Punkte

# Klausur zum Hauptseminar über Spiralen

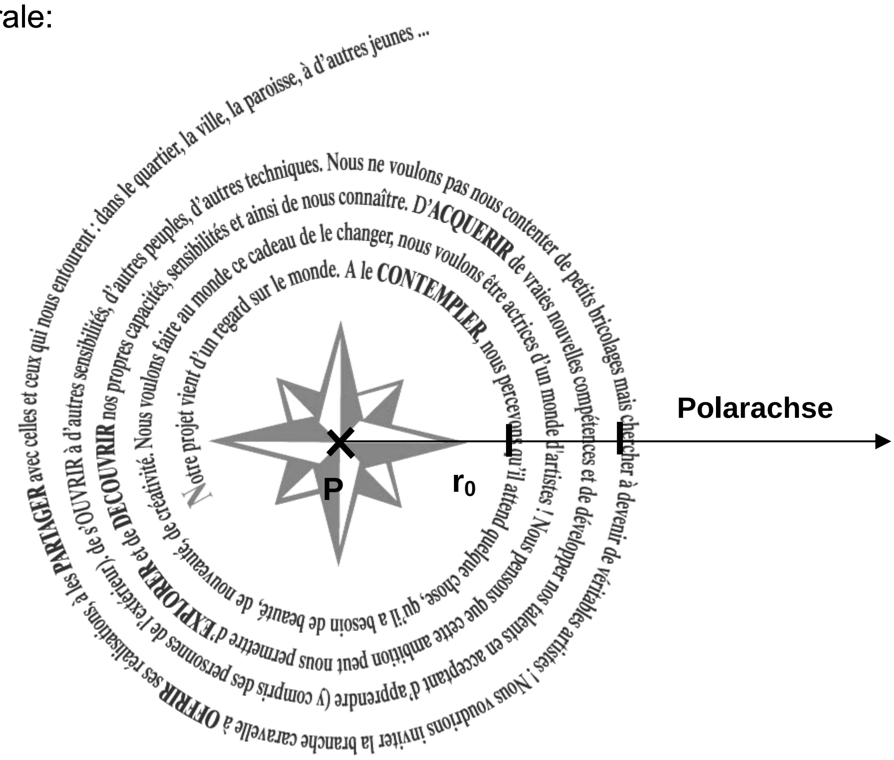
Maximum 42 Punkte, ausreichend 16 Punkte

**A**

Zugelassene und benötigte Hilfsmittel: Geodreieck, Taschenrechner, Zeichengerät.
Nicht zugelassen: Formelsammlung.

5

1. Gegeben ist die folgende Spirale:




Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie für dieses System die Gleichung der Spirale an

(a) für Winkel im Gradmaß,

(b) für Winkel im Bogenmaß.

Sie dürfen alles mit dem Geodreieck messen, was Sie brauchen.
Die Herleitung der Gleichungen muss nachvollziehbar sein (z.B. durch Bezeichnung von Punkten und Strecken in der Zeichnung).

Die Spirale soll die Linie sein, auf der die Buchstaben ohne Unterlänge liegen. Das ist eine archimedische Spirale, da die Abnahme pro Umlauf nahezu konstant ist.

(a) Abnahme pro Umlauf für größere Messgenauigkeit über 3 Umläufe gemittelt:

$a = -\frac{1{,}5cm}{3 \cdot 360°} = -\frac{0{,}5cm}{360°} = -0{,}00139\frac{cm}{°}$ , $r_0$=2,2cm

$r = -\frac{0{,}5cm}{360°} \cdot \varphi + 2{,}2cm$ bzw. $r = -0{,}00139\frac{cm}{°} \cdot \varphi + 2{,}2cm$

(b) $a = -\frac{0{,}5cm}{2\pi} = -0{,}0{,}0796cm$ , $r_0$=2,2cm

$r = -\frac{0{,}5cm}{2\pi} \cdot \varphi + 2{,}2cm$ bzw. $r = -0{,}0796cm \cdot \varphi + 2{,}2cm$

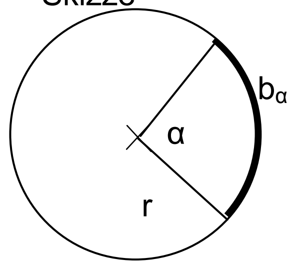
3 2. K ist ein Kreis mit Radius r = 2 cm.

