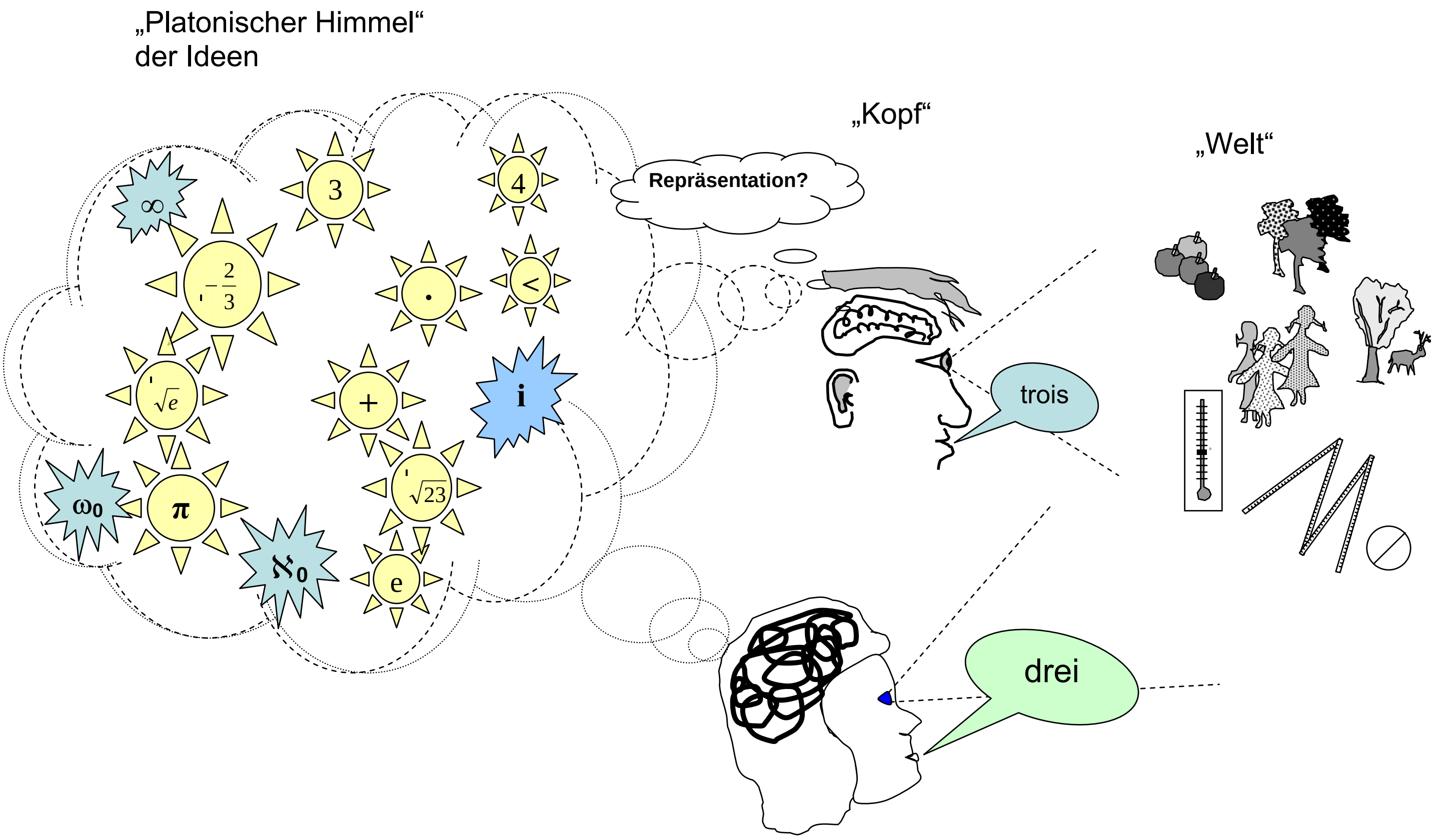


Zusammenhänge

Etwas Begriffs-Chaos

Ideale Objekte der Mathematik

Reale Objekte in der Welt

„Geben Sie ein mathematisches Modell für den Umgang mit Bankguthaben an“

Modelle 2

gewonnen durch Abstraktion

Interpretation in der Welt

Modelle 1

„Geben Sie ein Modell für die Multiplikation negativer Zahlen an“

Die Zahlen zusammen mit ihren Rechenoperationen und Anordnungen bilden abstrakte Strukturen.

