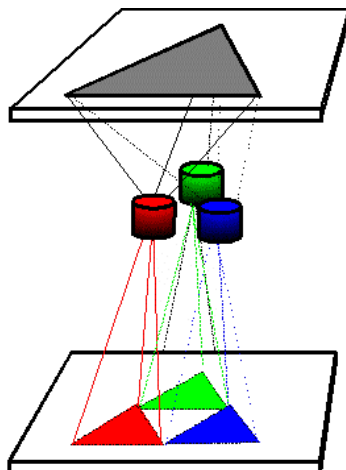


# *Copylab*

Ein System zum Experimentieren mit Fraktalen

R.Deissler

Pädagogische Hochschule Freiburg



# Inhalt

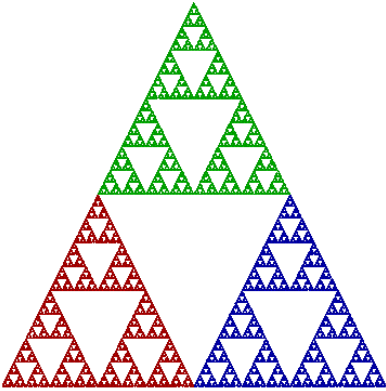

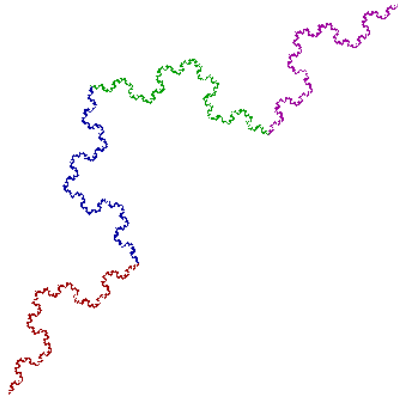
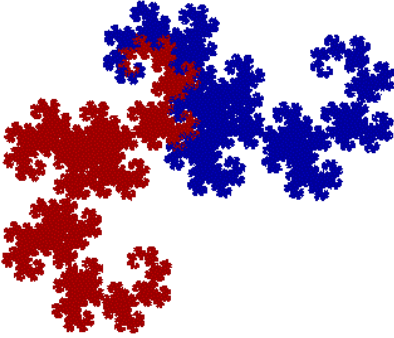
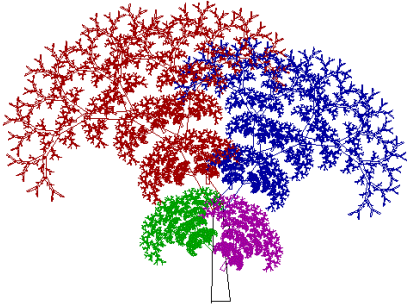
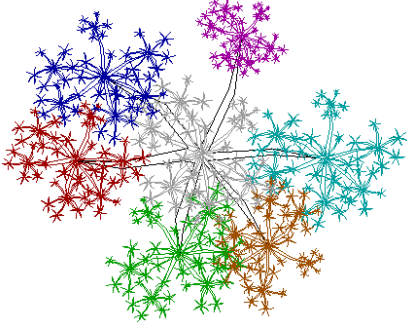
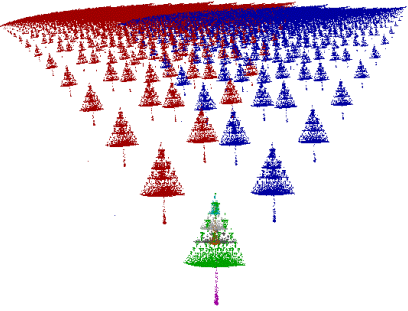
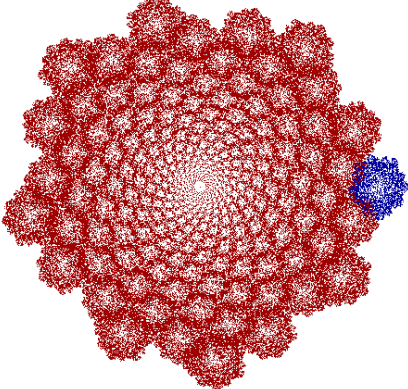
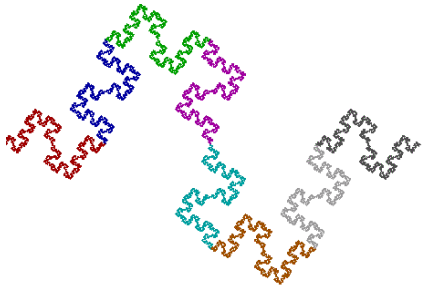
<i>Copylab</i> - Ein System zum Experimentieren mit Fraktalen .....	2
Der Kopierer von <i>Copylab</i> .....	4
Beschreibung des Kopierers von <i>Copylab</i> .....	5
Der Kopierer in der Kopierart „ <i>Normalkopierer</i> “ .....	6
Der Kopierer in der Kopierart „ <i>Normalkopierer ohne Löschen</i> “ .....	6
Der Kopierer in der Kopierart „ <i>Chaoskopierer</i> “ .....	7
Der Kopierer in den Kopierarten „ <i>Chaoskopierer schrittweise</i> “ und „ <i>Punktkopierer schrittweise</i> “ ....	7
Beschreibung der Abbildungseigenschaften der einfachen Linsen.....	8
Die Bedienung des Kopierers: Beschreibung aller Menüpunkte.....	10
Bestimmen der Dimension eines Fraktals .....	15
Collage.....	18

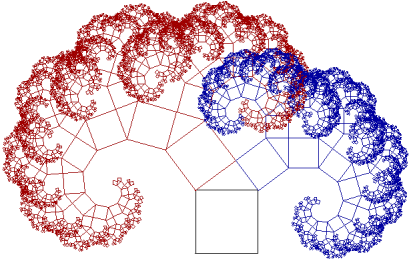
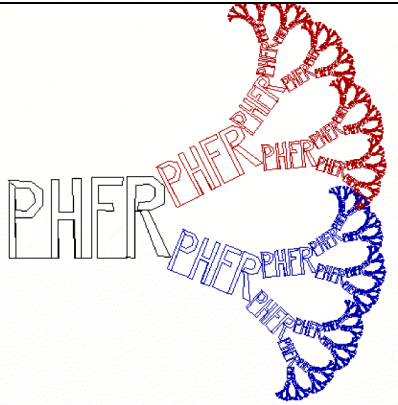
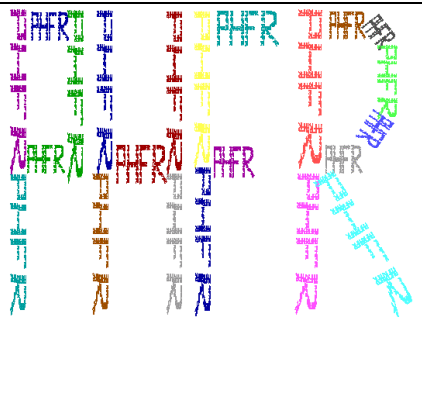
## **Copylab** - Ein System zum Experimentieren mit Fraktalen

Mit **Copylab** lassen sich Figuren der fraktalen Geometrie erzeugen, ohne viel über Mathematik zu wissen. Im Gegensatz zu vielen sogenannten „Fraktalgeneratoren“ lassen sich alle Erzeugungsprozesse wirklich verstehen.




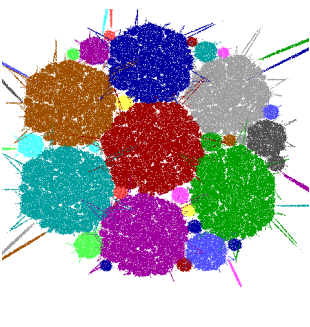




**Copylab** liegt das Modell eines ein Photokopierers mit mehreren Linsen zu Grunde, wie er vielfach in der Literatur unter Namen wie „Mehrfach-Kopier-System“ beschrieben ist. Mit diesem Kopierer können viele eigene Experimente durchgeführt werden.

Folgende Figuren wurden beispielsweise mit **Copylab** hergestellt.