(a) Berechnen Sie zu $\alpha = 40°$ die Länge des zugehörigen Kreisbogens $b_\alpha$.

(b) Berechnen Sie zu $\varphi = 1{,}5$ (Bogenmaß) die Länge des zugehörigen Kreisbogens $b_\varphi$.

(a) $\dfrac{b_\alpha}{2\pi r} = \dfrac{\alpha}{360°}$ $\qquad$ $b_{40°} = \dfrac{40°}{360°} 2\pi \cdot 2cm = 1{,}40cm$

Skizze




(b) $b_\varphi = r \cdot \varphi = 2cm \cdot 1{,}5 = 3cm$

6 3. In DynaGeo soll eine Spirale mit dem Pol O(0/0) als Ortslinie gezeichnet werden.

Die Gleichung lautet für Winkel im Gradmaß: $\quad r = 0{,}03\ \varphi^2$ (ohne Einheiten).

Sie haben ein *Zahlobjekt* mit Namen t erzeugt, das den Bereich von 0 bis 540 durchläuft.

(a) Geben Sie in Stichworten an, was Sie tun müssen, um die Spirale zeichnen zu lassen (die verwandten Bezeichnungen für Rechenausdrücke sollen so geschrieben werden, wie das in DynaGeo nötig ist).

(b) Geben Sie die Gleichung für eine Spirale an, die gegenüber der ursprünglichen um +25° um den Pol gedreht ist.

(a) - Termobjekt r mit Term 0,03*t^2
- Termobjekt x mit Term r*cos(t)
- Termobjekt y mit Term r*sin(t)
- Punkt P mit Koordinaten (x,y) konstruieren,
x-Koordinate: Term x
y-Koordinate: Term y
- Punkt P zum Aufzeichnen von Ortslinien markieren
- Zahlobjekt t durch den Zahlbereich bewegen → Spirale erscheint als Ortslinie.

(b) Gleichung der Spirale r = 0,03*(t-25)^2 .

15

4. Gegeben sind ein Pol P und zwei Punkte $P_1$ und $P_2$.

(a) Geben Sie die Gleichung

a$_1$) einer *archimedischen* Spirale,

a$_2$) einer *logarithmischen* Spirale

jeweils mit Pol P und den unmittelbar hintereinander durchlaufenen Spiralpunkten $P_1$ und $P_2$ an. Die Lage der Polarachse dürfen Sie selbst bestimmen.

(b) Konstruieren Sie auf der ***archimedischen*** Spirale mit Zirkel und Lineal zwei weitere Punkte **Q** und **R** mit den folgenden Bedingungen:

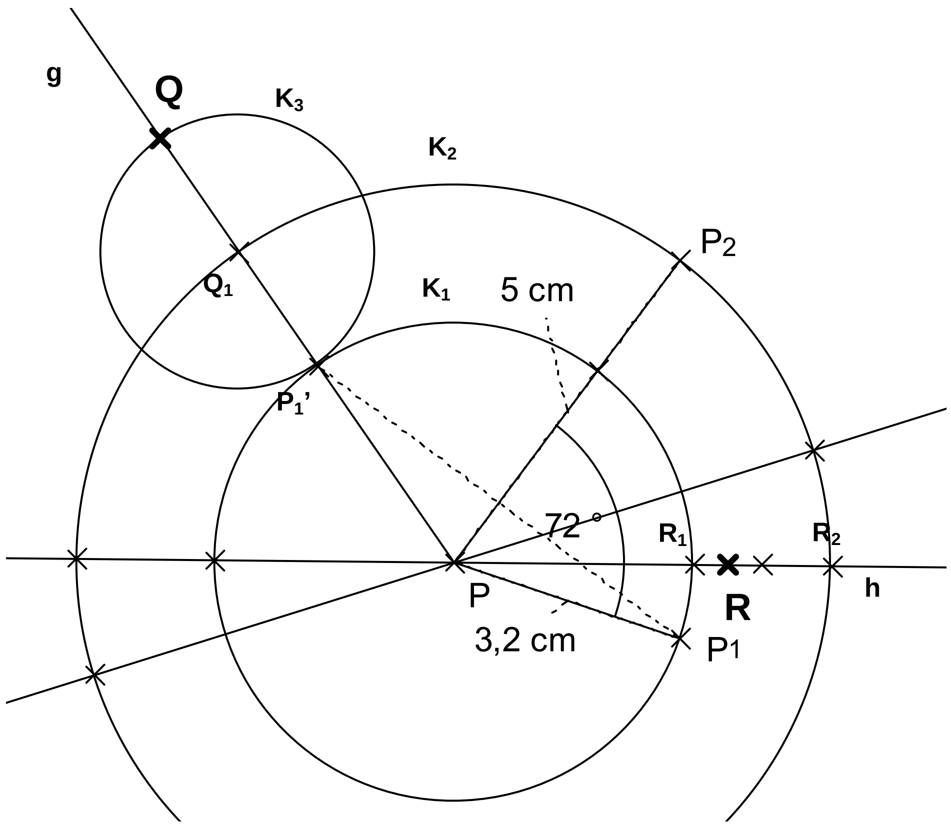
$\angle(P_2,P,Q) = \angle(P_1,P,P_2)$ und $\angle(P_1,P,R) = \frac{1}{4}\angle(P_1,P,P_2)$

