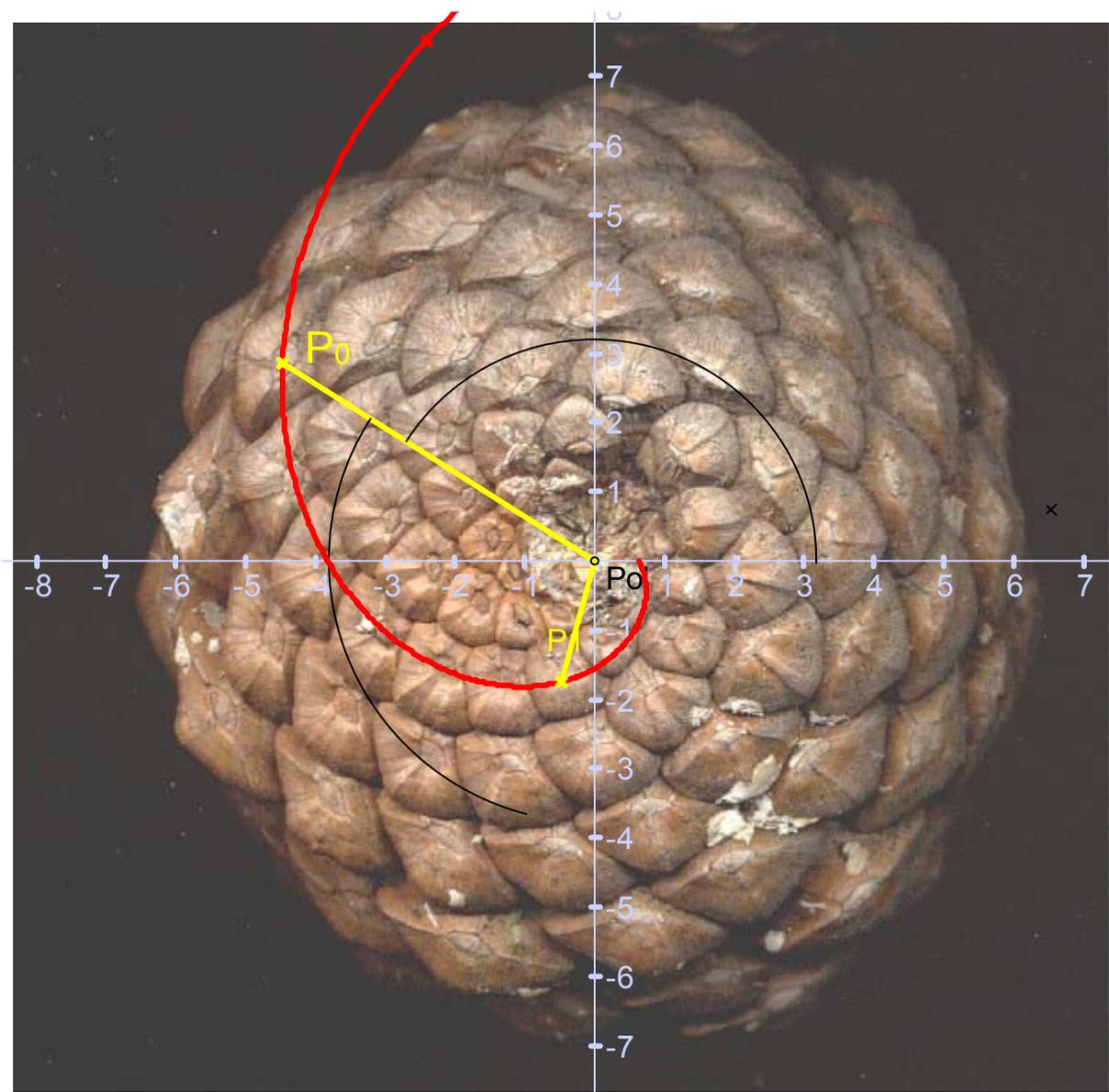
Frage: Sind die vom Auge wahrgenommenen Spiralen als archimedische oder als logarithmische Spiralen zu modellieren?

