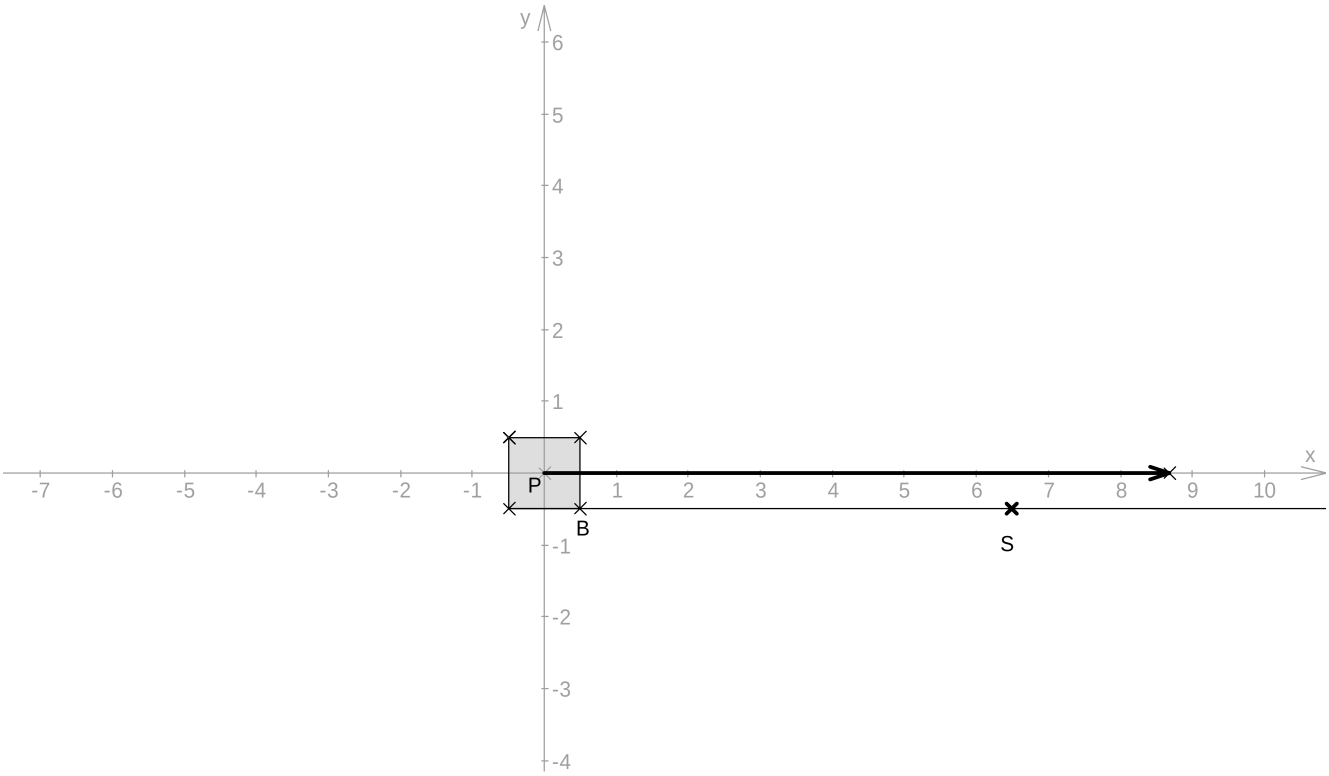
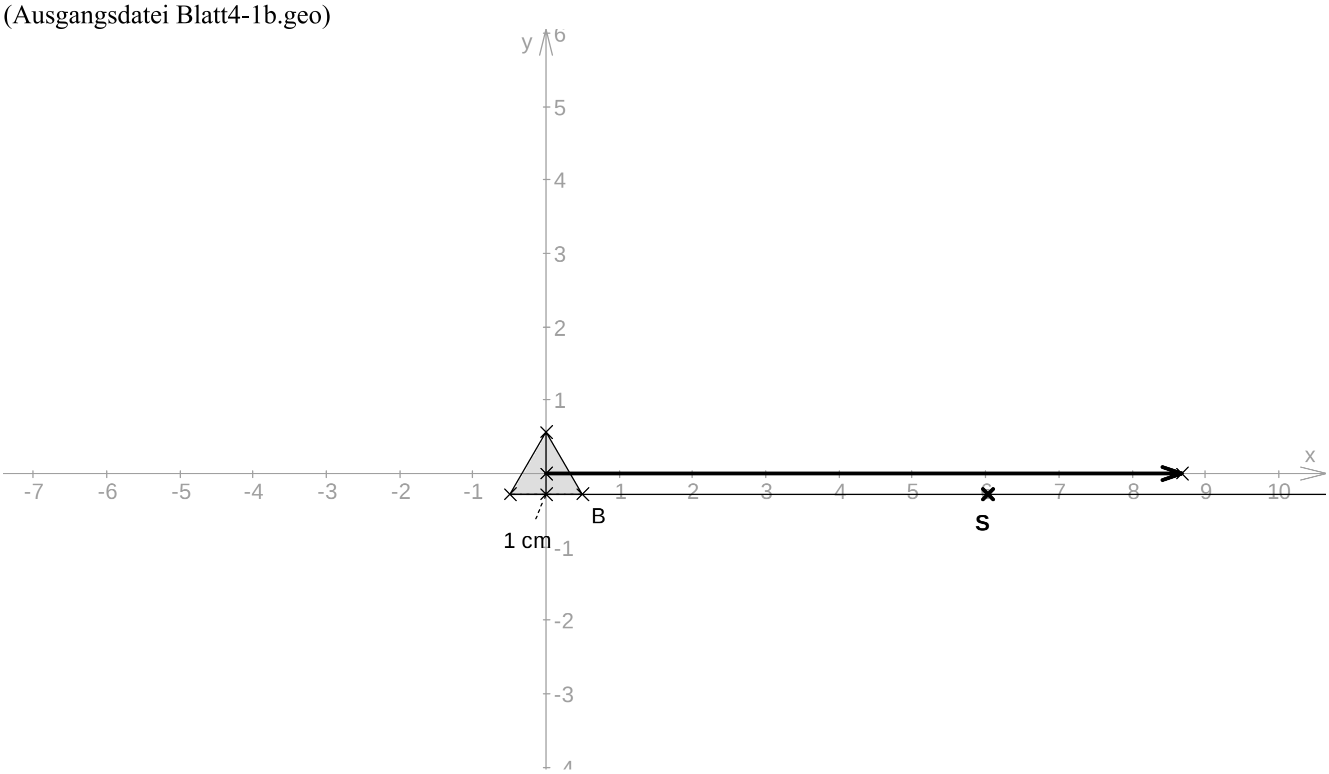
Archimedische Spirale 4