		
Sierpinski-Dreieck	Farn	Schneeflockenkurve
		
Heighway-Drache	Baum	Dolde
		
Wald	Sonnenblume	3/2-Kurve (Dimension 3/2)

		
Pythagoras-Baum	PH-Baum	

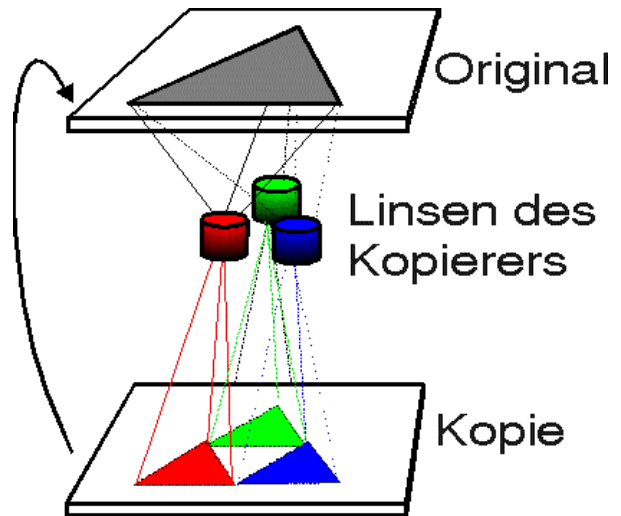
Viele der fraktalen Gebilde, die mit **Copylab** hergestellt werden können, sind Abbilder natürlicher Formen. Folgende Beispiele mögen dies belegen.

			
Farn		Blumenkohl	
			
Wilde Möhre		Wolken	

# Der Kopierer von *Copylab*

Das ist das Modell des Kopierers von *Copylab*:

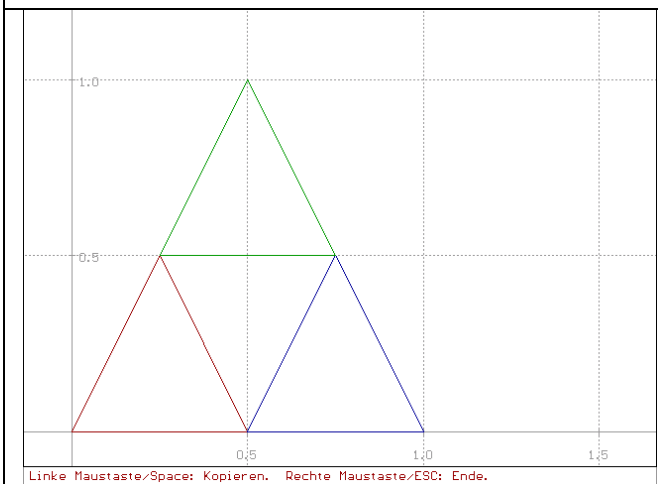
Ein Kopierer, der mehrere Linsen besitzt, die ein Original mehrfach verkleinert und verschoben abbilden. Die Verkleinerungsfaktoren und weitere Daten für die Linsen können frei gewählt werden.



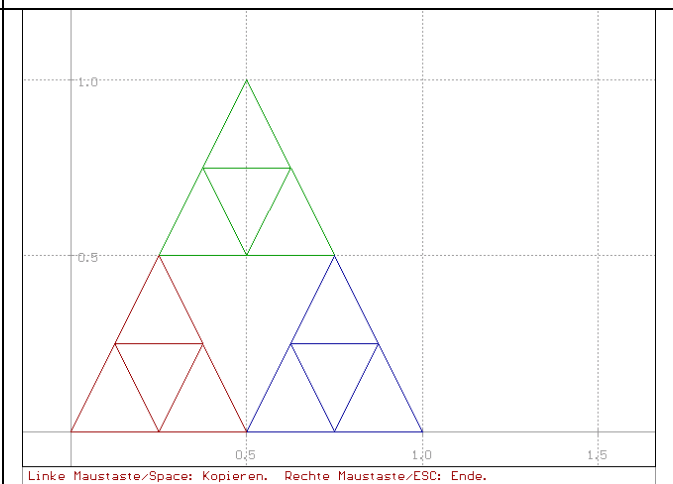
Und so sieht die Oberfläche zum Bedienen des Kopierers aus:

Die Daten für die Linsen des Kopierers können geändert werden

Die 1. Kopie eines Dreiecks mit dem Kopierer mit den *Sierpinski*-Linsendaten



Die 2. Kopie eines Dreiecks mit dem Kopierer mit den *Sierpinski*-Linsendaten



Linke Maustaste/Space: Kopieren. Rechte Maustaste/ESC: Ende.

Linke Maustaste/Space: Kopieren. Rechte Maustaste/ESC: Ende.



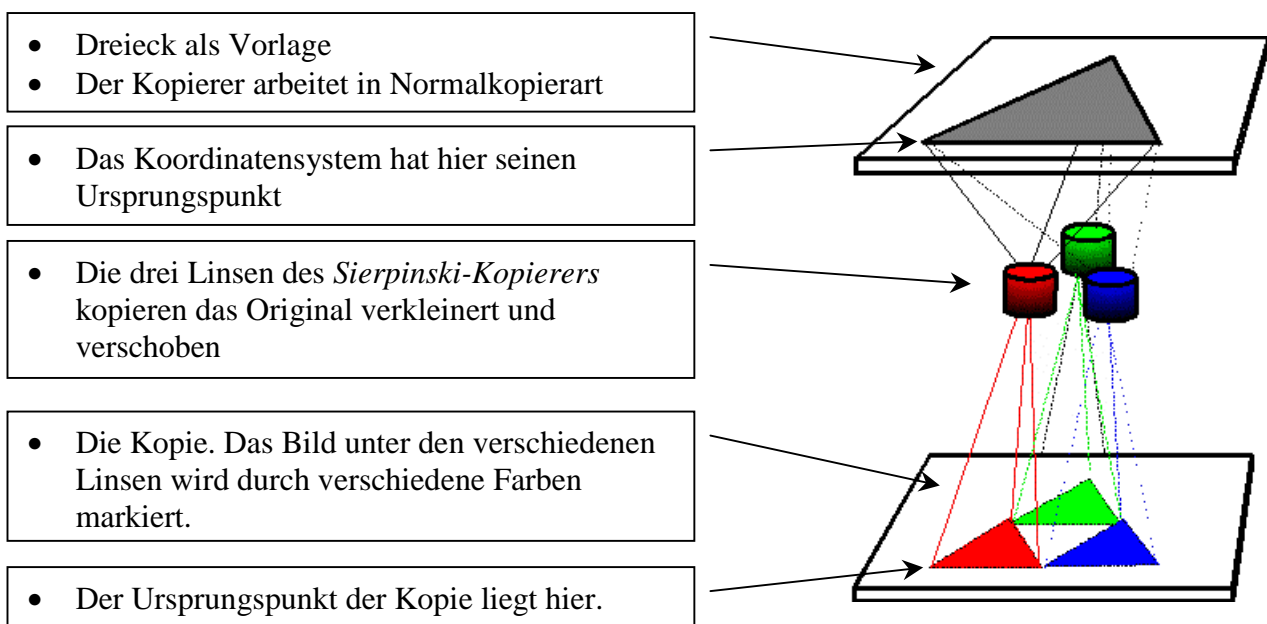
## Beschreibung des Kopierers von *Copylab*

Sie können in **Copylab** mit einem Kopierer arbeiten, der gegenüber den üblichen Photokopierern einige Besonderheiten aufweist.

1. Der Kopierer kann mit mehreren Linsen arbeiten.  
Die Linsenzahl ist von 1 bis 9 wählbar (→ [Linsenzahl](#)).  
Sie kann mit dem Menüpunkt **Kopierer/Linsenzahl ändern** eingestellt werden.  
Standardvorgabe ist 3.
2. Die einzelnen Linsen des Kopierers können mehr als die Linsen eines üblichen Photokopierers.  
Die Linsenart kann mit Menüpunkt **Kopierer/Linsenart ändern** verändert werden (→ [Linsenart](#)).  
Die Linsendaten bestimmen, was eine Linse leistet. Sie werden unter dem Menüpunkt **Linsendaten** verändert (→ [Linsendaten](#)).  
Standardvorgabe sind die Linsendaten für den *Sierpinski-Kopierer*.
3. Der Kopierer kann in mehreren Kopierarten arbeiten.  
Zum Wechseln der Kopierart dient der Menüpunkt **Kopierer/Kopierart wechseln** (→ [Kopierart wechseln](#)).  
Standardeinstellung ist die *Normalkopierart*.
4. Der sichtbare Bereich - das Koordinatensystem - kann verändert werden.  
Dazu dient der Menüpunkt **Kopierer/Koordinatensystem** (→ [Koordinatensystem](#)).

