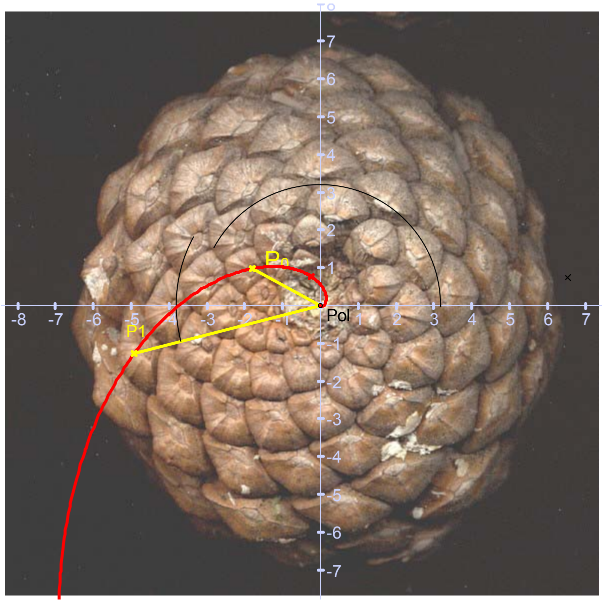
Zapfenspiralen

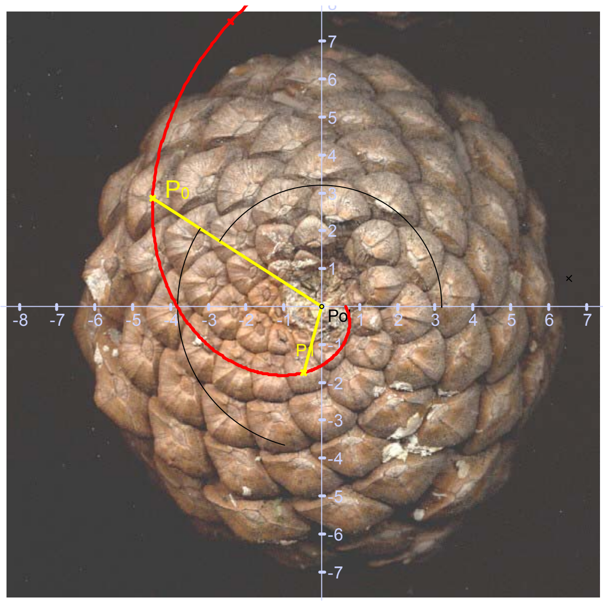
Frage: Sind die vom Auge wahrgenommenen Spiralen als archimedische oder als logarithmische Spiralen zu modellieren?

Untersuchung in Dynageo:

Durch zwei bewegliche Punkte P_0 und P_1 wird eine logarithmische Spirale gelegt und versucht, die Schuppenspiralen damit anzunähern.



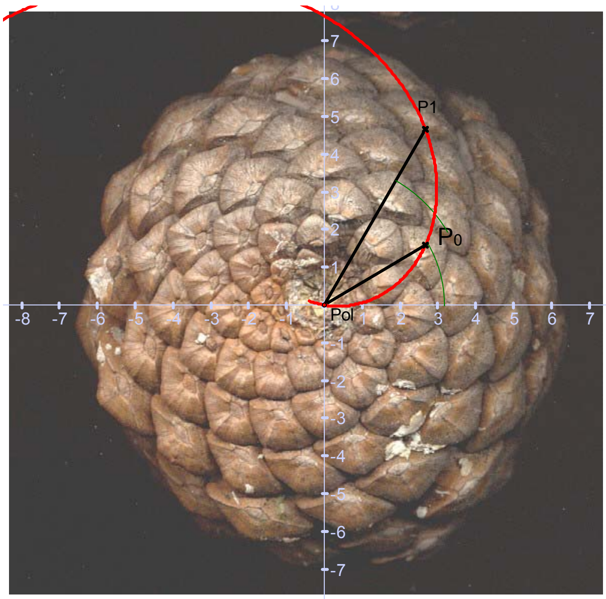
Datei: Spiralen-Zapfen1-Logarithmisch.geo



