Aufgaben zur Bestimmung des Tangentenwinkels von Spiralen

Gegeben ist die Spirale mit der Gleichung $r = 0{,}5\,\varphi$, φ im **Bogenmaß**.

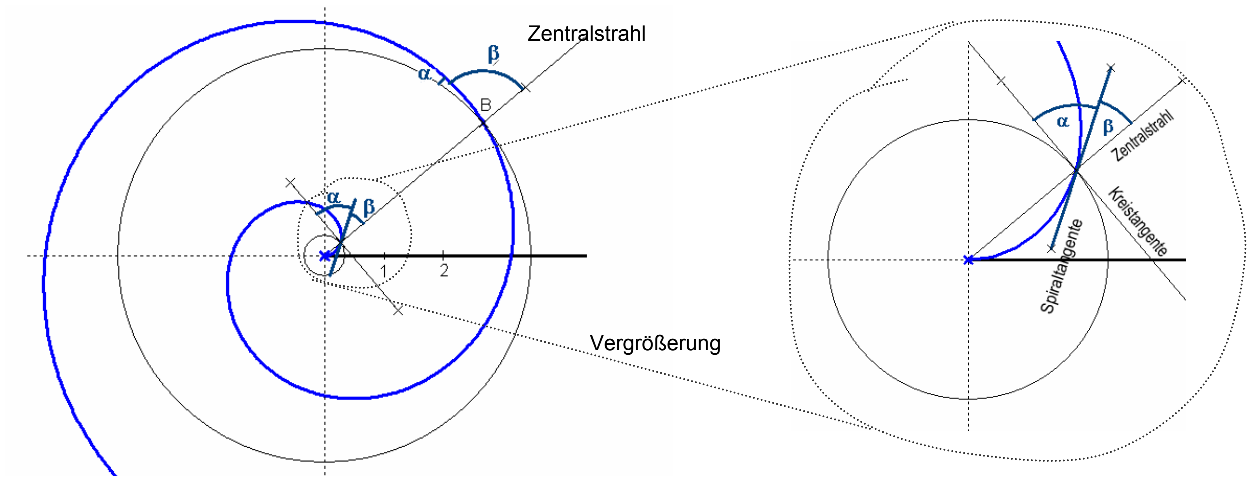