Aufgabe 1

An einem Holzpflock mit quadratischem Querschnitt (Seitenlänge z.B. 1cm) ist im Punkt B eine Schnur befestigt, die von B nach S reicht. Die Schnur wird im Gegenuhrzeigersinn so lange es geht um den (festen) Pflock gewickelt.
Konstruieren Sie die Bahn, die das Schnurende S beschreibt.
Diskutieren Sie den Zusammenhang mit archimedischen Spiralen.
Führen Sie die Konstruktion mit DynaGeo durch, ebenso den Vergleich mit einer archimedischen Spirale (Ausgangsdatei Blatt4-1a.geo).



Machen Sie das Gleiche mit einem Pflock, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist.
(Ausgangsdatei Blatt4-1b.geo)



Aufgabe 2

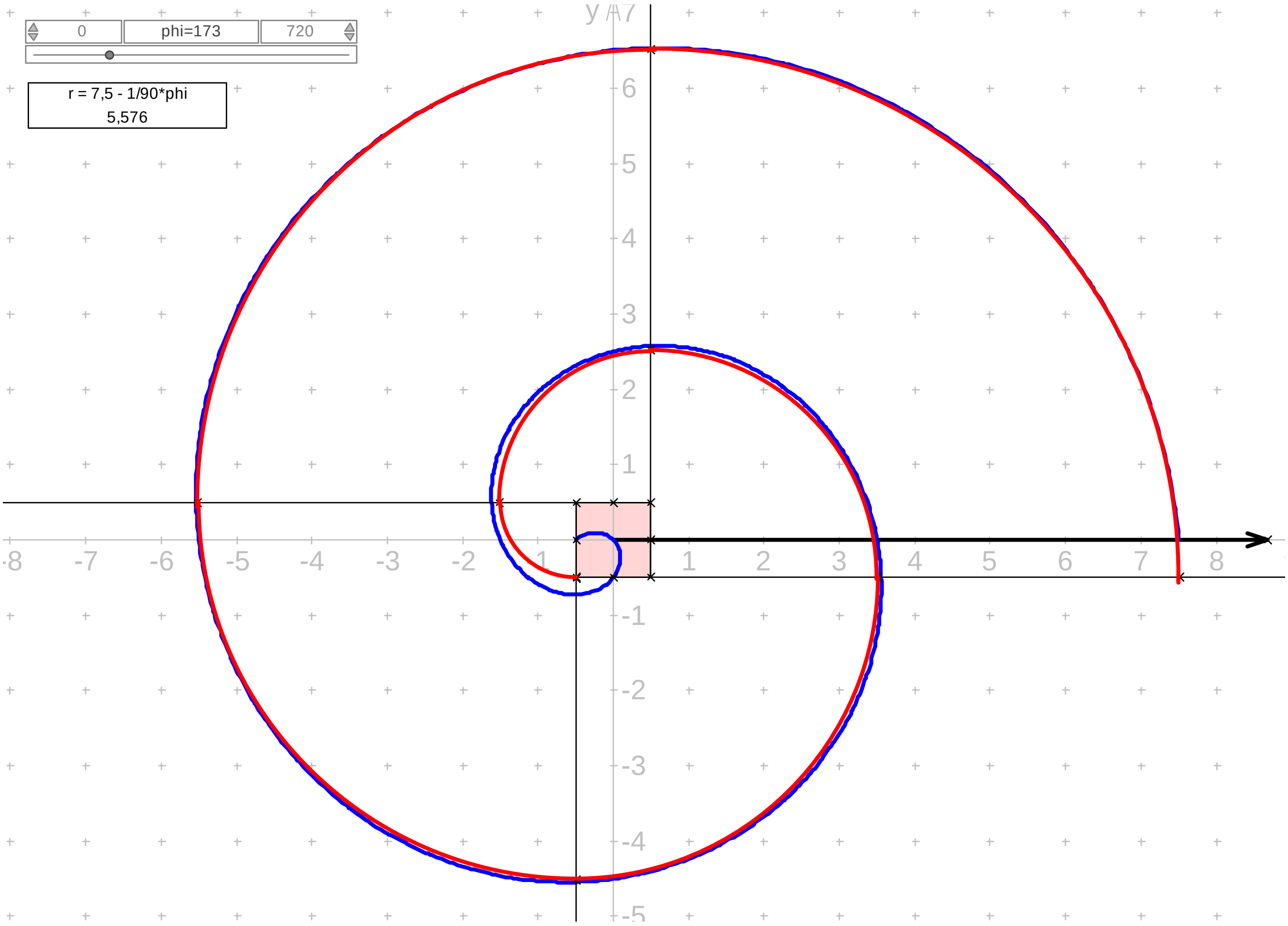
Jetzt werden reguläre n-Ecke zur Konstruktion verwandt.

