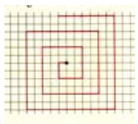
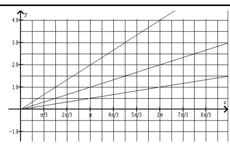
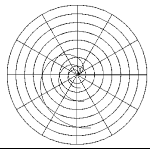
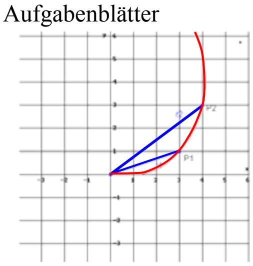
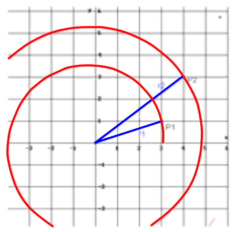
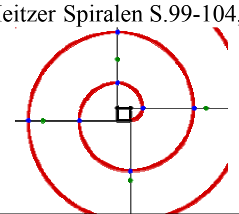
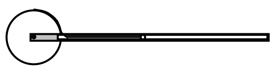
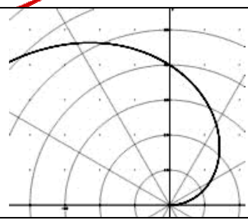
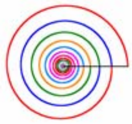
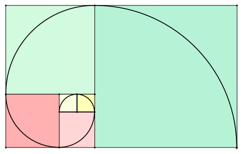
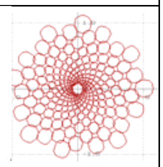
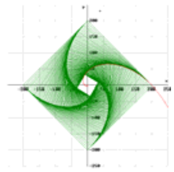
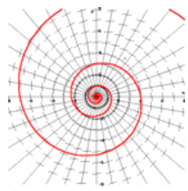
Themen im Seminar über Spiralen WS05/06

Grundlage aus der Literatur:
Heitzer, J., Spiralen, ein Kapitel phänomenaler Mathematik; Klett, Stuttgart 1998.
Ellenbracht, F., Langenbruch, B., Architektur des Lebens, Cornelsen 2003

Nr.	Themen	Beschreibung, Literatur
1	Koordinatensysteme, Polarkoordinaten / Bogenmaß Funktionen in kartesischen und Polar-Koordinaten Funktionen in Euklid in Polarkoordinaten zum Modellieren von Spiralen	Aufgabenblätter
2	Ausmessen und Beschreiben von Spiralen: Funktionen in kartesischen und Polar-Koordinaten     	Kopien diverser Spiralen: Schnur, Nautilus, Zapfen, Rechtecksspirale (Klett), Spiralklee. Polarkoordinaten; Pol, Polarachse und Anfangspunkt „geeignet“ wählen, φ-r-Wertetabelle aufnehmen und Graph zeichnen. Hausaufgabe: Daten in Polarkoordinaten zur Kontrolle darstellen.
3	Exponentialfunktionen: Basis q beliebig, Umrechnung auf Basis e Wachstum: Linear und exponentiell; quadratisches Wachstum	Aufgabenblätter
4	Spiralen: Definition als streng monotone Funktionen im kartesischen φ-r-Koordinatensystem Beispiele zu archimedischen Spiralen	 
5	Archimedische Spirale Gleichung bezüglich Pol P(0/0), Polarachse y=0 durch zwei beliebige Punkte P_1, P_2. Eigenschaften, Punktweise Konstruktion einer „dichten Menge von Punkten“ mit Zirkel und Lineal aus Pol und 2 Punkten Ähnlichkeit aller archimedischen Spiralen untereinander: Bis auf Ähnlichkeit gibt es nur eine archimedische Spirale (analog zu Kreisen)	Aufgabenblätter  
6	Archimedische Spirale Kontinuierliche Approximation durch Kreisbögen: Wickelkurven zu n-Ecken und Kreis („Ziege am Pflock“) Spiralenzirkel	Heitzer Spiralen S.99-104, Eigene Unterlagen  
7	Archimedische Spirale als Winkelteiler (3-Teilung von Winkeln mit Zirkel, Lineal und einer archimedischen Spirale)	
8	Logarithmische Spirale Definition und Eigenschaften, Aufstellen der Gleichung bei gegebenem Pol und zwei Spiralpunkten, Polarachse wählbar Selbstähnlichkeit der logarithmischen Spirale Punktweise Konstruktion einer „dichten Menge von Punkten“ mit Zirkel und Lineal aus Pol und 2 Punkten, analog zur Konstruktion bei archimedischen Spiralen. Arithmetisches und geometrisches Mittel.	Gleichung der Form $r = r_1 \cdot q^{\frac{\varphi}{\alpha}}$ mit $q = \frac{r_2}{r_1}$ und Winkel α zwischen r_1 und r_2. Gleichung auch in der Form $r = r_1 \cdot e^{k\varphi}$

9	Logarithmische Spirale Begründung der Endlichkeit der Spirallänge logarithmischer Spiralen mit Hilfe der Selbstähnlichkeit (als Vielfaches einer Windung) Geometrische Folgen und Reihen, Konvergenz, Grenzwert	Spiralen S.126-128 Heitzer, auch S132-133 
10	Goldener Schnitt, goldene Spirale Fibonacci-Zahlen u. Zusammenhang mit der goldenen Spirale Kontinuierliche Annäherung einer logarithmischen Spirale durch Kreisbögen	Spiralen S.135-139 Heitzer S.141-141 
11	Spiralen in der Natur Erklärung der Spiralen bei Sonnenblumen, genetische Spirale Divergenzwinkel (Fibonacci-Zahlen)	Phyllotaxis, Sonnenblumen und der goldene Winkel. Musterbildung in der…, (aus: Architektur des Lebens, Cornelsen 2003)  
12	Verfolgungskurven: 4 Hunde auf den Ecken eines Quadrates, die sich reihum verfolgen, Verallgemeinerung auf n Hunde	Spiralen S.132-133 Heitzer, Eigene Unterlagen; logarithmische Näherungskuven für die Hundekurven, Begründung mit Ähnlichkeitssätzen, Gleichung für die Näherungskurven, Grenzkurve als Kurve mit konstantem Tangentenwinkel 45° (bei 4 Hunden) 
13	Spiralen mit konstantem Tangentenwinkel (zu Zentralstrahlen): Richtungsfeld, Approximation durch Streckenzüge, Punkte auf logarithmischen Spiralen. Berechnung des Tangentenwinkels mit Hilfe der Differentialrechnung Anwendung: Konstanz des Tangentenwinkels bei logarithmischen Spiralen Tangentenwinkel bei archimedischen Spiralen geht gegen 0 $\tan(\alpha) \approx \frac{\Delta r}{b} = \frac{\Delta r}{r \cdot \Delta\varphi} \xrightarrow[\Delta\varphi \to 0]{} \frac{1}{r} \cdot r'$ Für $r = r_0 \cdot e^{k\varphi}$ ist $\tan(\alpha) = \frac{1}{r} \cdot k \cdot r = k$	 $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{1}{r} \cdot r'}$