### Voreinstellungen des Kopierers sind:

Linsenzahl: 3  
 Linsendaten: Daten für den *Sierpinski-Kopierer*  
 Linsenart: Einfache Linsen  
 Kopierart: Normalkopierer  
 Vorlage: Dreieck  
 Koordinaten: x-Bereich ca. 0 bis 1  
 y-Bereich ca. 0 bis 1



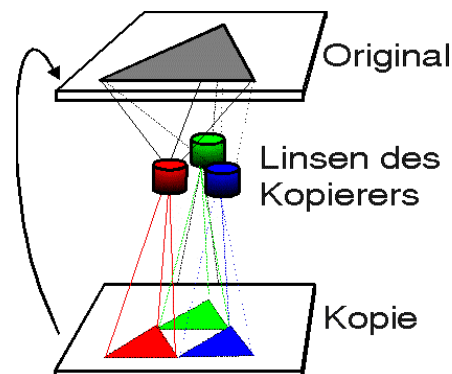
## Der Kopierer in der Kopierart „*Normalkopierer*“

Mit dem Menüpunkt **Kopieren** wird der Kopiervorgang gestartet. Danach kopiert der Kopierer auf Mausklick oder Tastendruck (Leertaste) einmal die Vorlage (→ [Vorlage](#)) bzw. die zuletzt angefertigte Kopie. Diese Kopierart entspricht am ehesten der eines handelsüblichen Photokopierers.

Der wesentliche Unterschied:

Hier wird mit mehreren Linsen kopiert, die eine Vorlage verkleinern, spiegeln, drehen und verschieben. Dies führt dazu, daß nach einem Kopiervorgang mehrere kleinere Kopien der ursprünglichen Vorlage vorhanden sind, die dann als neue Vorlage dienen. Dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt ( ausprobieren!!).

Um die Kopien mit den verschiedenen Linsen besser unterscheiden zu können, werden die Linsen mit "rote Linse", "grüne Linse" usw. bezeichnet und ihre Kopien haben diese Farbe.



Die Linsen sollen immer als Verkleinerungslinsen definiert werden. Dann nähert sich das Bild einem Grenzbild (Limesbild), das Selbstähnlichkeit aufweist (warum?). Verkleinern die Linsen nicht, dann "explodieren" die Kopien schließlich und man erhält kein Grenzbild mehr.

Man erkennt durch Ausprobieren: Das entstehende Grenzbild ist unabhängig von der Vorlage, mit der der Kopiervorgang begonnen wurde!!

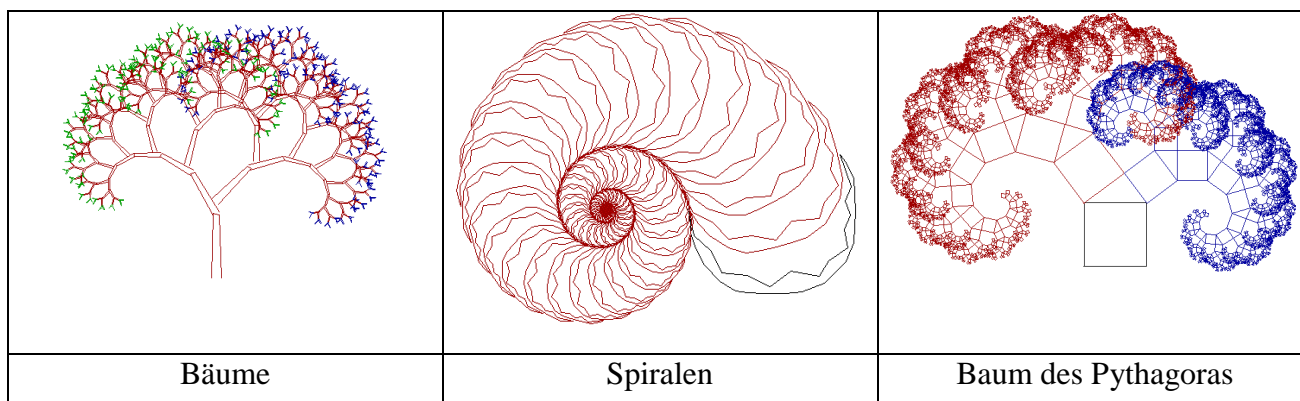
## Der Kopierer in der Kopierart „*Normalkopierer ohne Löschen*“

In dieser Kopierart kopiert der Kopierer auf Mausklick oder Leertaste einmal die Vorlage bzw. die zuletzt angefertigte Kopie, löscht aber die vorangehende Kopie nicht, wie dies in der Kopierart *Normalkopierer* der Fall ist.

In der *Normalkopierart* kann derselbe Effekt erreicht werden, wenn der Kopierer eine Linse enthält, die genau die Vorlage reproduziert (Faktor  $f=1$ , Drehwinkel und Verschiebungen 0), aber wegen der zusätzlichen Linse dauert die Bilderzeugung länger.

Mit einem üblichen Photokopierer kann man einen entsprechenden Effekt erzielen, wenn man bei jedem Kopiervorgang die (eventuell auf durchsichtiger Folie vorliegende) Originalvorlage mitkopiert.

In dieser Kopierart<sup>1</sup> können Bilder erzeugt werden, die nicht im strengen Sinne selbstähnlich oder selbstaffin sind. Solche Bilder sind nur in einzelnen Punkten selbstähnlich. Das heißt: nicht das ganze Bild läßt sich aus verkleinerten Kopien zusammensetzen, sondern nur Teile des Bildes sind verkleinerte Kopien des Ganzen. Bekannte Beispiele dafür sind:



<sup>1</sup> In der Literatur wird dieser Vorgang manchmal als "Iterated function system with condensation set" bezeichnet (z.B. M.Barnsley: Fractals everywhere).

### **Der Kopierer in der Kopierart „*Chaoskopierer*“**

Bei manchen Linsensystemen ist das Grenzbild nicht mit wenigen Kopierschritten genügend gut zu erreichen. Deshalb verwendet man die Kopierart *Chaoskopierer*.

Mit dieser Kopierart wird schnell eine Annäherung des Grenzbildes erreicht. Dazu wird ein einziger Punkt mit allen definierten Linsen in zufälliger Reihenfolge immer wieder abgebildet. Eine Vorlage ist in diesem Fall nicht nötig und wird auch nicht benutzt. Je länger der Kopierer zu dieser Annäherung Zeit hat, um so besser wird dieses Bild.

Der Kopiervorgang wird mit der rechten Maustaste oder ESC-Taste beendet.

### **Der Kopierer in den Kopierarten „*Chaoskopierer schrittweise*“ und „*Punktkopierer schrittweise*“**

Um die Bildentstehung des Bildes beim *Chaoskopierer* zu verstehen wurden diese beiden Kopierarten vorgesehen. Sie sollen kein gutes Grenzbild liefern, sondern nur zum Verständnis der Vorgänge beitragen und zum Experimentieren dienen.

Die Bildentstehung des Bildes beim *Chaoskopierer* kann hier schrittweise nachvollzogen werden. Ein gut sichtbarer Punkt wird auf Mausklick oder Tastendruck jeweils einmal mit einer der Linsen abgebildet.

Bei *Chaoskopierer schrittweise* erfolgt die Auswahl der Linsen zufällig, bei *Punktkopierer schrittweise* können die Abbildungslinsen mit den Tasten 1,2,...ausgewählt werden. Damit läßt sich zeigen, warum beim *Chaoskopierer* die Linsenwahl nicht einem festen Schema folgen darf ( z.B. in der Linsen-Folge 1,2,3,3, 1,2,3,3,...). Ausprobieren und Vermutungen anstellen!



## Beschreibung der Abbildungseigenschaften der einfachen Linsen

Die Linsen können wie bei einem üblichen Photokopierer verkleinern. Den Verkleinerungsfaktor wollen wir mit  $f$  bezeichnen. Die verkleinerte Kopie liegt dabei wieder in der gleichen Weise auf dem Blatt wie das Original (Bild 1 und 2).

Neben Verkleinerungen, können die Linsen die Kopie noch um einen Winkel  $w$  drehen und parallel zu den Blattkanten verschieben. Bezeichnet man die Richtung der Blattkanten als  $x$ - und  $y$ -Richtung, dann wird die Verschiebung durch zwei Zahlen  $v_x$  und  $v_y$  festgelegt, die angeben, wie weit die Kopie jeweils in diese Richtungen verschoben wird (Bild 3). Außerdem kann die Vorlage zuvor noch an den beiden Achsen gespiegelt werden (Bild 4).