(a) Geben Sie die Gleichung für Winkel im Gradmaß an.

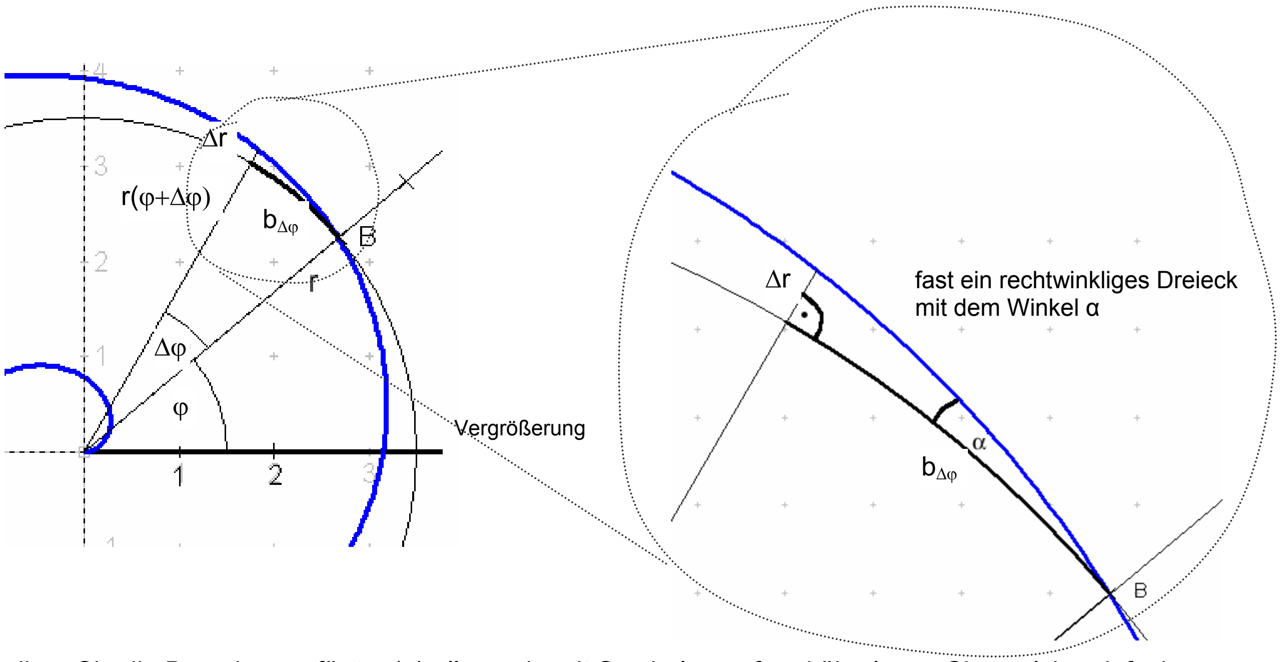
(b) Um welchen Wert nimmt der Radius zu, wenn der Winkel um 30°, 90°, 180°, 360° zunimmt?