Untersuchung in Dynageo:

Durch zwei bewegliche Punkte  $P_0$  und  $P_1$  wird eine logarithmische Spirale gelegt und versucht, die Schuppenspiralen damit anzunähern.



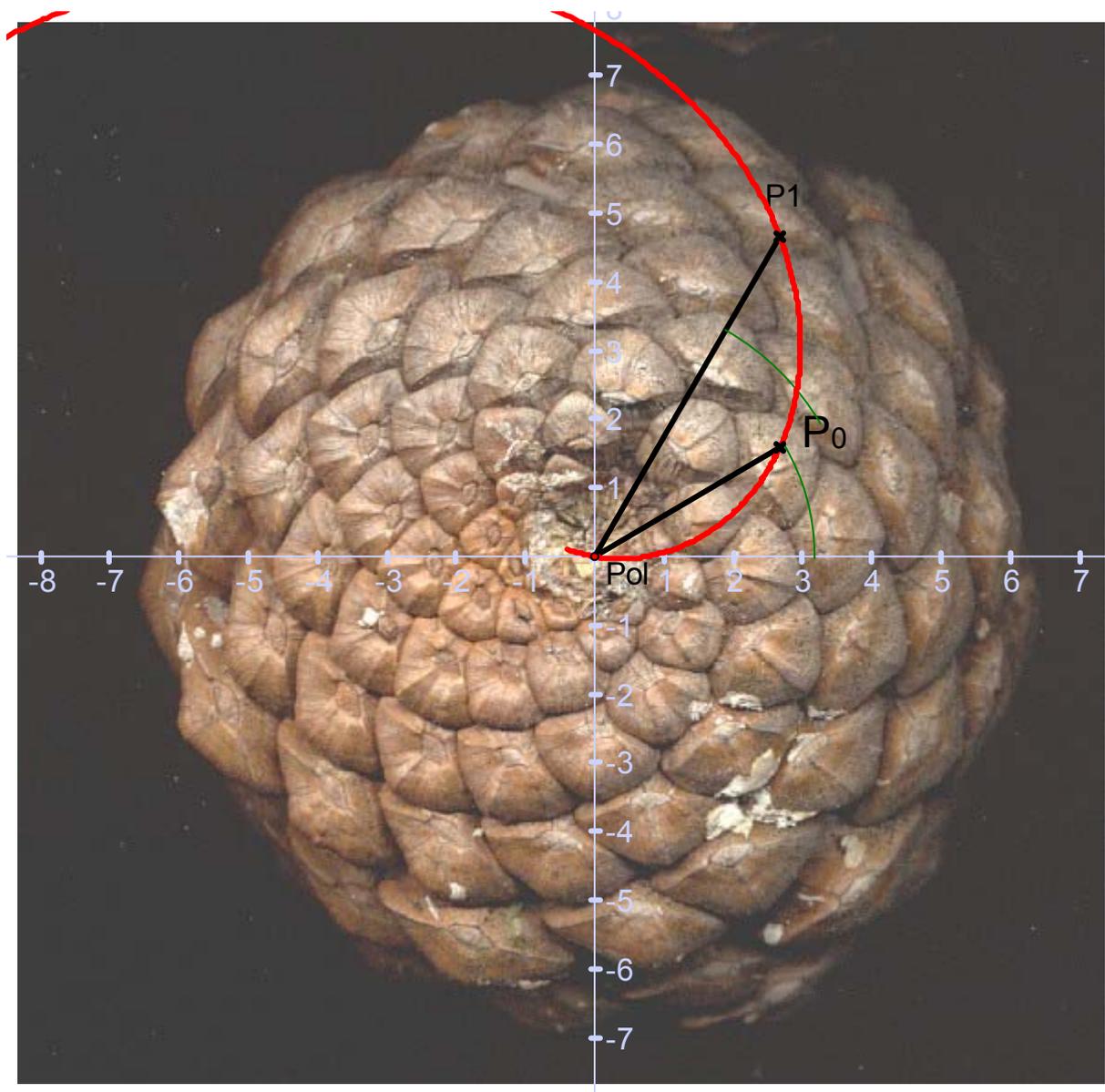
Datei: Spiralen-Zapfen1-Logarithmisch.geo



