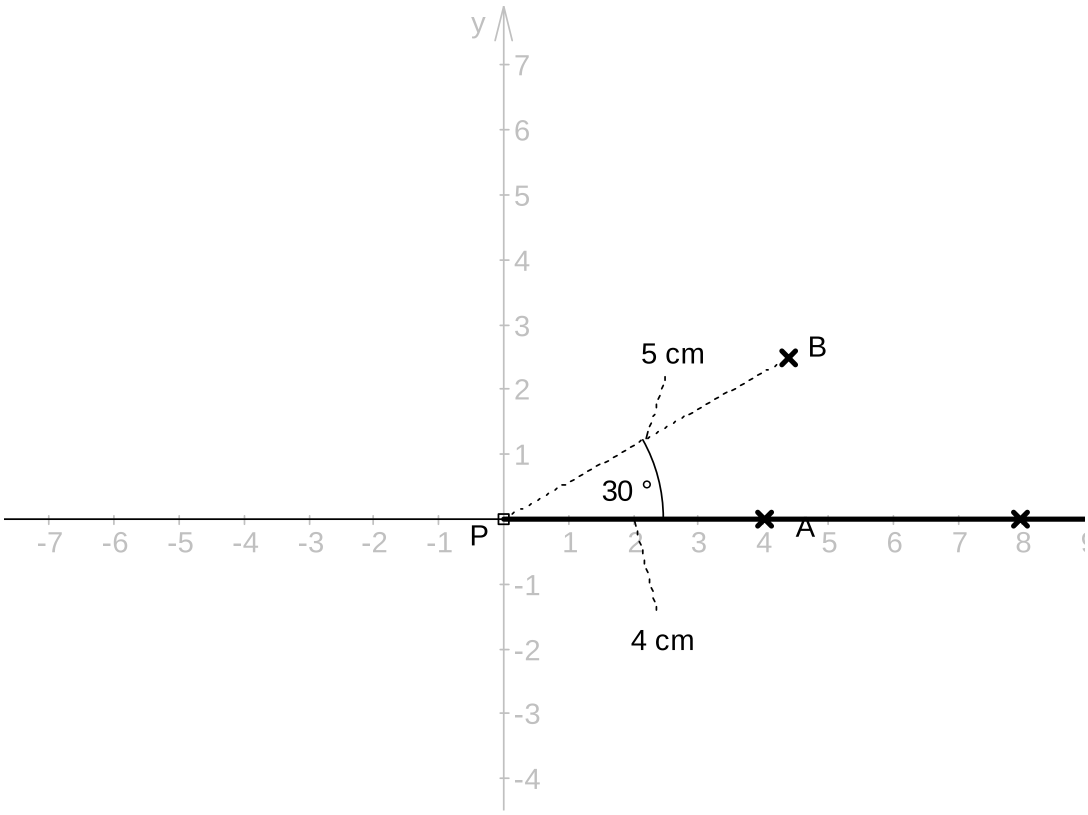
Archimedische Spirale 3

Aufgabe 1

Gegeben sind der Pol P und zwei Punkte A und B wie in der Zeichnung, die Polarachse soll durch A gehen.



(a) Wie viele archimedische Spiralen mit Pol P gibt es, die durch A und B verlaufen?

(b) Wie viele archimedische Spiralen mit Pol P gibt es, die A und B unmittelbar hintereinander durchlaufen?

(c) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal weitere Punkte einer archimedischen Spirale gemäß (b).
Beschreiben Sie, was Sie auf diese Weise konstruieren können.
Können Sie „die archimedische Spirale“ konstruieren?

(d) Geben Sie die Gleichung für die archimedische Spirale in Polarkoordinaten an.

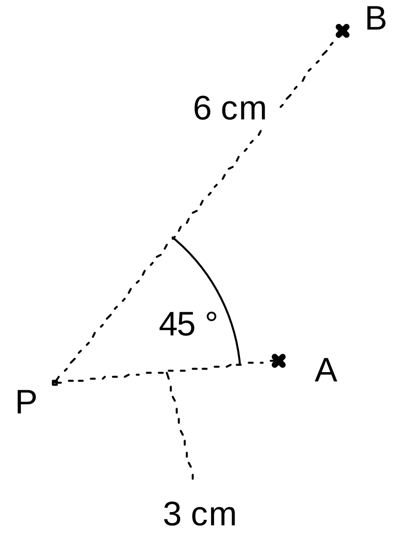
(e) Kann man den Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte $P_1(-4/0)$ und $P_2(0/3)$ mit der Spirale aus (c) mit Zirkel und Lineal konstruieren? Erläutern Sie das Problem.