Die Konstruktion muss nachvollziehbar sein (Bezeichnungen in der Zeichnung, wenige Stichworte zur Beschreibung).
Sie dürfen das Geodreieck verwenden, um Senkrechte zu zeichnen usw., nur prinzipiell muss die Konstruktion mit Zirkel und Lineal durchführbar sein.

(a) a$_1$) $r = \frac{1{,}8cm}{72°}\varphi + 3{,}2cm$ $\qquad r = 0{,}025\frac{cm}{°}\varphi + 3{,}2cm$

a$_2$) $r = 3{,}2cm \cdot \left(\frac{5}{3{,}2}\right)^{\frac{\varphi}{72°}}$ $\qquad r = 3{,}2cm \cdot 1{,}56^{\frac{\varphi}{72°}}$

(b) Punkt Q:
Winkel $\angle(P_1,P,P_2)$ an $\overline{PP_2}$ antragen: $P_1$ an $\overline{PP_2}$ spiegeln, Spiegelpunkt $P_1$' mit P durch g verbinden
Kreis $K_1$ um P mit Radius $\overline{PP_1}$, Kreis $K_2$ um P $\overline{PP_2}$. $Q_1$ Schnittpunkt von g mit $K_2$.
Kreis $K_3$ um $Q_1$ durch $P_1$': Schnittpunkt mit g ist Q.



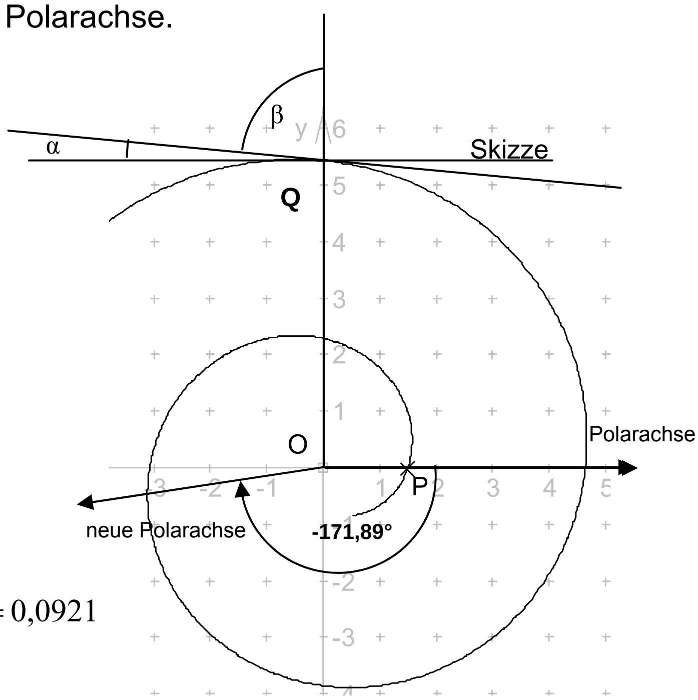
(b) Punkt R:

Winkel $\angle$ ($P_1$,P, $P_2$) zweimal halbieren (s. Zeichnung), 2.Winkelhalbierende ist h
$R_1$ Schnittpunkt von h mit $K_1$ , $R_2$ Schnittpunkt von h mit $K_2$ .
Strecke $\overline{R_1 R_2}$ zweimal halbieren (s. Zeichnung), 2. Halbierungspunkt ist R.