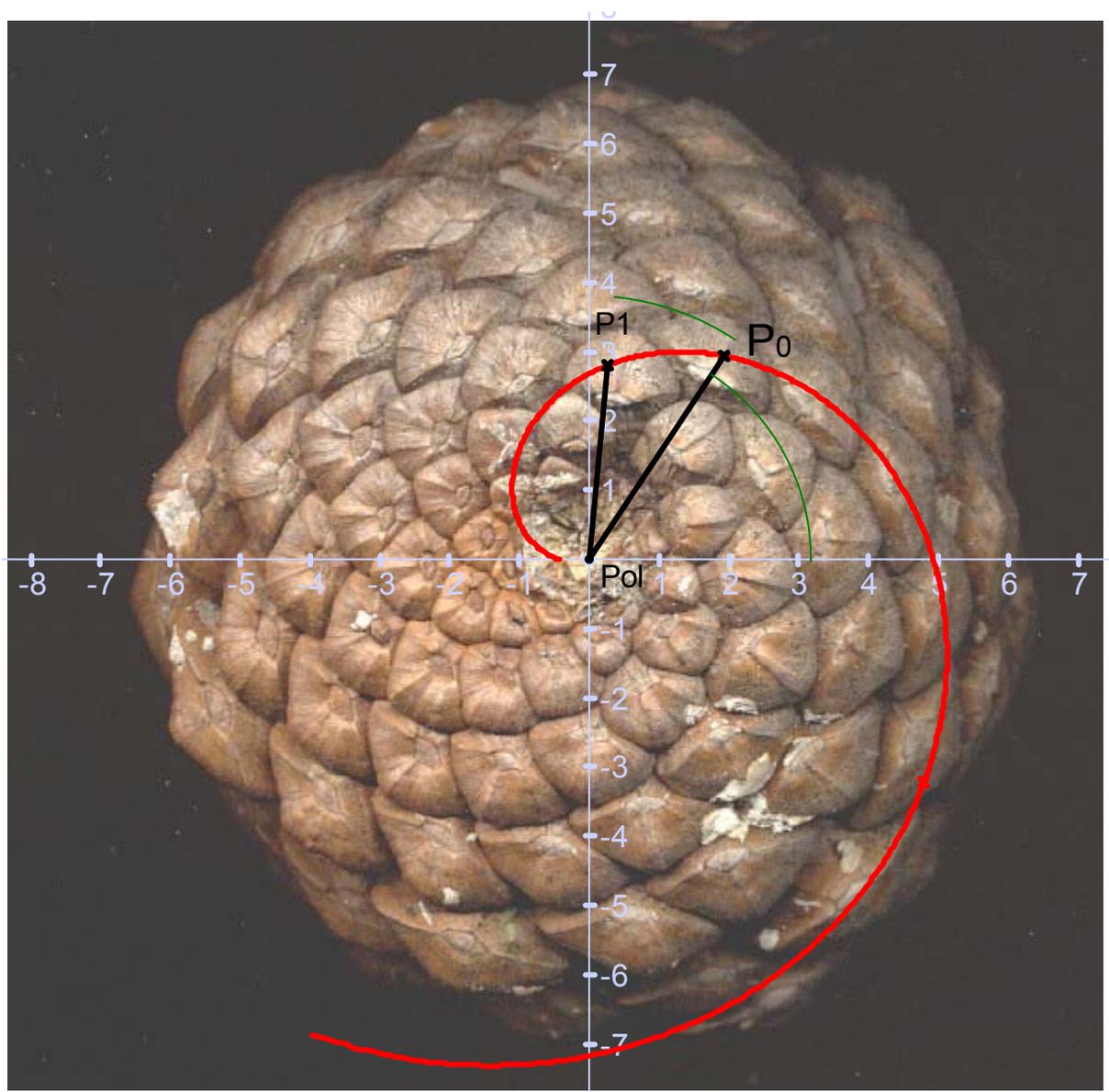
Datei: Spiralen-Zapfen2-Logarithmisch.geo

Die Anzahl der Spiralen im 1. System beträgt 13, im 2. System 8.