(f) Führen Sie diese Konstruktion auch in DynaGeo durch (Datei „Blatt3-1a Konstruktion-Aufgabe.geo“ als Grundlage).
Geben Sie auch die Gleichung für die gesamte Spirale ein und überprüfen Sie, ob die beiden Konstruktionen übereinstimmen (die Angabe der Gleichung der Spirale ist nur dann so einfach, wenn einer der Punkte A oder B auf der Polarachse liegt; wenn Sie selbst ein Koordinatensystem wählen dürfen, können Sie diese Bedingung immer erfüllen).

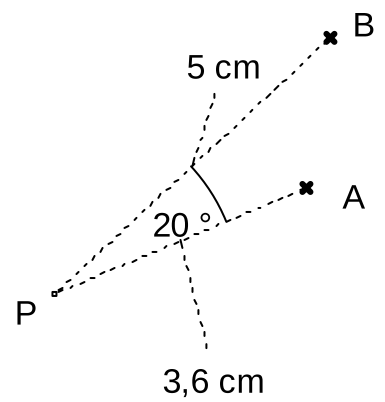
Aufgabe 2

Gegeben sind der Pol P und zwei Punkte A und B gemäß der Zeichnung.
Konstruieren Sie weitere Punkte derjenigen archimedischen Spirale mit Pol P, die A und B unmittelbar hintereinander durchläuft.
Geben Sie ihre Gleichung in einem geeigneten Polarkoordinatensystem an.
Wie muss die Polarachse liegen, damit die Gleichung die Form $r = a \cdot \varphi$ annimmt?

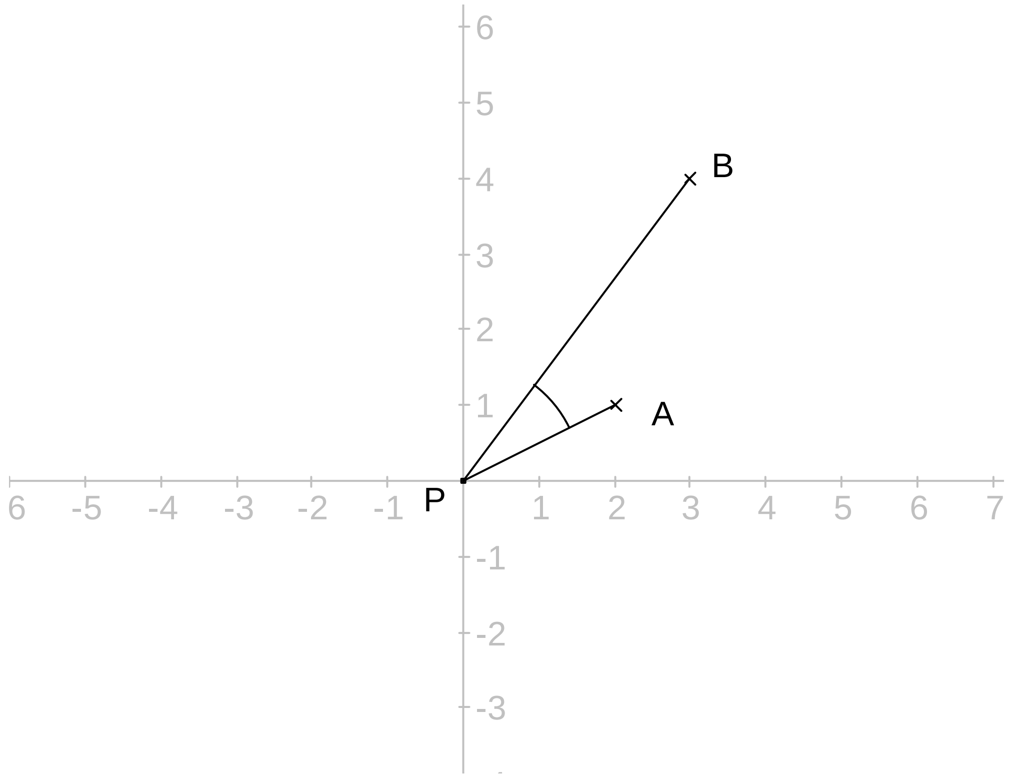
(a)



