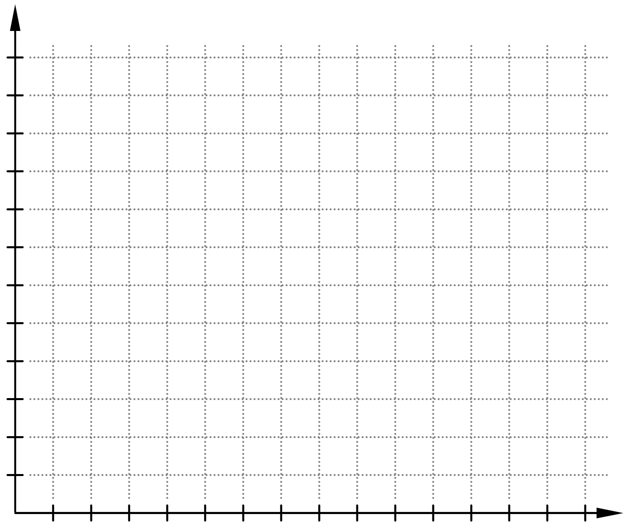
Wachstum und Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

Donald und Dagobert Duck beim Vermögensmanagement.
Donald Duck steckt jeden Monat 12 hart erarbeitete Taler in seinen Geldstrumpf. Gegenwärtig stecken 100 Taler im Stumpf. Wie viele Taler hat er nach 1, 2, 5, 12, m Monaten im Strumpf?
Dagobert Duck bringt seine 100 Taler zur Bank in Entenhausen (da sein Tresor schon bis oben voll ist) und lässt sein Geld arbeiten. Dort nimmt sein Kapital jeden Monat um 10% zu, und da er ausgezeichnete Beziehungen zur Bank hat, werden diese 10% Zunahme auch gleich seinem Kapital zugeschlagen. Wie viele Taler hat er nach 1, 2, 5, 12, m Monaten auf der Bank?
Skizzieren Sie den Anlageerfolg der beiden im Koordinatensystem.



Aufgabe 2

Dagoberts Vermögen wächst jedes Jahr um 5% und beträgt heute 100 Megataler. Auf das wie Vielfache steigt sein Vermögen in 1, 2, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 1.5, t Jahren?

Aufgabe 3

Gustav Gans' Vermögen verdoppelt sich alle 4 Jahre und beträgt heute 10 Taler. Auf das wie Vielfache steigt sein Vermögen in 4, 8, 12, 16, 2, 1, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 1.5, t Jahren?

Aufgabe 4

Der Radius einer Spirale verdoppelt sich bei jedem Umlauf um den Pol. Er beträgt beim Start 1 LE. Wie lang ist der Radius nach 360°, 720°, 1080°, 180°, 90°, 45°, α° ? Geben Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung für den Radius r(α) an.

Aufgabe 5

Der Radius einer Spirale verdreifacht sich bei jeder Drehung um 90° um den Pol. Er beträgt beim Start 1 LE. Wie lang ist der Radius nach 90°, 180°, 360°, 720°, 45°, α° ? Geben Sie eine allgemeine Formel zur Berechnung für den Radius r(α) an.

Exponentialfunktionen

Bei vielen Wachstumsvorgängen erhält man für die Größe einer Menge (Geld, Dicke eines Baumes usw.) eine Darstellung der Form $G = G_0 \cdot q^{k \cdot x}$

Dabei bedeuten

G_0: Anfangswert,
q : Wachstumsfaktor,
k : eine Konstante, die damit zusammenhängt, nach welcher Zunahme von x die Größe auf das q-fache anwächst,

z.B. $k=\frac{1}{30\text{Tage}}$, wenn x die Zeit in Tagen ist und die Größe in 30 Tagen auf das q-fache wächst.

Für jeden Wachstumsfaktor q ergibt sich so eine andere Exponentialfunktion mit Basis q. Diese können alle in die natürliche Exponentialfunktion mit der (unnatürlich hundskrummen) Basis e ≈ 2.718 umgerechnet werden. Somit haben alle diese Funktionen die gleiche Form.

Umrechnung in die natürliche Exponentialfunktion

Der Logarithmus zu einer Basis b aus einer Zahl a ist die Zahl c, für die $b^C=a$ ist. Man schreibt $c= \log_b(a)$.
c ist also der Exponent, wenn man eine Zahl b als a-Potenz schreiben will.

Speziell ist der natürliche Logarithmus $\ln(a) = \log_e(a)$ der Exponent von b als e-Potenz:

Frage: $e^{\text{Was?}} = 10$? Antwort: $e^{\ln(10)} = 10$, also etwa $e^{2.30} \approx 10$.

Allgemein: $\mathbf{e^{\ln(a)} = a}$

Aufgabe 6

Beantworten Sie die Fragen

(a) $e^{\text{Was?}} = 2$ (b) $e^{\text{Was?}} = 3$ (c) $e^{\text{Was?}} = 1$ (d) $e^{\text{Was?}} = 0.5$ (e) $e^{\text{Was?}} = 1.3$

Aufgabe 7

Benutzen Sie die Rechenregel über Potenzen („*Potenzen werden potenziert, indem man........*“.) um die gegebenen Funktionsterme in die natürliche Exponentialfunktion umzurechnen.

(a) $2^x = e^{k \cdot x}$ (b) $3^x = e^{k \cdot x}$ (c) $0.5^x = e^{k \cdot x}$ (d) $2^{4x} = e^{k \cdot x}$ (e) $1.3^{0.4x} = e^{k \cdot x}$