Jetzt der Versuch, die Spiralen durch archimedische Spiralen zu beschreiben:



Datei: Spirale-Zapfen1-Archimedisch.geo



Datei: Spirale-Zapfen2-Archimedisch.geo

**Problem:**

Durch zwei Punkte  $P_0$  und  $P_1$  sollen logarithmische und archimedische Spiralen mit dem Pol  $O(0/0)$  gelegt werden, so dass wie üblich die Punkte  $P_0$  und  $P_1$  unmittelbar hintereinander durchlaufen werden.

- a) Zunächst soll die Polarachse durch  $P_0$  verlaufen, der Winkel zwischen  $P_0$  und  $P_1$  soll  $\delta$  sein. (→ Abbildung 1).

Geben Sie mit Hilfe der in DynaGeo leicht messbaren Größen  $r_0 = \overline{Pol P_0} = d(Pol, P_0)$ ,

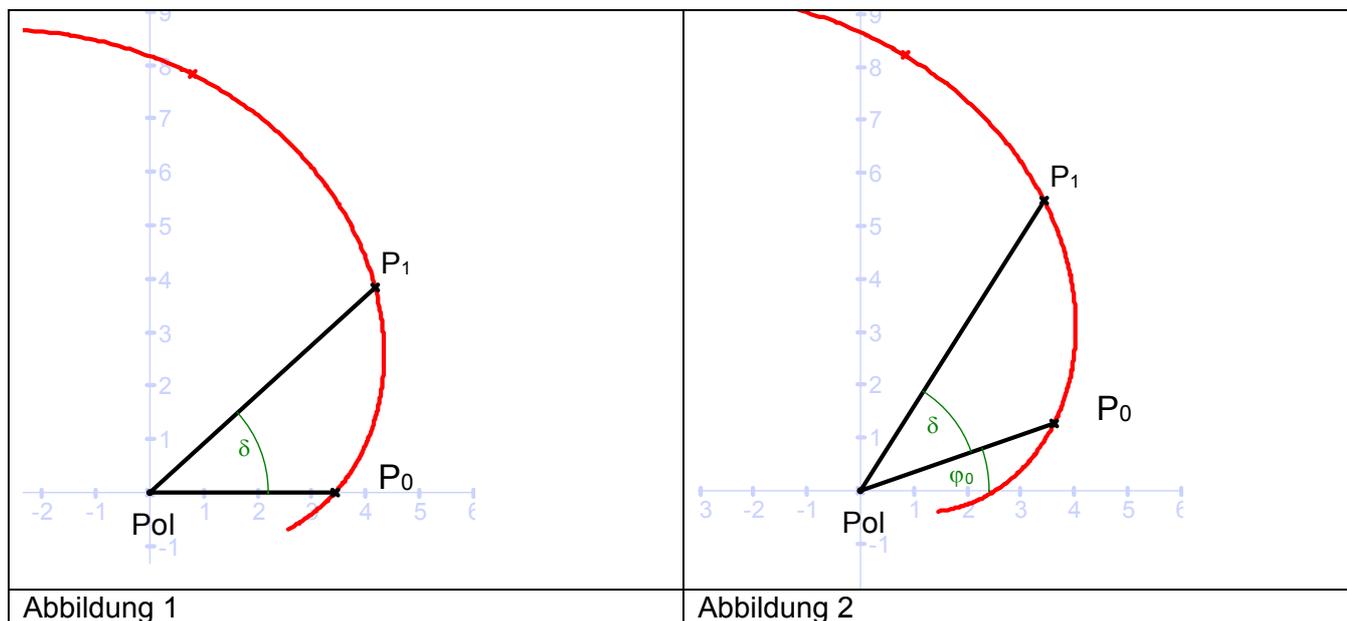
$r_1 = \overline{Pol P_1} = d(Pol, P_1)$  und dem Winkel  $\delta = \angle P_0 Pol P_1 = w(P_0; Pol; P_1)$  die Gleichungen für die logarithmische und die archimedische Spirale durch  $P_0$  und  $P_1$  an.