(c) Welchen Wert hat der Radius für den Winkel $\varphi = \pi/2$ ($3\pi/2$, 10π, 30π) ?

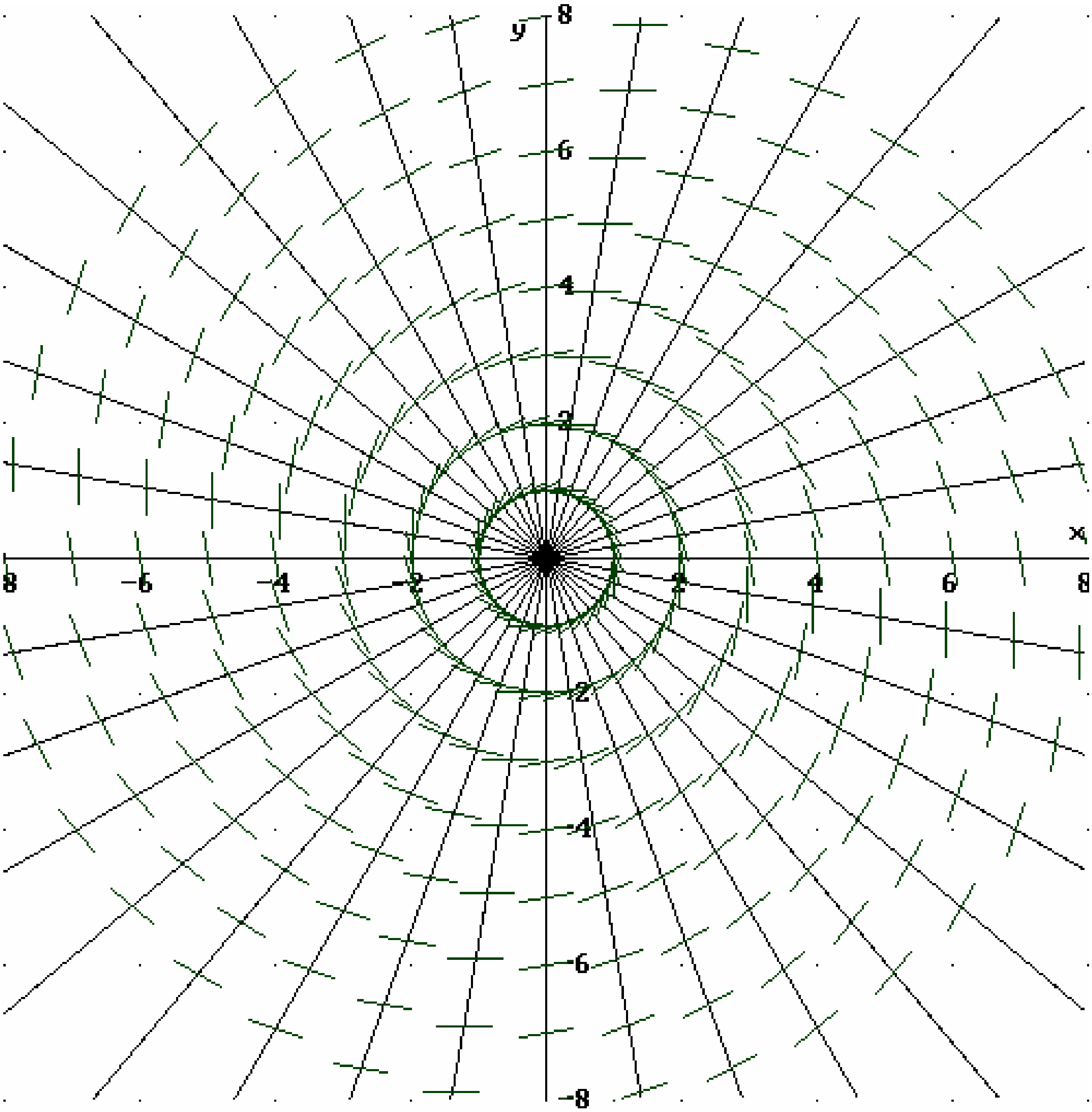
(d) Jetzt soll der Winkel β bestimmt werden, unter dem eine Spirale Zentralstrahlen schneidet (s. Zeichnung). Eben so gut kann man auch den Winkel α bestimmen, unter dem eine Spirale in einem Punkt B den Kreis durch diesen Punkt mit dem Pol als Zentrum schneidet. Der Winkel α gibt an, wie stark die Spirale von einem Kreis abweicht.
Da Winkel nur zwischen Geraden oder Strecken definiert sind, muss man die Spirale und die Kreise durch ihre Tangenten im Schnittpunkt annähern. Der Schnittwinkel zwischen diesen Tangenten wird als Schnittwinkel zwischen den Linien definiert.