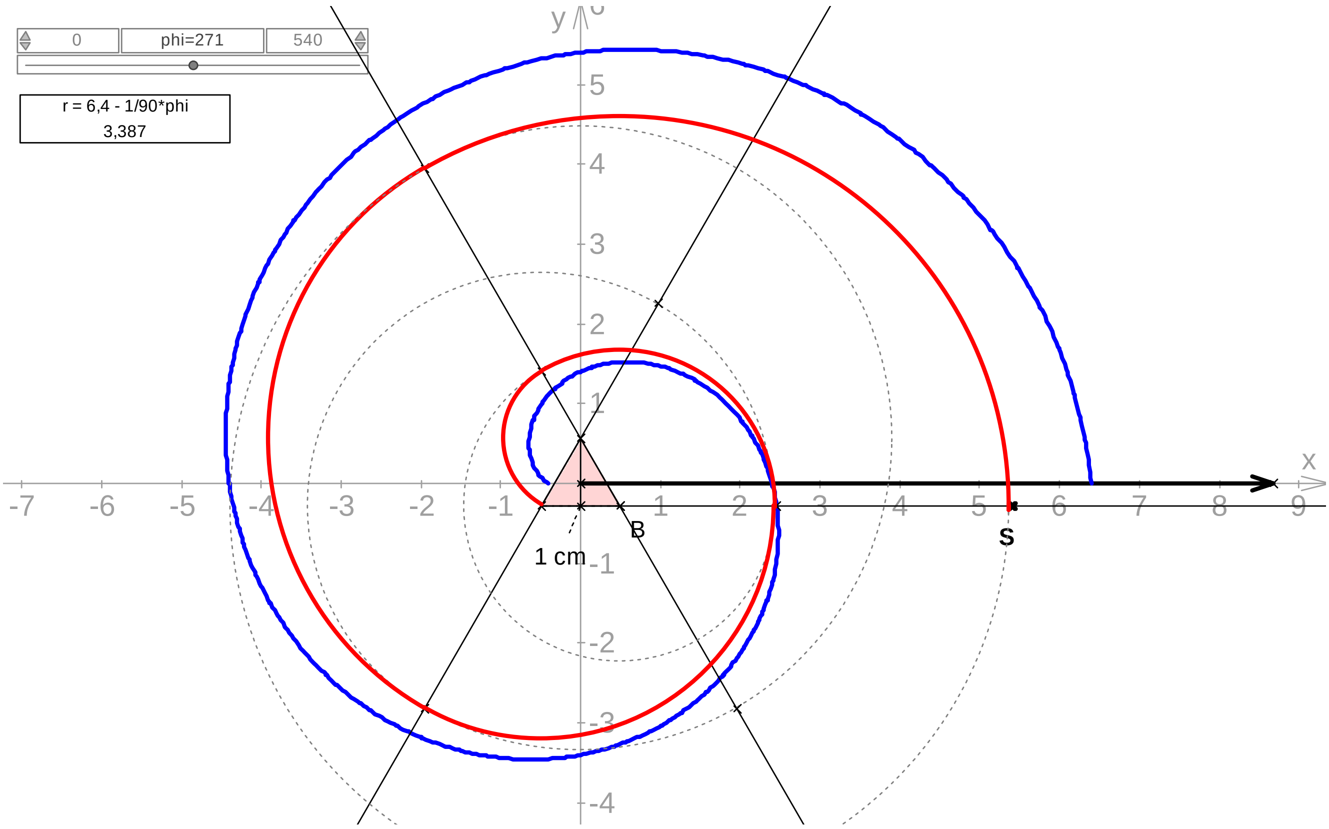
Beschreiben Sie, was das bewirkt (sehr vage Frage). Machen Sie Skizzen!