- b) Jetzt soll die Polarachse die positive x-Achse sein. Der Winkel zwischen  $P_0$  und  $P_1$  soll noch immer  $\delta$  sein,  $P_0$  liegt jetzt aber nicht mehr auf der Polarachse (→ Abbildung 2).

Der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke  $\overline{Pol P_0}$  wird mit  $\varphi_0$  bezeichnet.

Dieser Fall tritt ein, wenn man dem Koordinatensystem ein Bild unterlegt, das durch Spiralen modelliert werden soll. DynaGeo lässt wie fast alle Graphiksysteme nur die x-Achse unmittelbar als Polarachse zu.

Geben Sie auch für diesen Fall die Gleichungen für die logarithmische und die archimedische Spirale durch  $P_0$  und  $P_1$  an.



Damit kann man in DynaGeo versuchen, reale Objekte durch Spiralen zu modellieren. Ein Bild wird dem Koordinatensystem als Hintergrund unterlegt und so verschoben, dass der geschätzte Pol im Zentrum des Koordinatensystems liegt. Man konstruiert zwei freie Punkte  $P_0$  und  $P_1$ , misst die entsprechenden Längen und Winkel zum Pol in  $O(0/0)$  und lässt einen weiteren Punkt  $P$  die Spirale durch  $P_0$  und  $P_1$  als Ortslinie erzeugen. Durch Variation der Punkte  $P_0$  und  $P_1$  kann die Spirale der Vorlage angepasst werden. Wie gut das jeweilige Modell (logarithmische Spirale, archimedische Spirale oder andere Spirale) die Realität beschreibt ist hier eine Frage der Einschätzung, es steht kein quantitatives, berechenbares Kriterium für die Güte der Annäherung zur Verfügung.

Gleichungen:

a) Archimedisch

$$d = r_1 - r_0$$

$$r = r_0 + d \cdot \frac{\varphi}{\delta} = r_0 + d \cdot (\varphi / \delta)$$

Logarithmisch

$$q = r_1 / r_0$$

$$r = r_0 \cdot q^{\frac{\varphi}{\delta}} = r_0 \cdot q^{(\varphi / \delta)}$$

b) Archimedisch

$$d = r_1 - r_0$$

$$r = r_0 + d \cdot \frac{\varphi - \varphi_0}{\delta} = r_0 + d \cdot (\varphi - \varphi_0) / \delta$$