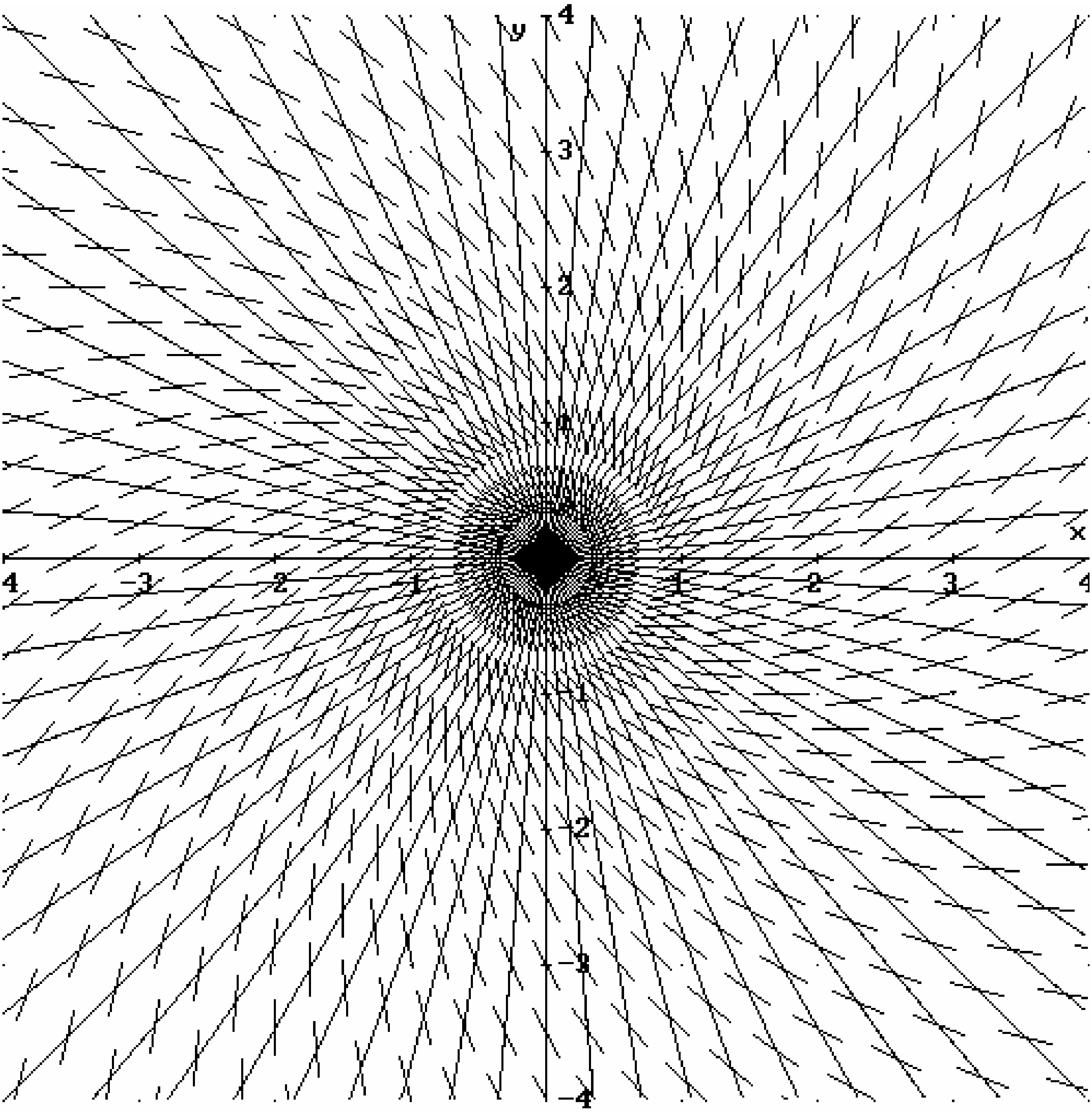
Berechnen Sie näherungsweise den Winkel α, den die Spirale für $\varphi = \pi/3$ (10π, 30π) mit dem Kreis (mit Zentrum P) durch den entsprechenden Kurvenpunkt einschließt, indem Sie den Winkel um einen sehr kleinen Wert $\Delta\varphi$ wachsen lassen; die Spiralen- und Kreisstücke sind dafür dann fast gerade Linien und können näherungsweise wie Strecken behandelt werden.