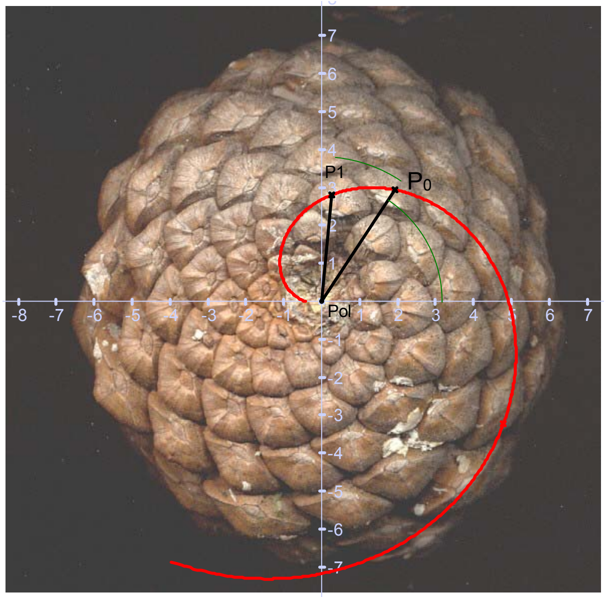
Datei: Spiralen-Zapfen2-Logarithmisch.geo

Die Anzahl der Spiralen im 1.System beträgt 13, im 2.System 8.

Jetzt der Versuch, die Spiralen durch archimedische Spiralen zu beschreiben:



Datei: Spirale-Zapfen1-Archimedisch.geo



Datei: Spirale-Zapfen2-Archimedisch.geo

Problem:

Durch zwei Punkte P_0 und P_1 sollen logarithmische und archimedische Spiralen mit dem Pol O(0/0) gelegt werden, so dass wie üblich die Punkte P_0 und P_1 unmittelbar hintereinander durchlaufen werden.

a) Zunächst soll die Polarachse durch P_0 verlaufen, der Winkel zwischen P_0 und P_1 soll δ sein. (→ Abbildung 1).

Geben Sie mit Hilfe der in DynaGeo leicht messbaren Größen $r_0 = \overline{Pol\ P_0} = d(Pol, P_0)$, $r_1 = \overline{Pol\ P_1} = d(Pol, P_1)$ und dem Winkel $\delta = \angle P_0\ Pol\ P_1 = w(P_0; Pol; P_1)$ die Gleichungen für die logarithmische und die archimedische Spirale durch P_0 und P_1 an.

b) Jetzt soll die Polarachse die positive x-Achse sein. Der Winkel zwischen P_0 und P_1 soll noch immer δ sein, P_0 liegt jetzt aber nicht mehr auf der Polarachse (→ Abbildung 2).
Der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke $\overline{Pol\ P_0}$ wird mit φ_0 bezeichnet.

Dieser Fall tritt ein, wenn man dem Koordinatensystem ein Bild unterlegt, das durch Spiralenmodelliert werden soll. DynaGeo lässt wie fast alle Graphiksysteme nur die x-Achse unmittelbar als Polarachse zu.

Geben Sie auch für diesen Fall die Gleichungen für die logarithmische und die archimedische Spirale durch P_0 und P_1 an.