(b)

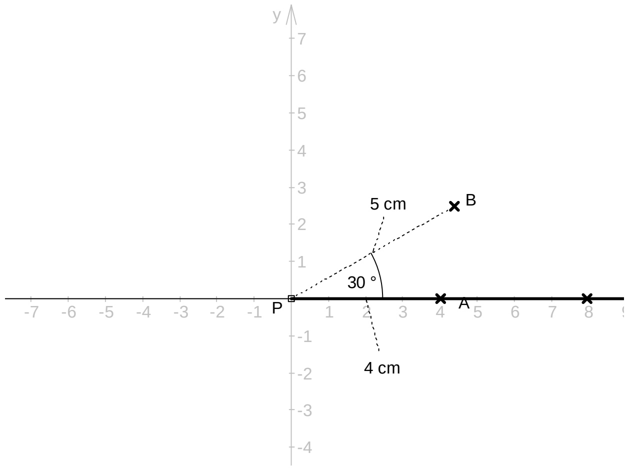


(c) Die Punkte A und B sind dieses Mal durch ihre kartesischen Koordinaten gegeben: A((2/1), B(3/4).



Aufgabe 1

Gegeben sind der Pol P und zwei Punkte A und B wie in der Zeichnung, die Polarachse soll durch A gehen.



(a) Wie viele archimedische Spiralen mit Pol P gibt es, die durch A und B verlaufen?

Unendlich viele, zwischen dem Durchlaufen der Punkte A und B können beliebig viele Durchläufe erfolgen.

(b) Wie viele archimedische Spiralen mit Pol P gibt es, die A und B unmittelbar hintereinander durchlaufen?

Genau eine.

(c) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal weitere Punkte einer archimedischen Spirale gemäß (b). Beschreiben Sie, was Sie auf diese Weise konstruieren können. Können Sie „die archimedische Spirale“ konstruieren?

Zwischen zwei Punkten können weitere Punkte konstruiert werden:

Winkelhalbierende zeichnen, arithmetisches Mittel der benachbarten Radien vom Pol aus darauf abtragen (absoluten Zuwachs von A nach B halbieren und auf der Winkelhalbierenden zusammen mit der Länge von $\overline{PA}$ abtragen).

„**Außerhalb**“ von B können weitere Punkte konstruiert werden: $\angle$ APB verdoppeln und auf dem Schenkel $\overline{PB}$ zusammen mit dem absoluten Zuwachs von A nach B abtragen.

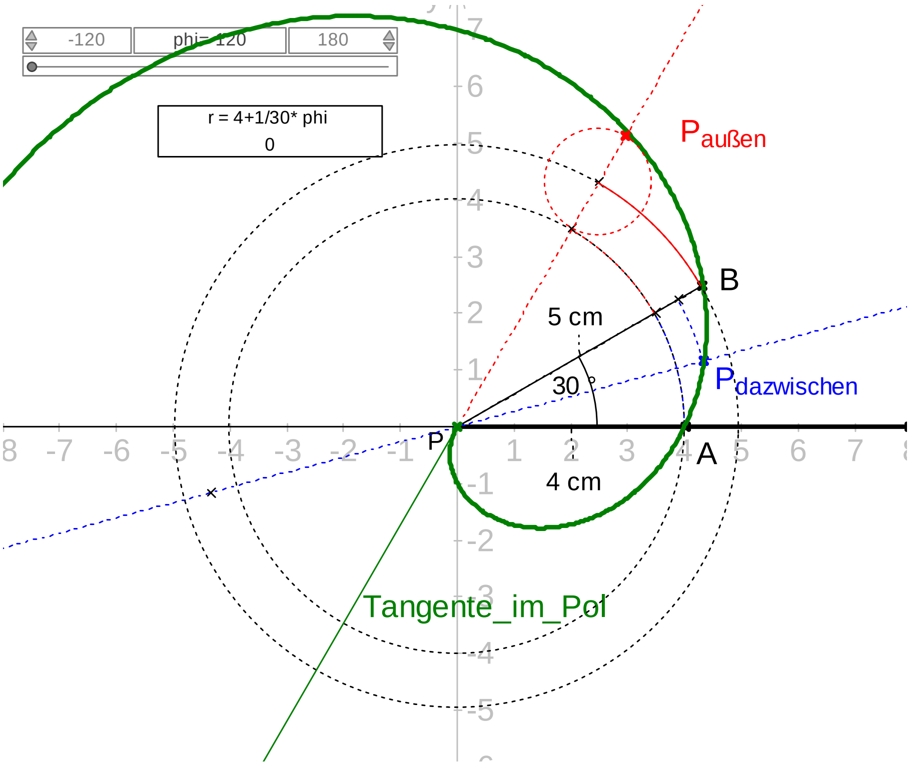
(d) Geben Sie die Gleichung für die archimedische Spirale in Polarkoordinaten an.