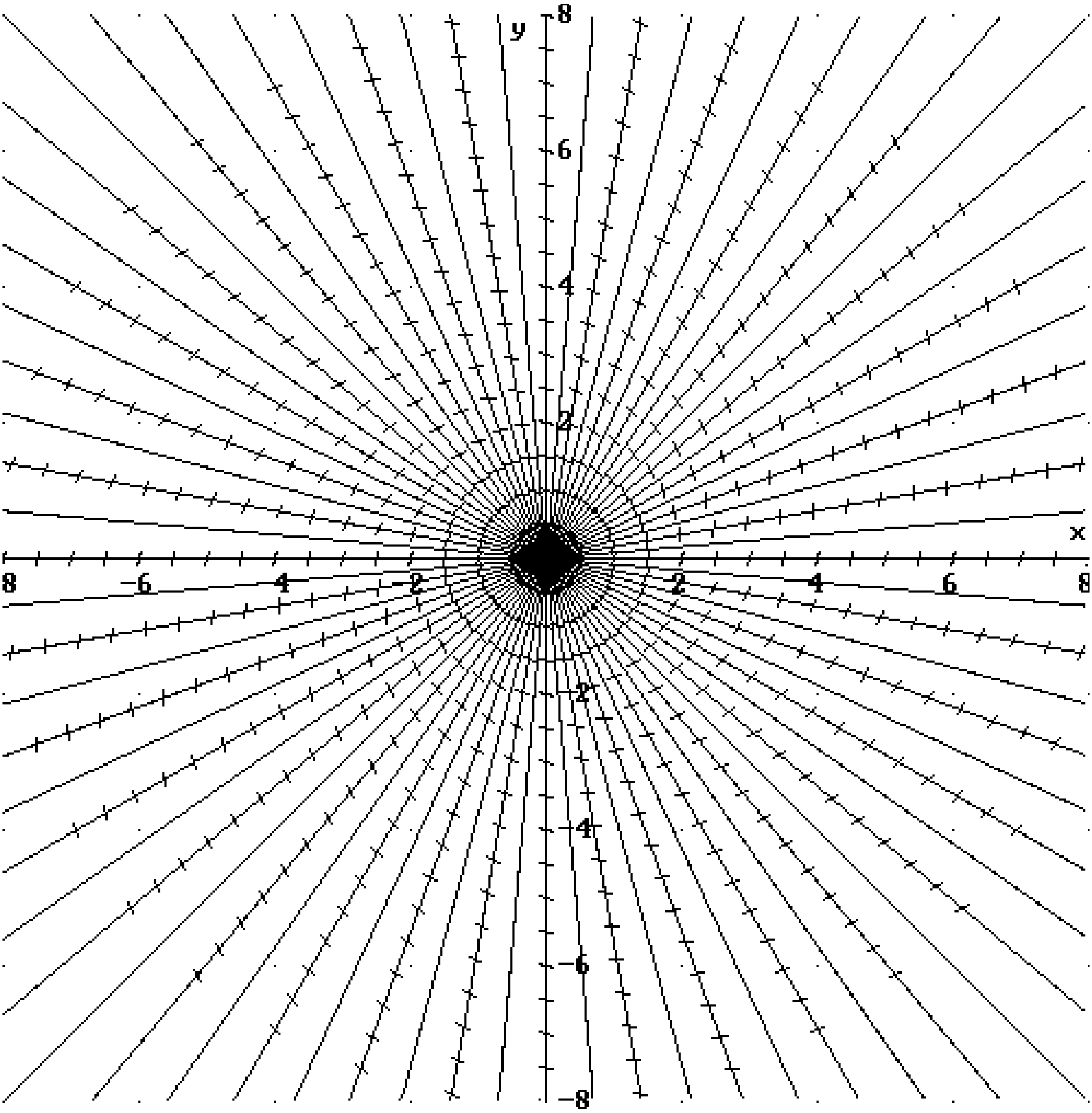




(e) Schreiben Sie die Berechnung für tan(α) allgemein mit Symbolen auf und überlegen Sie, welche einfache Formel zur Berechnung von tan(α) sich daraus ergibt, wenn man $\Delta\varphi$ gegen Null gehen lässt.
Haben Sie bei der Herleitung der Formel benutzt, dass eine archimedische Spirale vorliegt?
Was sagt die Formel über den Winkel α bei einer archimedischen Spirale aus, wenn man den Winkel φ immer größer werden lässt?


y
x
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4



y
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
x
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8