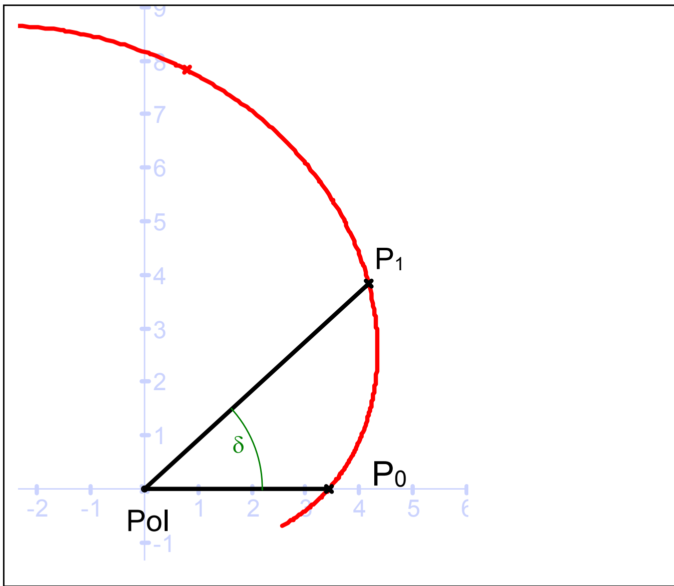


Abbildung 1

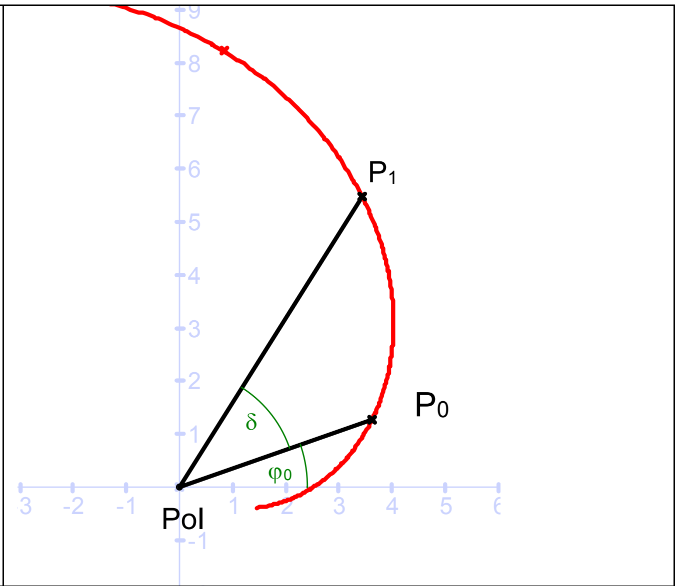


Abbildung 2

Damit kann man in DynaGeo versuchen, reale Objekte durch Spiralen zu modellieren. Ein Bild wird dem Koordinatensystem als Hintergrund unterlegt und so verschoben, dass der geschätzte Pol im Zentrum des Koordinatensystems liegt. Man konstruiert zwei freie Punkte P_0 und P_1, misst die entsprechenden Längen und Winkel zum Pol in O(0/0) und lässt einen weiteren Punkt P die Spirale durch P_0 und P_1 als Ortslinie erzeugen. Durch Variation der Punkte P_0 und P_1 kann die Spirale der Vorlage angepasst werden. Wie gut das jeweilige Modell (logarithmische Spirale, archimedische Spirale oder andere Spirale) die Realität beschreibt ist hier eine Frage der Einschätzung, es steht kein quantitatives, berechenbares Kriterium für die Güte der Annäherung zur Verfügung.

Gleichungen:

a) Archimedisch

$d = r_1 - r_0$

$r = r_0 + d \cdot \frac{\varphi}{\delta}$ = $r_0 + d * (\varphi / \delta)$

Logarithmisch

$q = r_1 / r_0$

$r = r_0 \cdot q^{\frac{\varphi}{\delta}}$ = r_0 * q^(φ / δ)

b) Archimedisch

$d = r_1 - r_0$

$r = r_0 + d \cdot \frac{\varphi - \varphi_0}{\delta}$ = r_0 + d* (φ – φ_0) / δ

Logarithmisch

$q = r_1 / r_0$

$r = r_0 \cdot q^{\frac{\varphi - \varphi_0}{\delta}}$ = r_0 * q^((φ – φ_0) / δ)

Die letzte Form der Terme ist die in DynaGeo zu verwendende.

Ein Beispiel für die Umsetzung in DynaGeo (wobei der Punkt P mit den Koordinaten P(x,y) die Spirale als Ortslinie zeichnet, hier eine archimedische Spirale):

-15 | phi=158 | 300

r0 = d(P0;Pol)
5.228

r1 = d(P1;Pol)
2.577

phi0 = w(P2;Pol;P0)
148.2

delta = w(P0;Pol;P1)
67.57

d = r1 - r0
-2.65

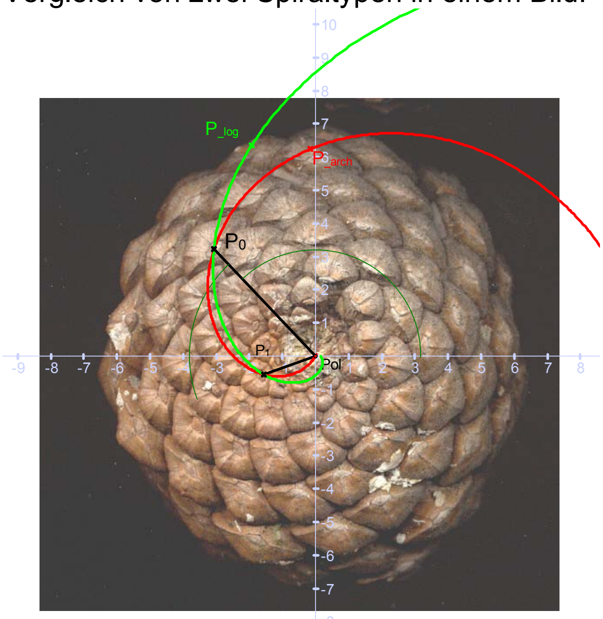
q = r1/r0 {Für logarithmische Spiralen}
0.493

r = r0 + d*((phi - phi0)/delta)
4.853

x = r*cos(phi)
-4.493

y = r*sin(phi)
1.834

Vergleich von zwei Spiraltypen in einem Bild:



Datei:
Spirale-Zapfen1a-Archimedisch+Logarithmisch.geo