$$r = 4\,\text{cm} + \frac{1\,\text{cm}}{30^\circ}\varphi$$

(e) Kann man den Schnittpunkt der Geraden durch die Punkte $P_1(-4/0)$ und $P_2(0/3)$ mit der Spirale aus (c) mit Zirkel und Lineal konstruieren? Erläutern Sie das Problem.

Nein, man kann zwar beliebige viele, auf der Spirale dicht liegende Punkte konstruieren, aber man erhält keine kontinuierliche Linie. Man kann damit zwar Schnittpunkte mit Geraden oder Kreisen beliebig genau annähern, erhält aber im Allgemeinen den Schnittpunkt nicht exakt. Könnte man solche Schnittpunkte mit Kreisen mit Zirkel und Lineal konstruieren, dann könnte auch das Problem der Winkeldrittelung mit Zirkel und Lineal gelöst werden.

(f) Führen Sie diese Konstruktion auch in DynaGeo durch (Datei „Blatt3-1a Konstruktion-Aufgabe.geo“ als Grundlage). Geben Sie auch die Gleichung für die gesamte Spirale ein und überprüfen Sie, ob die beiden Konstruktionen übereinstimmen (die Angabe der Gleichung der Spirale ist nur dann so einfach, wenn einer der Punkte A oder B auf der Polarachse liegt; wenn Sie selbst ein Koordinatensystem wählen dürfen, können Sie diese Bedingung immer erfüllen).