Bild 1

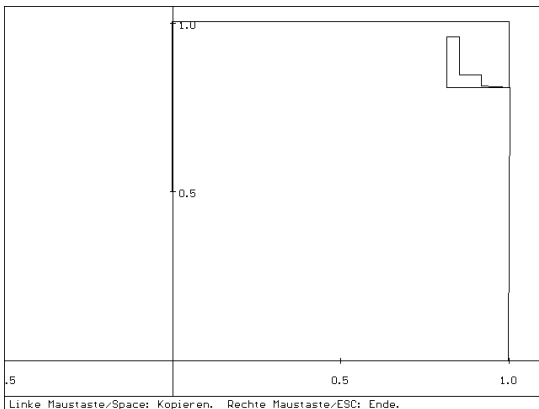
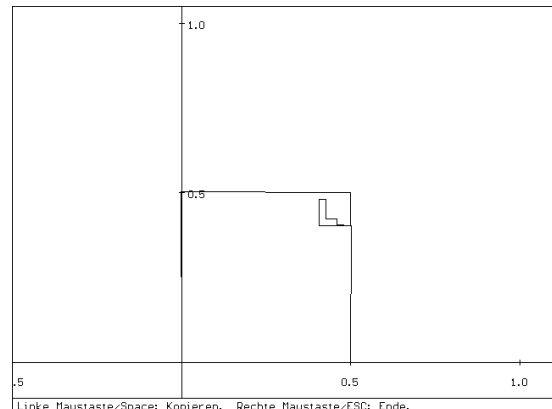


Bild 2



Die Vorlage...

kopiert mit einer normalen Linse,...

Bild 3

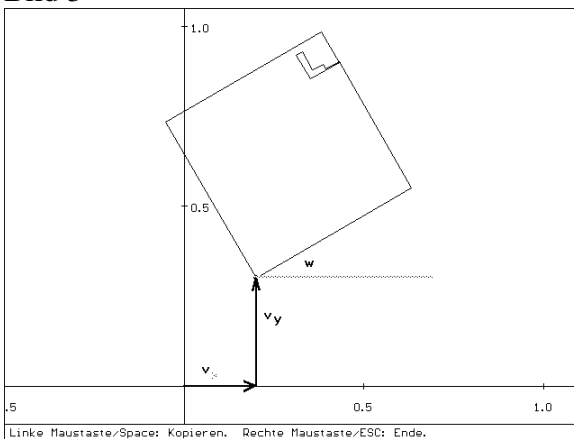
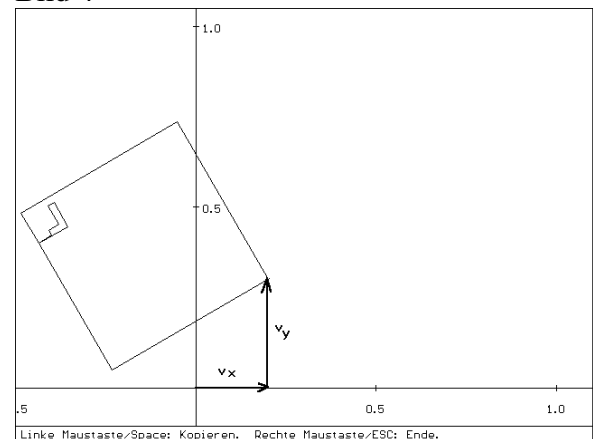


Bild 4



kopiert mit einer *COPYLAB*-Linse mit Drehung um den Winkel  $w$  und Verschiebung um  $v_x$  und  $v_y$  ...

... und kopiert mit einer *COPYLAB*-Linse mit zusätzlicher Spiegelung

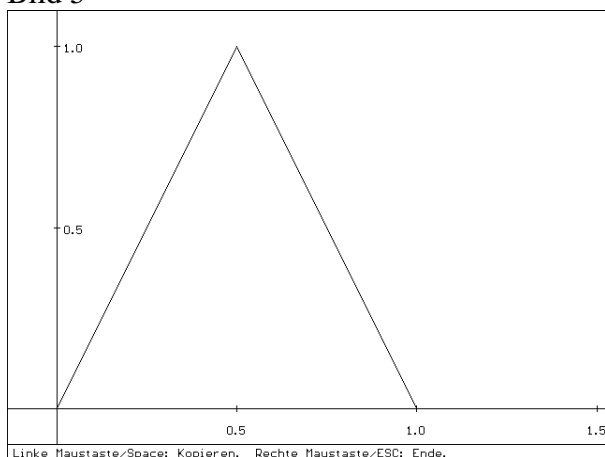
### Kurz:

Eine einfache Linse des *COPYLAB*-Kopierers wird durch vier Zahlen beschrieben,  
 $f$  der Faktor für die Verkleinerung,  
 $w$  für den Drehwinkel,  
 $v_x, v_y$  für die Verschiebung,  
 sowie Angaben über die Spiegelungen.

Kopiert man mit **einer** Verkleinerungslinse eine Vorlage, benutzt die Kopie als neue Vorlage, kopiert nochmals mit dieser Linse und wiederholt den Vorgang genügend oft, dann wird das Bild immer kleiner und zieht sich schließlich auf einen Punkt zusammen, der schließlich beim Kopieren nicht mehr weiter verändert wird - sicherlich keine sehr erstaunliche Erscheinung.

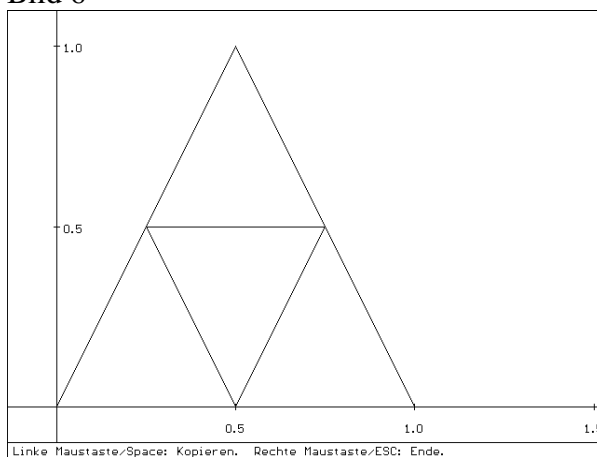
*COPYLAB* stellt dagegen einen Kopierer zur Verfügung, bei dem gleichzeitig mit **mehreren Linsen** kopiert werden kann. Wird auch hier der Kopiervorgang immer wieder wiederholt, dann ergibt sich ein völlig anderes Bild. Jetzt nähern sich die entstehenden Bilder zwar auch einem Grenzbild an. Dieses Grenzbild ist jedoch kein Punkt, sondern eine Figur mit einer ganz besonderen Eigenschaft, die sich unmittelbar aus ihrer Entstehung erklärt: sie ist **selbstähnlich**. Bild 5 bis Bild 8 zeigen, wie aus einem Dreieck als Vorlage beim Kopieren mit drei geeigneten Linsen schließlich das bekannte Sierpinski-Dreieck entsteht.

Bild 5



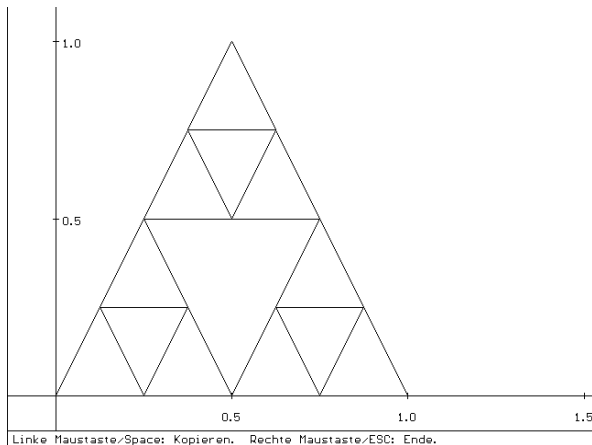
Die Vorlage.

Bild 6



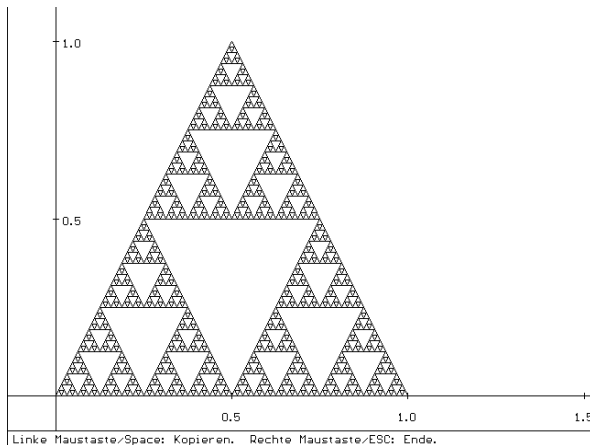
Einmal kopiert....

Bild 7



und nochmals kopiert...

Bild 8



und nach vielen Kopiervorgängen.