Zuletzt betrachtet man einen Pflock mit kreisförmigem Querschnitt.

Stellen Sie sich vor, die Schnur sei in ihrer ganzen (endlichen) Länge um den Pflock gewickelt, und sie beginnen jetzt, die Schnur aufzuwickeln. Das gibt ja wohl etwas Spiralenartiges.
Beschreiben Sie den Zusammenhang mit den n-Eck-Pfosten.
Bis zu welcher Stellung wollen Sie die Schnur aufwickeln, damit Sie eine „gute“ Spirale erhalten? Machen Sie eine Skizze.

Aufgabe 1


0
phi=173
720
r = 7,5 - 1/90*phi
5,576


0
phi=271
540
r = 6,4 - 1/90*phi
3,387
B
S
1 cm

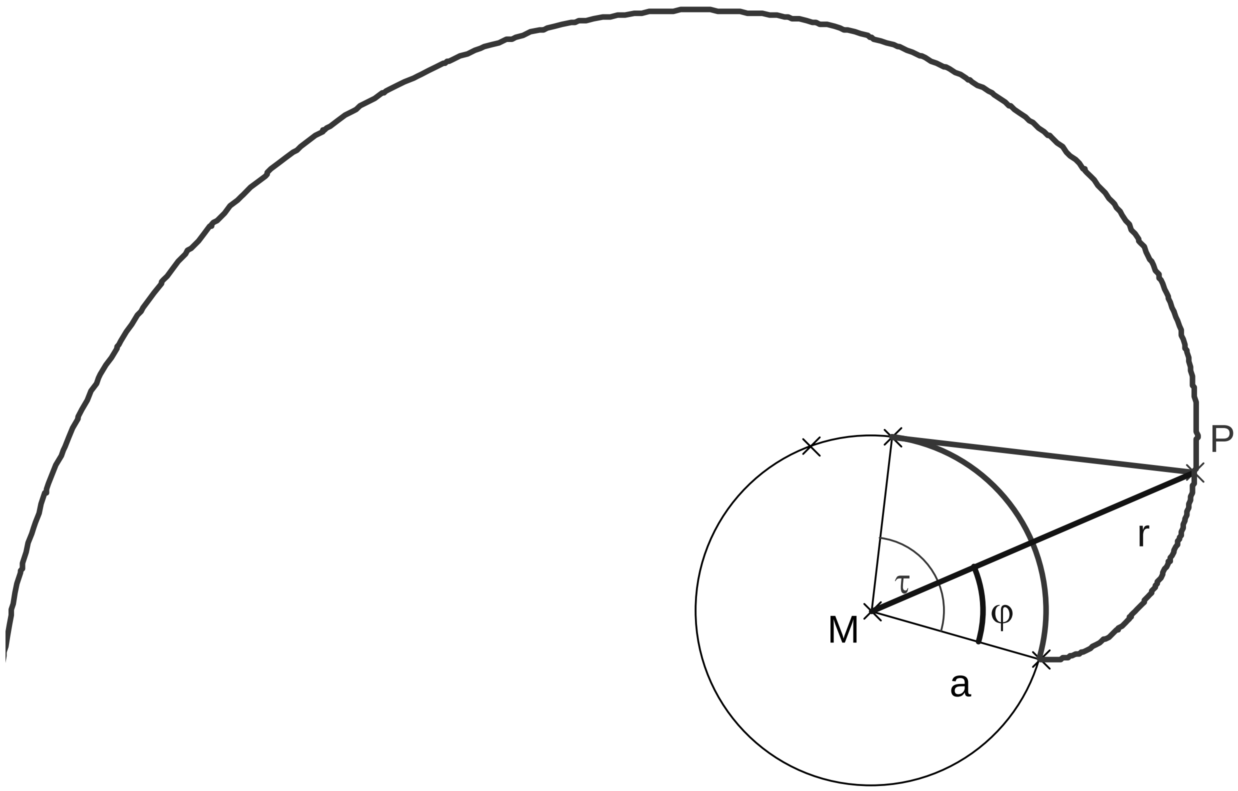
Aufgabe 3

Hier sehen Sie eine Abbildung der Abwicklung einer Schnur von einem Pflock mit kreisförmigem Querschnitt.
(Datei Blatt4-1c.geo zum experimentieren)
Erklären Sie die Zeichnung. (Wo ist die Schnur, was ist sonst noch eingezeichnet?) Schreiben Sie Erklärungen an die entsprechenden Stellen in der Zeichnung.