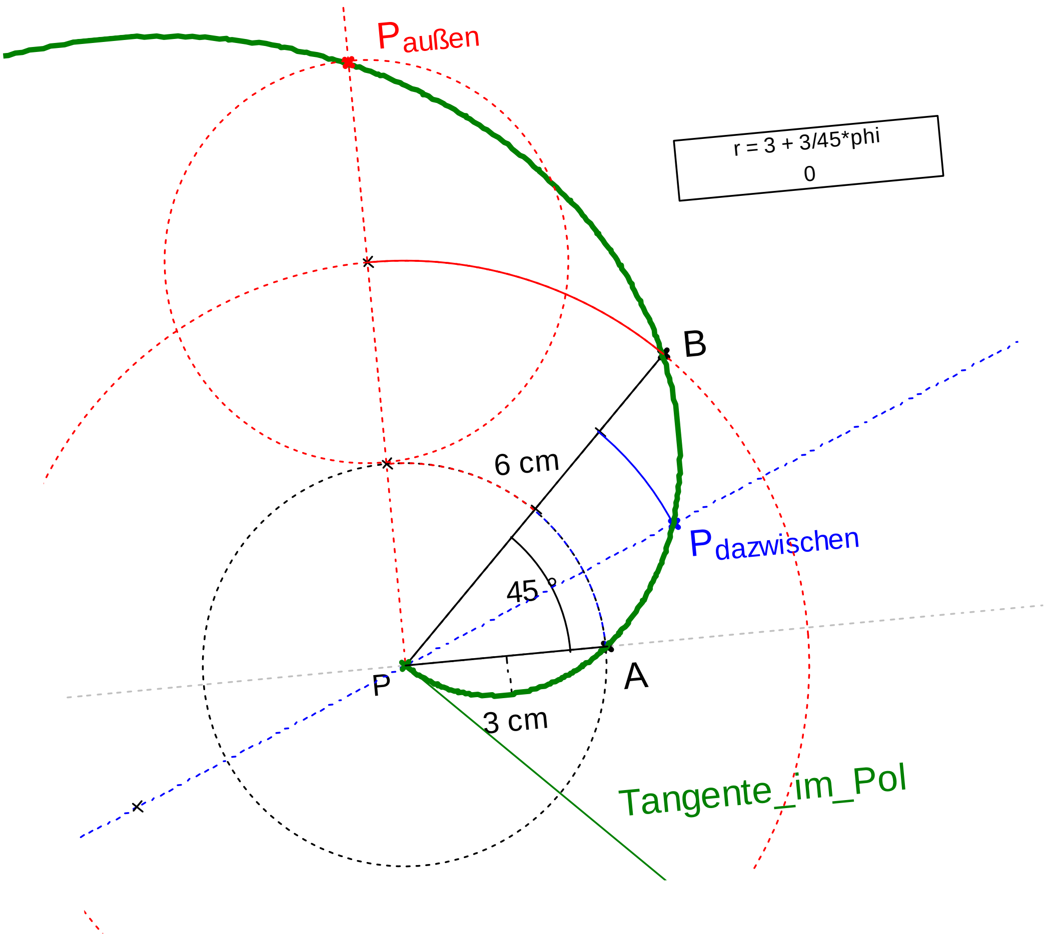


Mit der oben gefundenen Gleichung kann man jetzt auch berechnen, für welchen Wert von φ der Radius r Null wird und damit die mögliche Polarachse finden, bezüglich der die Spirale die Gleichung der Form r = a·φ hat. Es ist dies dann auch die Tangente an die Spirale im Pol.

Aufgabe 2

Gegeben sind der Pol P und zwei Punkte A und B gemäß der Zeichnung.
Konstruieren Sie weitere Punkte derjenigen archimedischen Spirale mit Pol P, die A und B unmittelbar hintereinander durchläuft.
Geben Sie ihre Gleichung in einem geeigneten Polarkoordinatensystem an.
Wie muss die Polarachse liegen, damit die Gleichung die Form r = a·φ annimmt?

(a)

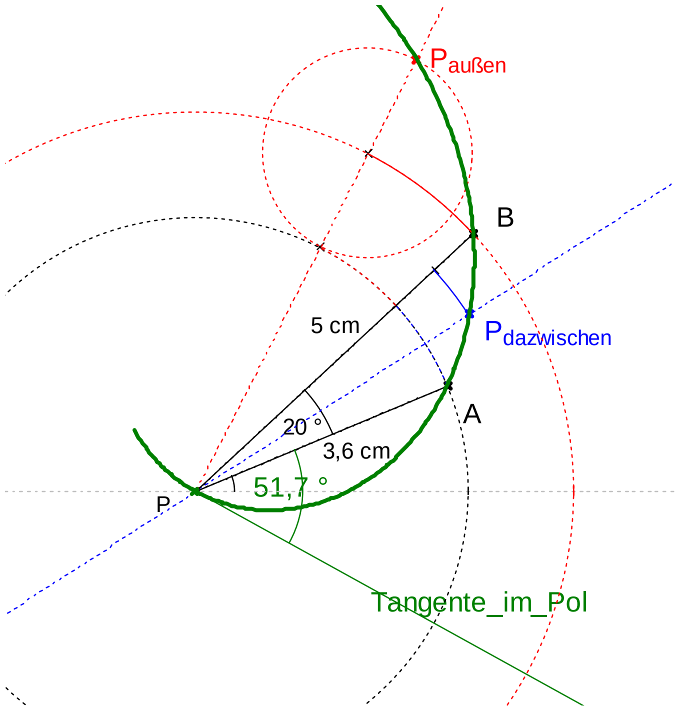


Gleichung: $r = 3cm + \frac{3cm}{45°}\varphi$ Polarachse ist dabei die Halbgerade PA.