## Die Bedienung des Kopierers: Beschreibung aller Menüpunkte

### Übersicht über das Menü

<i>Kopieren</i>	<i>Linsendaten</i>	<i>Kopierer</i>	<i>Vorlage</i>	<i>Dimension</i>	<i>Collage</i>	<i>Extras</i>
		<i>Linsenzahl ändern</i> <i>Linsenart ändern</i>  <i>Koordinatensystem</i> <i>Kopierart wechseln</i>  <i>Kopierer speichern</i> <i>Kopierer laden</i>	<i>Dreieck</i> <i>Quadrat</i> <i>Selbst erzeugen</i> <i>Speichern</i> <i>Laden</i>	<i>Bestimmen</i> <i>Einstellungen</i>	<i>Vorlage</i> <i>Erzeugen</i> <i>Speichern</i> <i>Laden</i> <i>Collage neu</i> <i>Collage verbessern</i>	<i>Change Dir.</i> <i>DOS Shell</i> <i>Info</i> <i>Graphik</i> <i>Maus</i> <i>Rechner</i>

### *Kopieren*

Auf Mausklick oder entsprechenden Tastendruck kopiert der Kopierer

- mit den definierten Linsen (siehe auch [Linsendaten](#), [Linsenzahl](#), [Linsenart](#))
- entsprechend der eingestellten Kopierart (siehe auch [Kopierart wechseln](#))

wie folgt:

- Wenn die Kopierart „Normalkopierer“ eingestellt ist, wird einmal die Vorlage bzw. die letzte Kopie kopiert.
- Wenn die Kopierart „Normalkopierer ohne Löschen“ eingestellt ist, wird einmal die Vorlage bzw. die letzte Kopie kopiert, ohne daß die zuletzt erzeugte Kopie gelöscht wird.
- Wenn die Kopierart „Chaoskopierer“ eingestellt ist, wird eine Annäherung des „Grenzbildes“ (Limesbild) des Kopierers gezeigt.  
Dazu wird ein einziger Punkt mit allen definierten Linsen in zufälliger Reihenfolge immer wieder abgebildet. Eine Vorlage ist in diesem Fall nicht nötig und wird auch nicht benutzt.  
Je länger der Kopierer zu dieser Annäherung Zeit hat, umso besser wird dieses Bild.  
Der Abbruch des Kopiervorgangs erfolgt mit der rechten Maustaste oder ESC-Taste.
- Wenn die Kopierart „Chaoskopierer schrittweise“ oder „Punktkopierer schrittweise“ eingestellt ist, kann die Bildentstehung des Bildes beim „Chaoskopierer“ schrittweise nachvollzogen werden. Ein gut sichtbarer Punkt wird auf Mausklick oder Tastendruck jeweils einmal abgebildet.  
Bei „Chaoskopierer schrittweise“ erfolgt dies zufällig, bei „Punktkopierer schrittweise“ können die Abbildungslinsen mit den Tasten 1,2,..ausgewählt werden. Damit läßt sich zeigen, warum beim Chaoskopierer die Linsenwahl nicht einem festen Schema folgen darf ( z.B. Linsen 1,2,3,3, 1,2,3,3,...).

### *Linsendaten*

Hier können die Daten der einzelnen Linsen verändert werden. Soll die Linsenzahl des Kopierers verändert werden, muß der Menüpunkt ***Kopierer/Linsenzahl ändern*** gewählt werden.

Welche Daten für die Linsen angegeben werden können, hängt von der Linsenart des Kopierers ab (→ [Linsenart](#) ).

Die Linsenart kann mit dem Menüpunkt ***Kopierer/Linsenart ändern*** gewählt werden.

Zur Bedeutung der einzelnen Daten im einzelnen siehe Beschreibung des Kopierers (→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#)).

**Einfache Linsen:**

f	Verkleinerungsfaktor der Linse (Längenfaktor, kein Flächenfaktor)
w	Drehwinkel der Linse (in Grad) Positive Werte: Drehung im Gegenuhrzeigersinn Negative Werte: Drehung im Uhrzeigersinn
$v_x$	Verschiebung in x-Richtung (horizontal)
$v_y$	Verschiebung in y-Richtung (vertikal)
x-Sp	Spiegelung an der x-Achse
y-Sp	Spiegelung an der y-Achse

**Achtung!**

- Verkleinerungen und Drehungen erfolgen immer um den Ursprungspunkt des Kopierers.
- Zuerst wird verkleinert und gespiegelt, dann gedreht und erst danach verschoben.

**Affine Linsen:**

$f_x$	Verkleinerungsfaktor der Linse in x-Richtung (alle Längen in horizontaler Richtung werden mit diesem Faktor multipliziert)
$f_y$	Verkleinerungsfaktor der Linse in y-Richtung (alle Längen in vertikaler Richtung werden mit diesem Faktor multipliziert)
$w_x$	Drehwinkel aller Linien in x-Richtung (in Grad) Positive Werte: Drehung im Gegenuhrzeigersinn Negative Werte: Drehung im Uhrzeigersinn
$w_y$	Drehwinkel aller Linien in y-Richtung (in Grad) Positive Werte: Drehung im Gegenuhrzeigersinn Negative Werte: Drehung im Uhrzeigersinn
$v_x$	Verschiebung in x-Richtung (horizontal)
$v_y$	Verschiebung in y-Richtung (vertikal)

**Achtung !**

- Ist  $w_x=w_y$  und  $|f_x|=|f_y|$ , dann wirkt die Linse wie eine einfache Linse. Ein negatives Vorzeichen von  $f_x$  bedeutet Spiegelung an der y-Achse, negatives Vorzeichen von  $f_y$  Spiegelung an der x-Achse,
- Ist  $f_x=f_y$ , dann ist die Reihenfolge von Verkleinerung und Drehung ohne Bedeutung.
- Sind  $f_x$  und  $f_y$  verschieden, dann spielt die Reihenfolge aller drei Abbildungsoperationen eine wesentliche Rolle:

**Reihenfolge der Operationen**

Zuerst Verkleinerungen (einschließlich Spiegelungen),  
dann Drehungen,  
zuletzt Verschiebungen.

Verkleinerungen mit Spiegelungen erhält man z.B. mit  $f_x = -0.5$  und  $f_y = 0.5$  sowie  $w_x = w_y$  (Spiegelung an der y-Achse). Daher sind für affine Linsen keine gesonderte Angabe von Spiegelungen vorgesehen.

Für Mathematiker:

Die Abbildung

$$A(x, y) = (x', y') \text{ wird durch die Gleichungen } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \cdot \cos w_x & -f_y \cdot \sin w_y \\ f_x \cdot \sin w_x & f_y \cdot \cos w_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

beschrieben.

### ***Linsenzahl***

Hier kann die Zahl der Linsen des Kopierers von 1 bis 9 eingestellt werden. Die Linsenart (→ [Linsenart](#)) bleibt dabei die gleiche wie zuvor.

Die verschiedenen Linsen haben zur besseren Unterscheidung verschiedene Farben.

Wird die Linsenzahl verkleinert, dann bleiben die Linsendaten (→ [Linsendaten](#)) der überzähligen Linsen erhalten und stehen genauso wieder zur Verfügung, wenn die Linsenzahl später wieder erhöht wird.

Beim Laden eines Kopierers wird die Linsenzahl benutzt, mit der der Kopierer gespeichert war (→ [Kopierer laden](#)).

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Linsenart***

Es gibt zwei Arten von Linsen:

- einfache Linsen,
- affine Linsen.

Diese unterscheiden sich in ihren Abbildungseigenschaften. Affine Linsen sind allgemeiner als einfache Linsen.

Einfache Linsen lassen nur

- Verkleinerungen
- Spiegelungen an den Koordinatenachsen
- Drehungen um den Ursprung
- Verschiebungen

zu (mathematisch: Ähnlichkeitsabbildungen).

Die Art der Linsen gibt an, welche Linsendaten einstellbar sind (→ [Linsendaten](#)).

Zunächst sollte man sich mit dem Kopierer mit einfachen Linsen vertraut machen.

Affine Linsen lassen kompliziertere Abbildungen zu (mathematisch: Affine Abbildungen). Die Darstellung dieser Abbildungen wird unter Linsendaten beschrieben (→ [Linsendaten](#)).

Soll auch nur eine Linse des Kopierers eine affine Linse sein, dann muß als Linsenart „Affine Linsen“ gewählt werden.

Die Einstellung der Linsenart beeinflußt auch die Art der Abbildungen, die für die Collage zur Verfügung stehen (→ [Collage](#)).

Es ist zu beachten, daß im Falle affiner Linsen auch die Darstellung der einfachen Abbildungen wie Drehungen, Verkleinerungen und Spiegelungen verändert und damit komplizierter wird.