8 5. Gegeben ist die Spirale mit der Gleichung r = 0,5 φ + 1,5 (φ im *Bogenmaß*).

(a) Berechnen Sie den Winkel β, unter dem die Spirale die positive y-Achse beim *zweiten* Umlauf nach dem Punkt P(1,5/0) schneidet.

(b) Bestimmen Sie durch Rechnung, wie die ursprüngliche Polarachse verändert werden muss, damit die Spirale durch eine Gleichung der Form r = a φ beschrieben wird. Skizzieren Sie die Lage der neuen Polarachse.




(a) Q ist der entsprechende Punkt auf der y-Achse.

Zu Q gehört der Winkel φ=$\frac{5\pi}{2}$

Damit erhält man nach der Formel für den Schnittwinkel (bzw. dessen Komplementwinkel zu 90°):

$$\tan(\alpha) = \frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)} = \frac{0{,}5}{0{,}5\cdot\frac{5\pi}{2}+1{,}5} = \frac{0{,}5}{5{,}43} = 0{,}0921$$

α = $\tan^{-1}$(0,0921) ≈ 5,26°

β = 90°-α = 84,74°.

(b) r = 0,5 φ + 1,5 = 0 (um zu bestimmen, für welchen Winkel φ r=0 wird).

$\varphi = -\frac{1{,}5}{0{,}5} = -3$ im Bogenmaß, umgerechnet ins Gradmaß:

$\varphi = -3\cdot\frac{180°}{\pi} = -171{,}89°$ .

Die neue Polarachse ist also gegen die ursprüngliche um einen Winkel von 143,24° im Uhrzeigersinn gedreht.

5

6. Gegeben ist eine logarithmische Spirale mit Pol P durch zwei Punkte $P_1$ und $P_2$, die von P die Entfernungen $r_1$ und $r_2$ haben.
Gesucht ist der Spiralpunkt R, der auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle(P_1,P,P_2)$ liegt. Seine Entfernung von P ist r.

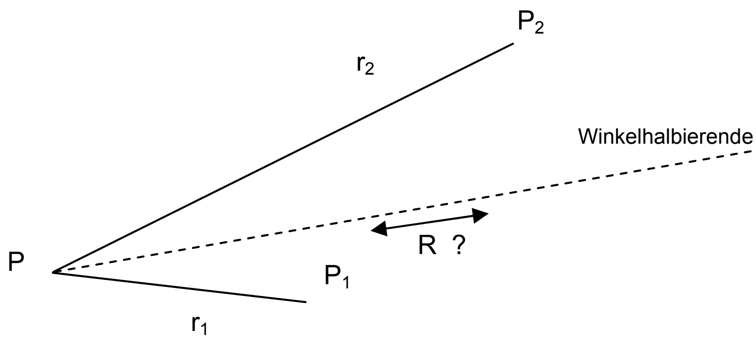
   a) Berechnen Sie r, wenn $r_1$ = 3 cm und $r_2$ = 6 cm ist.

   b) Geben Sie einen möglichst einfachen allgemeinen Term für die Berechnung von r aus $r_1$ und $r_2$ an.

   Logarithmische Spirale:

   Spirale, bei der der Radius bei gleichem Winkelzuwachs stets mit dem gleichen Faktor zunimmt.

Skizze:




a) $q = \frac{r_2}{r_1} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad r = r_1\sqrt{2} = 3cm \cdot \sqrt{2} \approx 4{,}24cm$

b) $q = \frac{r_2}{r_1} \qquad \Rightarrow \qquad r = r_1\sqrt{q} = r_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{r_1^{\,2} \cdot \frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$