Tangentenwinkel

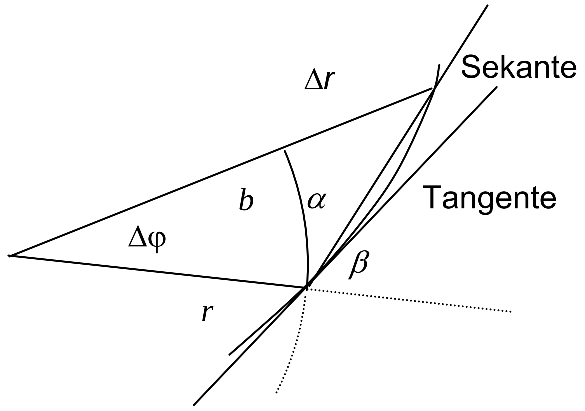
Es soll untersucht werden, welchen Winkel die Tangente an eine Spirale im Berührpunkt mit den Radialstrahlen einschließt und wie dieser Winkel berechnet werden kann.
Statt den Winkel β zwischen den Radialstrahlen und der Tangente zu berechnen kann man auch dessen Ergänzungswinkel α zu 90° berechnen.
α ist der Winkel im Berührpunkt, um den die Spirale von einem Kreis abweicht. Für einen Kreis ist α Null.

Es gilt für jede Sekante:

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta r}{b} = \frac{\Delta r}{r \cdot \Delta\varphi} \xrightarrow[\Delta\varphi \to 0]{} \frac{1}{r} \cdot r'$$

Für den Winkel α mit der Tangente erhält man so

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{1}{r} \cdot r'}$$



Logarithmische Spirale

Aus der Gleichung $r = r_0 \cdot e^{k\varphi}$ ergibt sich $r' = k \cdot r_0 \cdot e^{k\varphi} = k \cdot r$, und daraus sofort

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{1}{r} \cdot k \cdot r = k}$$

Das bedeutet

- Für logarithmische Spiralen ist der Winkel, den die (Tangente der) Spirale mit den Radialstrahlen einschließt, konstant.
- Die Gleichung der logarithmischen Spirale lautet

$$r = r_0 \cdot e^{\tan(\alpha)\varphi}$$

- Der Tangens des konstanten Tangentenwinkels ist aus der Gleichung der logarithmischen Spirale unmittelbar ablesbar.

Die Konstanz des Tangentenwinkels folgt allerdings auch schon ohne Rechnung unmittelbar aus der Selbstähnlichkeit der logarithmischen Spirale unter geeigneten Drehstreckungen um den Spiral-Pol:

Wenn immer man eine logarithmische Spirale um ihren Pol dreht und sie dann mit einem geeigneten Faktor streckt, geht die Spirale in sich selbst über. Das folgt schon aus Gleichung $r = r_0 \cdot q^{\varphi}$ und den Potenzgesetzen, wenn man beachtet

$$r(\varphi + \delta) = r_0 \cdot q^{(\varphi+\delta)} = r_0 \cdot q^{\varphi} \cdot q^{\delta} = s \cdot r(\varphi) \quad \text{mit Streckfaktor } s = q^{\delta},$$

d.h. wenn man die Spirale um den Winkel δ dreht erhält man die Spirale, die aus der ursprünglichen durch Streckung mit dem Faktor s entsteht.