In diesen sollen gewisse Gesetze gelten , z.B. das Distributivgesetz, das einen Zusammenhang zwischen der Addition und der Multiplikation herstellt.

Die idealen Gebilde werden durch Abstraktion aus der Realität gewonnen.

Zahlen, Operationen und Anordnungen existieren nicht in der Realität.

Viele Erscheinungen der Realität lassen sich gut mit Hilfe von Zahlen beschreiben.

Mit Hilfe von Zahlen lassen sich z.B. Voraussagen über das Verhalten realer Objekte in der Zukunft machen.

Reelle Zahlen

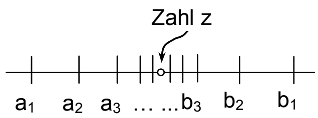
1. Axiomatischer Zugang:

Wir *beschreiben* die abstrakte Struktur der Zahlen durch ihre Eigenschaften. Die Existenz und die Natur dieser Struktur diskutieren wir nicht weiter. Wir stellen uns die Zahlen naiv als Punkte auf einer Zahlengerade vor, ohne uns Gedanken zu machen, wie solche Punkte etwa multipliziert werden sollen. Im Grunde teilen sie alle unbewusst diese Auffassung.

Die Menge der reellen Zahlen ist ein

vollständig

- Jede Intervallschachtelung (a_n,b_n) bestimmt genau eine Zahl z



angeordneter

- die Zahlen sind durch eine Ordnung < linear angeordnet
- Für diese Ordnung gelten die „bekannten Rechenregeln“ bezüglich +, · (nennen Sie die!)

Körper

- +, ·, 0, 1 gehorchen den „bekannten Rechenregeln“ (nennen Sie die!)
- Bezüglich + hat jede Zahl a ein Inverses -a, für das gilt: $a + (-a) = 0$
  a-b wird durch a+(-b) definiert
- Bezüglich · hat jede Zahl $a \neq 0$ ein Inverses a^{-1}, für das gilt: $a \cdot a^{-1} = 1$
  a/b wird durch $a \cdot b^{-1}$ definiert

2. Konstruktion der reellen Zahlen:

Schrittweise Konstruktion der Erweiterungen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ über die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bis zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auf der Grundlage mengentheoretischer Prinzipien. Bei diesen Schritten wird der Bereich so erweitert, dass zunächst die Operationen + und · umkehrbar werden (→ Körper) und schließlich die Ordnung vollständig wird.

Eine Skizze der exakten Durchführung erfolgt in der Lehrveranstaltung über Zahlbereichserweiterungen.

In der Schule beschreitet man den Weg von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ über die positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+_0$ (Umkehrung von ·) und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (Umkehrung von +) nach $\mathbb{R}$.
Insbesondere der eigentlich problematischste letzte Erweiterungsschritt wird kaum thematisiert, da man auf der Zahlengeraden das Hinzukommen der „neuen“ Zahlen nicht bemerkt, weil schon die rationalen Zahlen dicht liegen. Auch die Übertragung der Rechenoperationen von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ bereitet anschaulich keine Probleme, viel weniger, als die Übertragung der Rechenregeln von $\mathbb{Q}^+_0$ auf $\mathbb{Q}$.
Der Prozess der Vervollständigung durch Intervallschachtelung wird exemplarisch bei der näherungsweisen Berechnung von Wurzeln und der Zahl π durchgeführt. Dabei spielt das Problem der *Existenz* solcher Zahlen für die Schulmathematik keine Rolle – oder haben *Sie* etwa ein Problem damit?