Um die Gleichung in der Form r = a·φ schreiben zu können, bestimmen wir den Winkel, bei dem r=0 wird. Dies ist für φ= -45° der Fall. Wird eine Halbgerade in P unter dem Winkel von -45° zur Halbgeraden PA gezeichnet, dann ist diese die gesuchte Polarachse (Tangente an die Spirale in P). Die Spirale hat bezüglich dieser Polarachse dann die Gleichung

$$r = \frac{3cm}{45°}\varphi$$

(b)



Gleichung: $$r = 3.6cm + \frac{1.4cm}{20°}\varphi$$ Polarachse ist dabei die Halbgerade PA.

Um die Gleichung in der Form r = a·φ schreiben zu können, bestimmen wir den Winkel, bei dem r=0 wird. Dies ist für φ ≈ -51,4° der Fall. Wird eine Halbgerade in P unter dem Winkel von -51,4° zur Halbgeraden PA gezeichnet, dann ist diese die gesuchte Polarachse (Tangente an die Spirale in P). Die Spirale hat bezüglich dieser Polarachse dann die Gleichung

$$r = \frac{1.4cm}{20°}\varphi$$

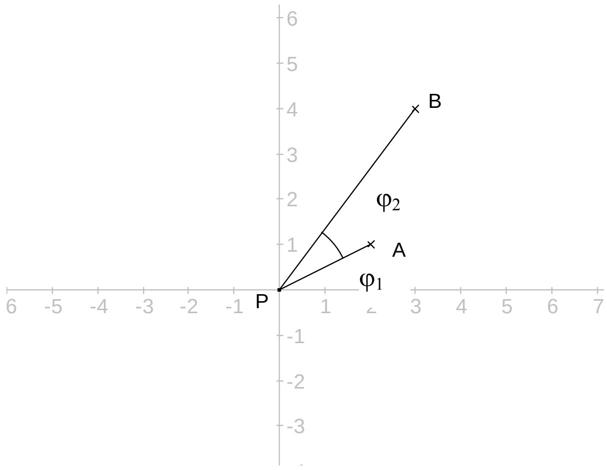
(c) Die Punkte A und B sind dieses Mal durch ihre kartesischen Koordinaten gegeben: A(2/1), B(3/4).

$\overline{PA} = \sqrt{5}$, $\overline{PB} = \sqrt{25} = 5$,

$\tan\varphi_1 = \frac{1}{2}$ $\varphi_1 \approx 26.6°$

$\tan\varphi_2 = \frac{4}{3}$ $\varphi_2 \approx 53.15°$

$\angle APB \approx 26.6°$ (ist hier zufällig genauso groß wie φ_1).



Gleichung bezüglich Pol P und **Polarachse PA**:

$$r = \sqrt{5} + \frac{5-\sqrt{5}}{\varphi_2 - \varphi_1}\varphi \approx 2.24 + 0{,}1039\,/° \cdot \varphi$$

Lage der Polarachse so, dass die Gleichung bezüglich Pol P und dieser Polarachse die **Form r = a·φ** annimmt:

$$0 = r = \sqrt{5} + \frac{5-\sqrt{5}}{\varphi_2 - \varphi_1}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = -\sqrt{5}\cdot\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{5-\sqrt{5}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1-\sqrt{5}} \approx \frac{26.6°}{-1{,}236} \approx -21{,}52°$$

Dieser Winkel ist von PA im Uhrzeigersinn abzutragen, der **Winkel der gesuchten Polarachse mit der positiven x-Achse** beträgt also 26.6°-21.52° = **4.48°**.

Gleichung bezüglich Pol P und positiver **x-Achse als Polarachse**:

Für $\varphi = -\varphi_1 = -26{,}6°$ $r = \sqrt{5} + \frac{5-\sqrt{5}}{\varphi_2 - \varphi_1}(-26.6°) \approx -0.528$, also ergibt sich die Gleichung

$r = -0{,}528 + 0{,}1039\,/° \cdot \varphi$

Man kann diese Gleichung systematischer auch sofort hinschreiben in der Form

$$r = \sqrt{5} + \frac{5-\sqrt{5}}{\varphi_2 - \varphi_1}(\varphi - \varphi_1) \approx -0{,}528 + 0{,}1039\,/° \cdot \varphi$$