Archimedische Spirale

Aus der Gleichung $r = k \cdot \varphi$ ergibt sich $r' = k$, und daraus sofort

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{k}{r}}$$

Das bedeutet

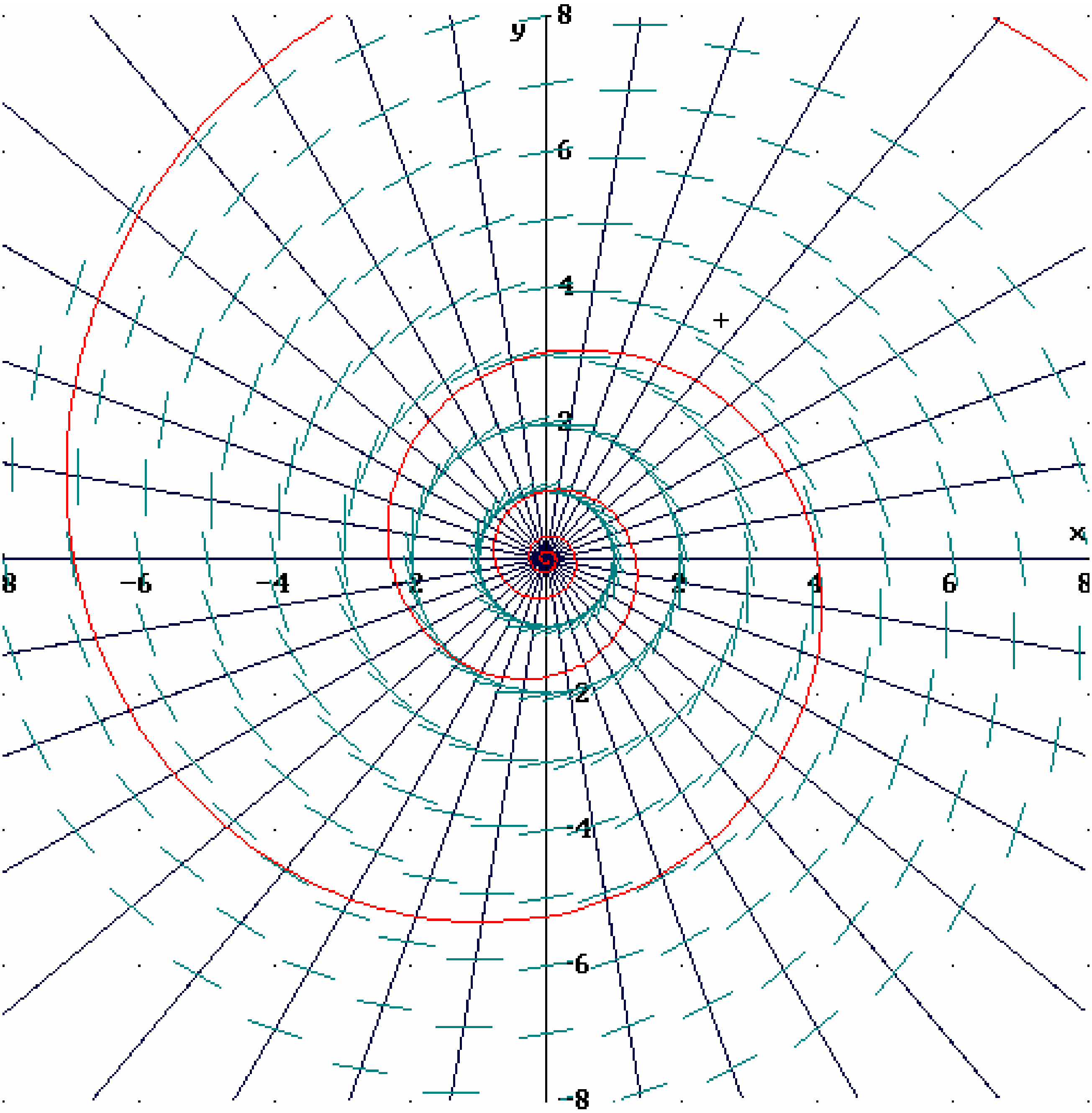
- Für archimedische Spiralen ist der Tangens des Winkels, um den die Spirale vom Kreis abweicht, umgekehrt proportional zur Entfernung vom Pol.

- Für große Entfernungen r verläuft die archimedische Spirale fast wie ein Kreisbogen.

- Für den Winkel α_n nach n Umläufen gilt $\tan(\alpha_n) = \frac{k}{r} = \frac{k}{k \cdot n \cdot 2\pi} = \frac{1}{2n\pi}$.

  Es ergeben sich folgende Werte für die ersten Umläufe:

  $\alpha_1 \approx 9.04°$, $\alpha_2 \approx 4.55°$, $\alpha_3 \approx 3.04°$, $\alpha_4 \approx 2.27°$, $\alpha_5 \approx 1.82°$, ..., $\alpha_{10} \approx 0.91°$, $\alpha_{20} \approx 0.46°$.


y
x
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
−6
−4
6
8