Drehungen bei affinen Linsen:



Für eine affine Linse werden zwei Winkel  $w_x$  und  $w_y$  angegeben, die die Drehungen der x- und y-Achse einzeln festlegen. Sind  $w_x$  und  $w_y$  gleich, dann liegt eine gewöhnliche Drehung vor.

Verkleinerungen, Spiegelungen bei affinen Linsen:

Für affine Linsen werden Verkürzungsfaktoren  $f_x$  und  $f_y$  für die beiden Achsenrichtungen einzeln angegeben.

Eine gewöhnliche Verkleinerung liegt dann vor, wenn die beiden Faktoren  $f_x$  und  $f_y$  gleich sind.

Zusätzliche Spiegelungen an den Achsen ergeben sich, wenn die Beträge der Faktoren gleich sind und einer oder beide negativ sind.

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Kopierart wechseln***

Hier können verschiedene Arbeitsweisen des Kopierers gewählt werden. Diese sind alle mit den beiden Linsenarten und allen Linsendaten möglich.

### **Kopierart *Normalkopierer*:**

Auf Mausclick oder entsprechenden Tastendruck kopiert der Kopierer einmal die Vorlage bzw. die zuletzt angefertigte Kopie. Diese Kopierart entspricht am ehesten der eines handelsüblichen Photokopierers.

Bei dieser Kopierart können auch Linsen verwandt werden, die keine Verkleinerung bewirken. Ist ein „Verkleinerungsfaktor“ größer als 1, dann werden die Bilder mit jedem Kopiervorgang immer größer.

### **Kopierart *Chaoskopierer***

Es wird eine Annäherung des „Grenzbildes“ (Limesbild) des Kopierers gezeigt.

Dazu wird ein einziger Punkt mit allen definierten Linsen in zufälliger Reihenfolge immer wieder abgebildet. Eine Vorlage ist in diesem Fall nicht nötig und wird auch nicht benutzt.

Je länger der Kopierer zu dieser Annäherung Zeit hat, um so besser wird dieses Bild.

Abbruch des Kopiervorgangs mit der rechten Maustaste oder *ESC*-Taste.

Bei dieser Kopierart können nur Linsen verwandt werden, die eine Verkleinerung bewirken. Ist ein „Verkleinerungsfaktor“ größer als 1, dann „explodiert“ der Kopierer.

Für Linsen mit „Verkleinerungsfaktor“ gleich 1 hat der Kopierer kein eindeutig definiertes Grenzbild.

### **Kopierart *Chaoskopierer schrittweise*, Kopierart *Punktkopierer schrittweise***

Um die Bildentstehung des Bildes beim *Chaoskopierer* zu verstehen wurden diese beiden Kopierarten vorgesehen. Sie sollen kein gutes Grenzbild liefern, sondern nur zum Verständnis der Vorgänge beitragen und zum Experimentieren dienen.

Die Bildentstehung des Bildes beim *Chaoskopierer* kann hier schrittweise nachvollzogen werden. Ein gut sichtbarer Punkt wird auf Mausclick oder Tastendruck jeweils einmal mit einer der Linsen abgebildet.

Bei *Chaoskopierer schrittweise* erfolgt die Auswahl der Linsen zufällig, bei *Punktkopierer schrittweise* können die Abbildungslinsen mit den Tasten 1,2,...ausgewählt werden. Damit läßt sich zeigen, warum beim *Chaoskopierer* die Linsenwahl nicht einem festen Schema folgen darf ( z.B. in der Linsen-Folge 1,2,3,3, 1,2,3,3,...). Ausprobieren und Vermutungen anstellen!

### **Kopierart *Normalkopierer ohne Löschen***

In dieser Kopierart kopiert der Kopierer auf Mausklick oder Leertaste einmal die Vorlage bzw. die zuletzt angefertigte Kopie, löscht aber die vorangehende Kopie nicht, wie dies in der Kopierart *Normalkopierer* der Fall ist.

In der *Normalkopierart* kann derselbe Effekt erreicht werden, wenn der Kopierer eine Linse enthält, die genau die Vorlage reproduziert (Faktor  $f=1$ , Drehwinkel und Verschiebungen 0), aber wegen der zusätzlichen Linse dauert die Bilderzeugung länger.

Mit einem üblichen Photokopierer kann man einen entsprechenden Effekt erzielen, wenn man bei jedem Kopiervorgang die (eventuell auf durchsichtiger Folie vorliegende) Originalvorlage mitkopiert.

In dieser Kopierart<sup>2</sup> können Bilder erzeugt werden, die nicht im strengen Sinne selbstähnlich oder selbstaffin sind. Solche Bilder sind nur in einzelnen Punkten selbstähnlich. Das heißt: nicht das ganze Bild läßt sich aus verkleinerten Kopien zusammensetzen, sondern nur Teile des Bildes sind verkleinerte Kopien des Ganzen. Bekannte Beispiele dafür sind:

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Koordinatensystem***

Hier kann der vom Kopierer gezeigte Bereich verändert werden. Anzugeben sind die jeweils kleinsten und größten Werte auf den Achsen, die unbedingt zu sehen sein sollen. Die Größen werden stets so angepaßt, daß die Winkel auf dem Bildschirm nicht verzerrt werden.

Die Achsen und ein Gitter aus gepunkteten Linien können sichtbar oder unsichtbar gemacht werden. In der Standardeinstellung sind sowohl die Achsen als auch das Gitter sichtbar.

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Kopierer laden***

Hiermit werden die Linsendaten eines früher definierten und gespeicherten Kopierers von einer Diskette/Platte geladen. Die gerade definierte Linsenart bleibt dabei erhalten, wenn dies möglich ist: Affine Kopierer, deren Linsen nicht alle einfach sind, werden auch als affine Kopierer wieder geladen, auch wenn vorher die Kopierart „Einfach“ eingestellt war. Die Linsenzahl wird angepaßt. Die Namen der Dateien auf der Diskette/Platte müssen die Kennzeichnung „.KOP“ tragen. Wird keine Erweiterung mit „.xxx“ angegeben, dann wird „.KOP“ automatisch ergänzt.

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Kopierer speichern***

Hiermit werden die Linsendaten des gerade definierten Kopierers auf einer Diskette/Platte gespeichert. Die Linsenart und die Linsenzahl bleiben dabei erhalten (nur affine Kopierer, deren Linsen alle einfach sind, werden auch als einfache Kopierer gespeichert). Die Namen der Dateien auf der Diskette/Platte müssen die Kennzeichnung „.KOP“ tragen. Wird keine Erweiterung mit „.xxx“ angegeben, dann wird „.KOP“ automatisch ergänzt.

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Vorlage***

Eine Vorlage ist ein Streckenzug, der mit dem Kopierer kopiert werden kann (wenn die Kopierart "Normalkopierer" eingestellt ist ).

Mit dem Menüpunkt "Vorlage" können Sie eine Vorlage

- fest als Dreieck oder Quadrat vorgeben,
- mit der Maus oder den Richtungstasten selbst erzeugen ( → [Vorlage selbst erzeugen](#) )

<sup>2</sup> In der Literatur wird dieser Vorgang manchmal als "Iterated function system with condensation set" bezeichnet (z.B. M.Barnsley: Fractals everywhere).

- auf Diskette/Platte speichern ( → [Vorlage speichern](#) ).
- von Diskette/Platte laden ( → [Vorlage laden](#) ).

### ***Vorlage selbst erzeugen***

Mit der Maus oder den Richtungstasten können Sie einen Streckenzug als Vorlage für den {Normalkopierer:KopArtWechsel} erzeugen.

Ein kleines Kreuz (und der Mauszeiger) markiert einen Laufpunkt, der mit einem linken Mausklick oder der Eingabe-Taste festgehalten wird. Die noch nicht festgelegte Strecke wird gestrichelt gezeigt, der feste Streckenzug als durchgehende Linie.

Ende der Erzeugung mit rechtem Mausklick oder ESC-Taste.

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Vorlage laden***

Hiermit wird eine früher definierte und gespeicherte {Vorlage:VorErzeugen} von einer Diskette/Platte geladen. Die gerade definierte Vorlage geht dabei verloren.

Die Namen der Dateien auf der Diskette/Platte müssen die Kennzeichnung ".VOR" tragen. Wird keine Erweiterung mit ".xxx" angegeben, dann wird ".VOR" automatisch ergänzt.

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

### ***Vorlage speichern***

Hiermit wird die gerade definierte {Vorlage:VorErzeugen} auf einer Diskette/Platte gespeichert.