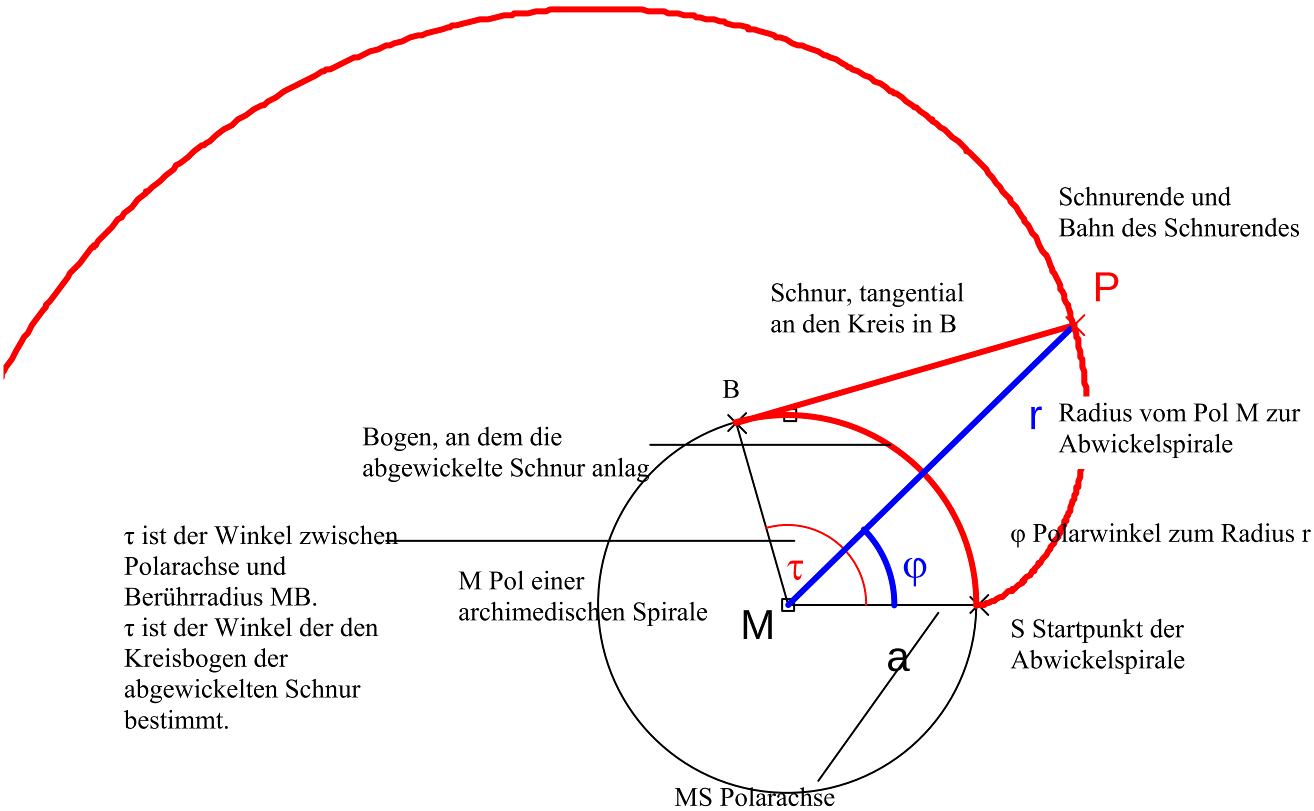
Begründen Sie, warum die Spirale wohl kein Teil einer echten archimedischen Spirale ist.

Begründen Sie, warum die Spirale nach viiiielen Windungen eine gewisse archimedische Spirale immer besser annähert.

Durch eine kleine technische Einrichtung lässt sich aus dieser Anordnung ein echter archimedischer Spiralenzirkel herstellen. Erfinden Sie diesen neu!



Aufgabe 3



Die Abwickelspirale ist wohl keine echte archimedische Spirale, da zwar die Strecke $\overline{BP}$ um den Kreisumfang U pro 360° kontinuierlich zunimmt, diese Strecke aber nicht von einem festen Pol aus gemessen wird, sondern vom ständig wechselnden Berührpunkt B auf dem Kreisumfang.

Für große Winkel φ, also nach Abwickeln von mehreren Umfängen, sollte sich dieser Unterschied zwischen M und B nicht mehr stark bemerkbar machen und sich die Abwickelspirale einer echten archimedischen Spirale annähern.

Beobachtung:

Wird der Winkel φ groß, dann verlaufen MP und BP fast parallel, der Winkel $\angle$ BPM wird immer kleiner.
Damit gilt $\tau \approx \varphi + 90°$ für große Winkel φ, also nach mehreren Umläufen. Für diesen Fall ist auch $\overline{BP} \approx r$.
$\overline{BP}$ ist die Länge der abgewickelten Schnur, also so lang wie der Kreisbogen von S nach B. Das heißt für große φ