Logarithmisch

$$q = r_1 / r_0$$

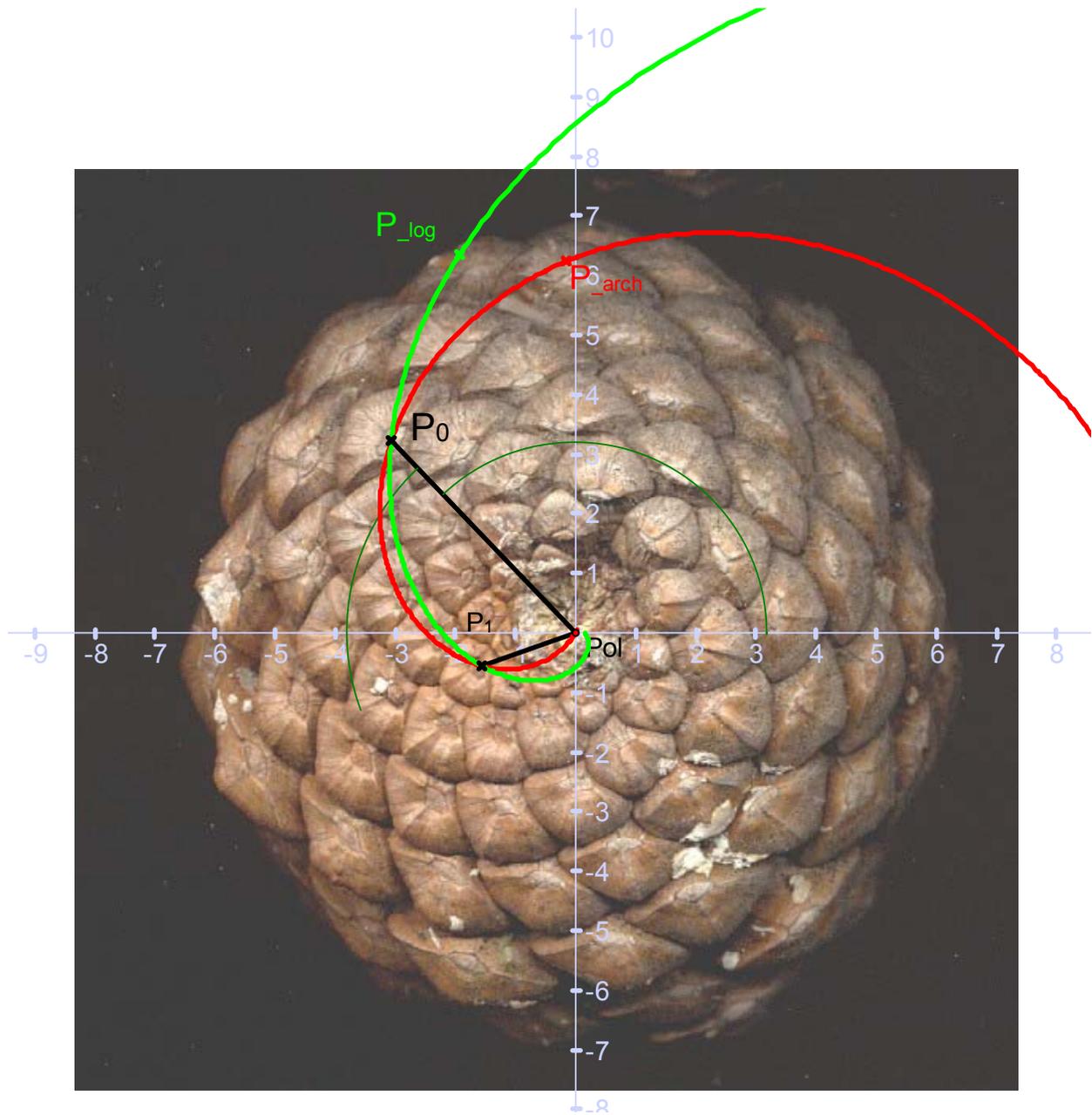
$$r = r_0 \cdot q^{\frac{\varphi - \varphi_0}{\delta}} = r_0 \cdot q^{((\varphi - \varphi_0) / \delta)}$$

Die letzte Form der Terme ist die in DynaGeo zu verwendende.

Ein Beispiel für die Umsetzung in DynaGeo (wobei der Punkt P mit den Koordinaten P(x,y) die Spirale als Ortslinie zeichnet, hier eine archimedische Spirale):

-15	phi=158	300
●		
r0 = d(P0;Pol)		
5.228		
r1 = d(P1;Pol)		
2.577		
phi0 = w(P2;Pol;P0)		
148.2		
delta = w(P0;Pol;P1)		
67.57		
d = r1 - r0		
-2.65		
q = r1/r0 {Für logarithmische Spiralen}		
0.493		
r = r0 + d*( ( phi - phi0 )/delta )		
4.853		
x = r*cos(phi)		
-4.493		
y = r*sin(phi)		
1.834		

Vergleich von zwei Spiraltypen in einem Bild:



Datei: Spirale-Zapfen1a-Archimedisch+Logarithmisch.geo