Die Namen der Dateien auf der Diskette/Platte müssen die Kennzeichnung ".VOR" tragen. Wird keine Erweiterung mit ".xxx" angegeben, dann wird ".VOR" automatisch ergänzt.

(→ [Beschreibung Kopierer allgemein](#))

## **Bestimmen der Dimension eines Fraktals**

Unter dem Menüpunkt *Dimension* kann die Dimension eines Fraktals experimentell näherungsweise bestimmt werden. Dieser Punkt ist ein wenig theoretisch und eher für Mathematiker gedacht!

### ***Selbstähnlichkeits-Dimension***

Streng selbstähnliche Figuren sind Figuren, die aus verkleinerten Kopien der gesamten Figur zusammengesetzt sind. Wenn diese Kopien alle mit dem gleichen Maßstab  $f$  verkleinert sind, kann man für die Figur in einfacher Weise eine Dimension, die *Selbstähnlichkeits-Dimension* definieren.

Dabei verallgemeinert man den klassischen Dimensionsbegriff:

Eine Strecke ist zusammengesetzt aus 2 mit dem (linearen) Faktor 0.5 verkleinerten Kopien von sich selbst. Ein Quadrat läßt sich aus 4 mit dem Faktor 0.5 verkleinerten Kopien zusammensetzen usw. Für die Dimension  $D$  erhält man dabei die Gleichung:

$$n = \left( \frac{1}{f} \right)^D$$

wobei  $n$  die Zahl der Kopien und  $f$  den Verkleinerungsfaktor bezeichnet.

D läßt sich mit Hilfe der Logarithmusfunktion lg daraus berechnen:

$$D = \frac{\lg n}{\lg \frac{1}{f}}$$

Für eine Strecke erhält man so  $D=1$ , für ein Quadrat  $D=2$  und für einen Würfel  $D=3$ .

Diese Definition läßt sich nun unmittelbar auf streng selbstähnliche Figuren erweitern, wenn der Verkleinerungsfaktor  $f$  bei allen Kopien derselbe ist.

Das *Sierpinski-Dreieck* (voreingestellte Figur auf diesem Kopierer) kann man zusammensetzen aus 3 mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  verkleinerten Kopien, also ist  $n=3$  und  $f=\frac{1}{2}$ . Daraus erhält man den Wert

$$D = \frac{\lg 3}{\lg \frac{1}{0.5}} = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1.58496$$

Dieser gebrochene Wert ist der Grund für den Namen "Fraktal".

Für selbstähnliche Figuren, bei denen die Verkleinerungsfaktoren der einzelnen Verkleinerungen nicht alle gleich sind, kann man diese Definition noch verallgemeinern:

Sind alle Faktoren gleich, kann man die Dimension  $D$  bestimmen aus der Gleichung  $n \cdot f^D = 1$ . Diese Gleichung läßt sich verallgemeinern zu  $f_1^D + f_2^D + \dots + f_n^D = 1$ . Hier kann man keinen einfachen geschlossenen Ausdruck für die Lösung  $D$  angeben,  $D$  kann aber näherungsweise bestimmt werden.

### ***Raster-Dimension***

Für *beliebige* Figuren, die sich nicht einfach aus verkleinerten Kopien von sich selbst zusammensetzen lassen, kann man in anderer Weise eine Dimension erklären. Dazu geht man eher experimentell vor.

Man legt über die Figur mehrere Quadrat-Raster mit immer kleiner werdenden Rasterlängen  $r$ . Dabei zählt man jeweils die Anzahl  $N(r)$  der Kästchen, die einen Teil der Figur treffen. Wenn man dieses Verfahren auf eine Strecke oder ein Quadrat anwendet, erhält man wieder folgenden Zusammenhang mit ihrer Dimension  $D$ :

$$N(r) = k \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

mit einer Konstante  $k$ , die von der Größe der Figur abhängt. Daraus ergibt sich

$$\lg N(r) = D \cdot \lg \frac{1}{r} + b,$$

wobei  $b = \lg k$  ist.

Zur Bestimmung von  $D$  erzeugt man für mehrere Rasterlängen  $r$  das Raster, bestimmt die Zahl  $N(r)$  der getroffenen Kästchen und trägt die Ergebnisse in ein Schaubild ein, in dem auf der waagerechten Achse  $\lg \frac{1}{r}$  und auf der senkrechten Achse  $\lg N(r)$  aufgetragen wird.  $D$  ergibt sich dann als Steigung der

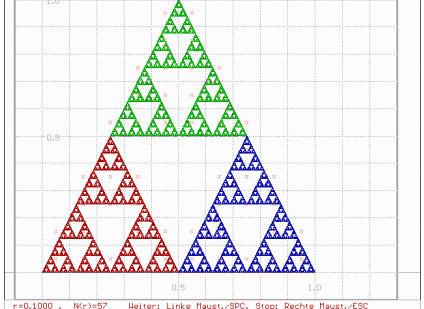
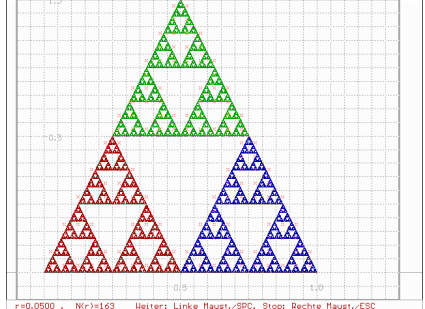
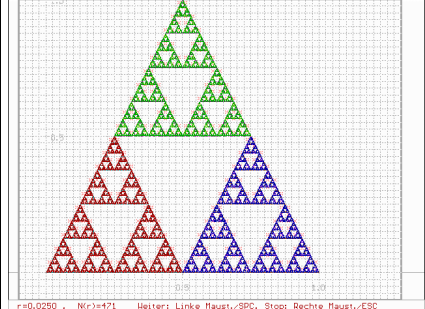
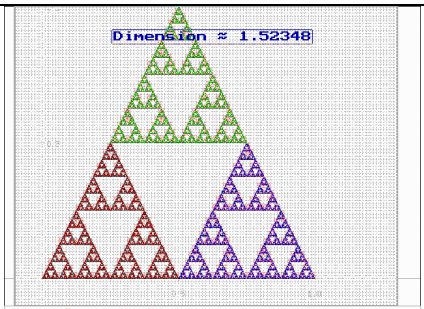
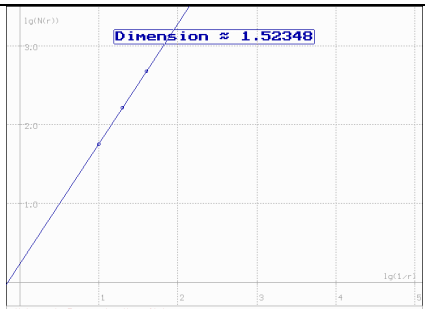
Geraden, die die Meßpunkte annähert. Für streng selbstähnliche Figuren, bei denen sich die Kopien nicht überschneiden, hat die eben definierte Dimension denselben Wert wie die oben definierte Selbstähnlichkeitsdimension. Wegen des Bestimmungsverfahrens heißt diese Dimension Raster-Dimension, Gitter-Dimension, Kästchen-Dimension oder ähnlich.

Unter dem Menüpunkt ***Dimension*** kann für beliebige Figuren, die der Kopierer erzeugt, die Raster-Dimension bestimmt werden. Dazu wird zuerst die Figur mit dem eingestellten Kopierer erzeugt (entweder Normal- oder Chaoskopierer), einige Raster erzeugt, die Kästchen gezählt,  $D$  berechnet und

der  $\lg N(r) - \lg(1/r)$  Graph ausgegeben. Zu den möglichen Einstellungen siehe [Einstellungen zur Dimensionsbestimmung](#).

### Hausdorff-Dimension

Für beliebige Figuren, kann man in ganz allgemeiner Weise eine Dimension erklären. Diese Definition ist allerdings recht schwierig und kann hier nicht angegeben werden (Hausdorff-Dimension). Die Raster-Dimension stimmt für viele (nicht zu krankhafte) Figuren mit der Hausdorff-Dimension überein. Die folgenden Bilder zeigen die Bestimmung der Raster-Dimension für das Sierpinski-Dreieck mit **Copylab**.