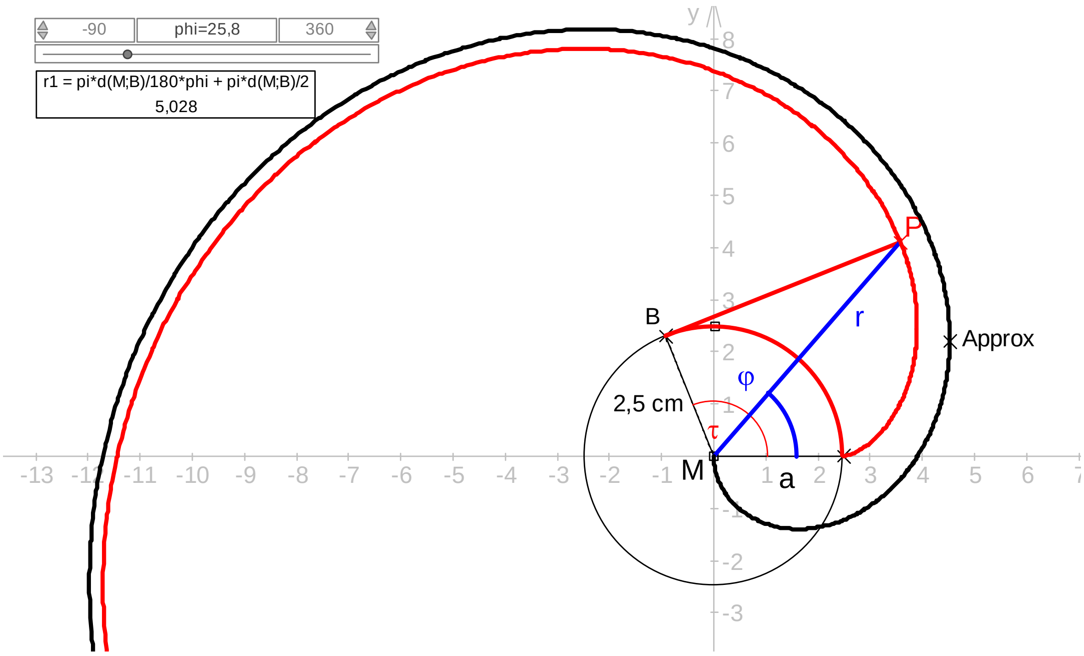
$$r \approx \overline{BP} = \frac{U}{360°} \cdot \tau \approx \frac{U}{360°} \cdot (\varphi + 90°) = \frac{U}{360°} \cdot \varphi + \frac{U}{360°} \cdot 90° = \frac{2\pi a}{360°} \cdot \varphi + \frac{2\pi a}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi a}{180°} \cdot \varphi + \frac{\pi a}{2}$$

Damit hat man mit

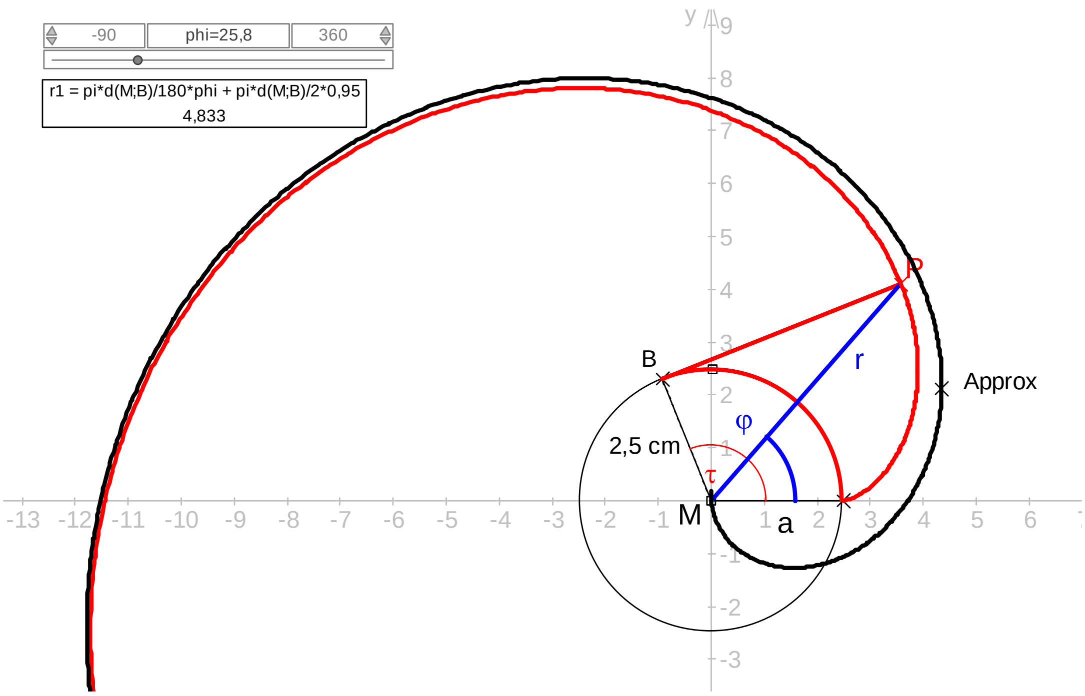
$$r = \frac{\pi a}{180°} \cdot \varphi \; + \; \frac{\pi a}{2}$$

die Gleichung einer echten archimedischen Spirale, die für große Winkel φ immer besser mit der Abwickelspirale übereinstimmt. Da immer $\tau < \varphi + 90°$ ist, ist auch $r_{\text{Kreiswickelspirale}} < r_{\text{archimedische Spirale}}$, d.h. die Kreiswickelspirale nähert sich „von innen“ an die Kreiswickelspirale an.