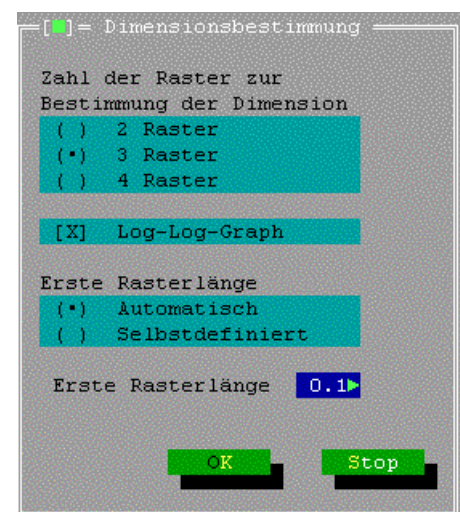
		
Grobes Raster, Kästchen zählen	Rasterabstand halbieren, wieder Kästchen zählen	... und Rasterabstand nochmals halbieren, Kästchen zählen
		Experimentelle Raster-Dimension: $\approx 1.52$ Exakte Selbstähnlichkeits-Dimension: $= 1.58$  Abweichung ca 5%
Dimension näherungsweise berechnen ...	... und $\lg - \lg$ Graph zeigen	

### Einstellungen zur Dimensionsbestimmung

Zur Erklärung der Begriffe → [Raster-Dimension](#) und [Selbstähnlichkeits-Dimension](#).

- Anzahl der Raster, die zur Bestimmung der Dimension über eine erzeugte Figur gelegt werden. Die Rasterlänge wird mit jedem neuen Raster halbiert.
- Angabe, ob ein  $\lg N(r) - \lg(1/r)$  - Graph ausgegeben werden soll.
- Angabe, ob die Länge für das erste Raster automatisch bestimmt werden soll, oder ob diese Länge selbst festgelegt werden soll.
- Länge des ersten Rasters. Diese Angabe wird nur wirksam, wenn die Rasterbestimmung nicht auf "Automatisch" steht.

Rechts ist die Standard-Einstellung gezeigt.





## Collage

Dieser Menüpunkt kann dazu dienen

- die Linsendaten für eine selbstähnliche Figur leichter zu bestimmen,
- eine nicht-selbstähnliche Figur durch eine fraktale, selbstähnliche Figur anzunähern.

Dazu wird ein beliebiges Bild als Vorlage (Linienzug) gezeichnet. Man benutzt den Punkt **Collage/Vorlage** ( → [Vorlage](#) ). Diese Vorlage läßt sich dann mit verkleinerten Kopien ihrer selbst annähern. Unter **Collage/Collage neu** werden solche Kopien mit der Maus und den Cursortasten verschoben, gedreht, gespiegelt, vergrößert und verkleinert (bzw. im Fall affiner Linsen mit noch allgemeineren Abbildungen wie z.B.Achsenaffinitäten transformiert). Die dabei zugrundeliegenden Abbildungen werden unmittelbar in Linsendaten umgesetzt, die mit **Linsendaten** ( → [Linsendaten](#) ) betrachtet und von Hand verändert werden können.

Unter **Collage/Collage verbessern** kann ein schon vorgegebenes oder mit **Collage/Collage neu** definiertes Linsensystem erweitert werden. Die Linsenzahl wird dabei automatisch erhöht. Dem Prozess liegt das folgende *Collage-Theorem* von M. Barnsley zu Grunde.

Das Collage-Theorem von Barnsley beschreibt, wie nicht-selbstähnliche Bilder durch selbstähnliche Figuren angenähert werden können. Solche Figuren lassen sich mit dem Kopierer erzeugen.

Das Collage-Theorem ist die Grundlage für die Methode der sogenannten Fraktalen Bildkompression, einem Verfahren, das dazu dient, die zur Speicherung von Bildern benötigte Datenmenge drastisch zu verkleinern.

### Collage-Theorem

Angenommen, eine Vorlage-Figur kann durch verkleinerte Kopien ihrer selbst „gut“ angenähert werden (das heißt die Figur ist eine „Collage“ aus verkleinerten Kopien von sich selbst).

Dann kann diese „Collage“ von einem Kopierer erzeugt werden und die vom Kopierer mit „**Kopieren**“ erzeugte selbstähnliche Figur ist eine „gute“ Annäherung an die Vorlage-Figur.

Der dabei verwandte Begriff „gut“ ist etwa folgendermaßen zu präzisieren:

Die „Güte“ einer Annäherung einer Figur durch eine andere gibt an, wie groß die schlimmste Abweichung der Figuren voneinander ist.

### Beschreibung des Menüpunktes Collage im einzelnen

#### Collage neu

Kurze Tabelle für die Bedienung

Aktion	Bedienung
Kopie übernehmen	Linke Maustaste oder <i>RETURN</i>
Annäherung beenden	Rechte Maustaste oder <i>ESC</i>
Verschieben	Maus bewegen
Drehen, Skalieren, Spiegeln usw.	Richtungstasten, <i>Bild-auf</i> , <i>Bild-ab</i> (+Strg-Taste zur Beschleunigung)
Umschalten zwischen Drehen, Skalieren usw. Anzeige in der Fußzeile	Buchstabentasten D, S usw.

## Beschreibung des Verfahrens im Einzelnen

Eine Vorlage, die entweder selbst erzeugt oder geladen wurde, wird mit verkleinerten Kopien ihrer selbst angenähert.

Zunächst erscheint eine mit dem Faktor 0.25 verkleinerte Kopie der Figur im Schnittpunkt der Koordinatenachsen, zusammen mit einer kleinen Hand.

Durch Bewegen der Maus (ohne eine Maustaste zu drücken) läßt sich die Kopie verschieben.

Andere Operationen können unabhängig davon mit den Richtungstasten und den Tasten *Bild-hoch* und *Bild-ab* vorgenommen werden (eventuell verbunden mit der Strg-Taste zur Beschleunigung).

Ist die Kopie in die gewünschte Form und Stellung gebracht, dann wird sie mit der linken Maustaste (oder *RETURN*-Taste) übernommen; mit der Übernahme erscheint gleich die nächste Kopie zur Wiederholung des Verfahrens.

Wenn die Ausgangsfigur genügend gut angenähert ist, wird das Verfahren mit der rechten Maustaste oder der *ESC*-Taste beendet. Die letzte Kopie wird dabei nicht übernommen.

### Verfügbare Operationen für einfache Linsen (Ähnlichkeitsabbildungen):

Operation	Wirkung
Drehen	Drehen der Kopie um die Spitze des Händchens
Skalieren	Vergrößern oder verkleinern der Kopie
Spiegeln	Spiegeln der ursprünglichen Kopie an einer der beiden Koordinatenachsen, abhängig von den Richtungstasten.
Verschieben	Verschieben der Kopie in alle Richtungen

Voreingestellt ist zunächst „Drehen“. Zwischen den einzelnen Operationen wird mit den entsprechenden Tasten D, S, P umgeschaltet. Die gerade gültige Wahl wird in der Fußzeile hervorgehoben.

### Verfügbare Operationen für affine Linsen (Affine Abbildungen):

Operation	Wirkung
Drehen	Drehen der Kopie um die Spitze des Händchens
Skalieren	Vergrößern oder verkleinern der Kopie
Spiegeln	Spiegeln der ursprünglichen Kopie an einer der beiden Koordinatenachsen, abhängig von den Richtungstasten.
Verschieben <sup>3</sup>	Verschieben der Kopie in alle Richtungen
xy-Strecken	<p><i>Richtungstasten rechts/links:</i> Kopie in x-Richtung gestreckt oder gestaucht.</p> <p><i>Richtungstasten auf/ab:</i> Kopie in y-Richtung gestreckt oder gestaucht.</p> <p>Dabei bezieht sich die Richtung auf die ursprüngliche Kopie, nicht die veränderte.</p>
Scheren	<p><i>Richtungstasten rechts/links:</i> Kopie in x-Richtung geschert.</p> <p><i>Richtungstasten auf/ab:</i> Kopie in y-Richtung geschert.</p> <p>Dabei bezieht sich die Richtung auf die ursprüngliche Kopie, nicht die veränderte</p>
Achsen drehen	<p>Diese Operation ist am wenigsten anschaulich.</p> <p>Am besten läßt sich die Abbildung mathematisch beschreiben, wenn man die Darstellung der affinen Abbildungen der Linsen betrachtet:</p> <p>Mit den Richtungstasten rechts/links wird die Größe <math>w_y</math> verändert, die</p>

<sup>3</sup> Nur wenn keine Maus angeschlossen ist, wird die Kopie mit den Cursortasten verschoben.

	<p>angibt, um welchen Winkel der Basisvektor in y-Richtung gedreht wird. Mit den Richtungstasten auf/ab wird der Drehwinkel <math>w_x</math> des Basisvektors in x-Richtung verändert. Am besten probiert man diese Operation in ihrer Wirkung auf das Einheitsquadrat aus und vergleicht mit der Scherung.</p>
--	---