Vergleich der Kreiswickelspirale („Kreisevolvente“) und der berechneten archimedischen Spirale.



Korrigiert man den Anfangspunkt, dann stimmen die Spiralen zwar für kleinere Winkel φ besser überein, für große φ schneiden sich die Spiralen aber dann schließlich und die archimedische Spirale entfernt sich von der Kreisevolvente.



Exakte Berechnungen:
(alle Winkel im Gradmaß gemessen; mit dem Bogenmaß werden die Ausdrücke etwas einfacher, da der Faktor π/180° bei der Berechnung der Bogenlänge wegfällt)

Aus der Skizze entnimmt man sofort den Zusammenhang zwischen den Winkeln φ und τ:

$$\tan(\varphi-\tau)=\frac{\overline{BP}}{a}=\frac{a\cdot\tau\cdot\frac{\pi}{180°}}{a}=\tau\cdot\frac{\pi}{180°}$$

$$\tau-\varphi=\tan^{-1}(\tau\cdot\frac{\pi}{180°})$$

$$\varphi=\tau-\tan^{-1}(\tau\cdot\frac{\pi}{180°})$$

Da für $\tau\to\infty$ $\tan^{-1}(\tau\cdot\frac{\pi}{180°})\to 90°$, erhält man so die zuvor verwandte Annäherung τ ≈ φ+90° für große Winkel τ.

Man kann die Kreisevolvente damit auch berechnen, allerdings nicht so einfach explizit als φ-r-Funktion, sondern in Parameterdarstellung mit dem Parameter τ:

$$r=\sqrt{a^2+\overline{BP}^2}=\sqrt{a^2+\left(a\cdot\tau\cdot\frac{\pi}{180°}\right)^2}=a\sqrt{1+\left(\tau\cdot\frac{\pi}{180°}\right)^2}$$

$$\varphi=\tau-\tan^{-1}(\tau\cdot\frac{\pi}{180°})$$

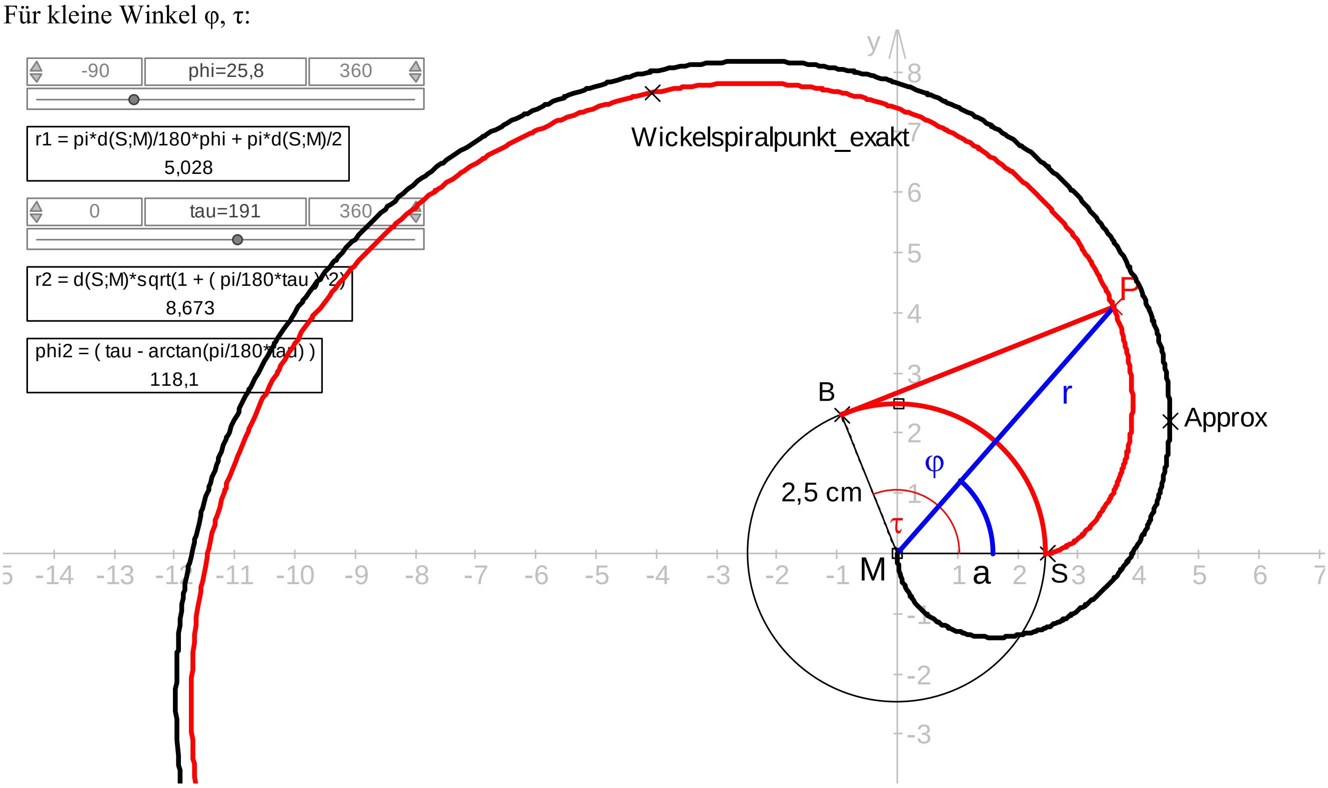
In DynaGeo kann man eine solche Kurve in Parameterdarstellung einfach zeichnen lassen:

Zu einem Zahlobjekt *tau* (τ) mit geeignetem Bereich (z.B. 0 bis 1080°) wird ein Punkt P(x,y) mit den Koordinaten

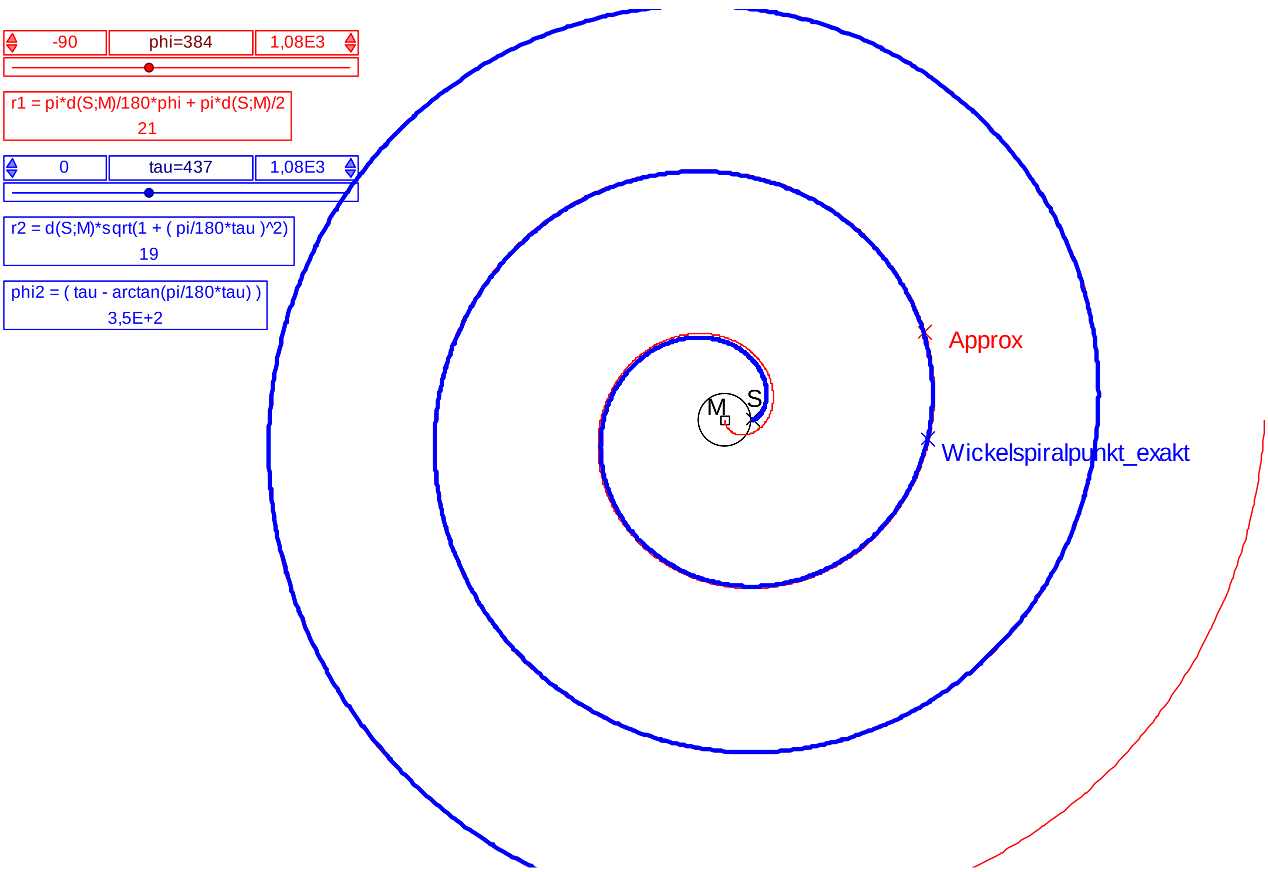
x = r*cos(φ)
y = r*sin(φ)

konstruiert, wobei für r und φ die zuvor angegebenen Terme eingesetzt werden.

Für kleine Winkel φ, τ:



Für große Winkel φ, τ:



Formeln für die Winkel im Bogenmaß (viel einfacher):

$$r = a\sqrt{1+\tau^2}$$
$$\varphi = \tau - \tan^{-1}(\tau)$$