Mathematikunterricht im 7.-10. Schuljahr

Der Lehrplan und seine Inhalte

Sammlung von Materialien zur Vorlesung

R.Deißler

WS 2003/2004

INHALTSVERZEICHNIS

1 Ziele des Mathematikunterrichts

1.1 TIMS-Studie: Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich

TIMSS: **T**hird **I**nternational **M**athematics and **S**cience **S**tudy (1997)

Schlechte Noten für den Mathematikunterricht in Deutschland - Anlass und Chance für Innovationen
Erklärung der Fachverbände DMV, GDM und MNU (*)

Soeben[1] sind die Ergebnisse einer großen internationalen Studie veröffentlicht worden (TIMSS: *Third International Mathematics and Science Study,* durchgeführt von der IFA: *International Association for the Evaluation of Educalional Achievement),* bei der u. a. Leistungen von Siebt- und Achtklässlern aus 41 Ländern in Mathematik getestet worden sind. Dabei haben die Schülerinnen und Schüler aus Deutschland vergleichsweise schwach abgeschnitten, sie liegen nur im weltweiten Durchschnitt. Werden von den 41 Ländern nur die 26 OECD-Staaten betrachtet (in der Presse mitunter missverständlich als „OECD-Studie“ bezeichnet), so liegt Deutschland sogar in der unteren Hälfte.

Die Ergebnisse der großen westlichen Staaten (Frankreich, Kanada, England, USA) bewegen sich ebenfalls im Mittelfeld. Vier asiatische Staaten liegen deutlich vor allen anderen an der Spitze: Singapur, Südkorea, Japan und Hongkong.

Wie sind die für Deutschland enttäuschenden, z.T. alarmierenden Ergebnisse einzuschätzen? Einige der Gründe liegen sicher außerhalb der Mathematik in der gesamtgesellschaftlichen Sicht von Schule; so geht die öffentliche Wertschätzung für schulisches Lernen offenbar immer mehr zurück, und damit einhergehend vermindern sich die verbindlichen Leistungsanforderungen, was insbesondere auch für den Mathematikunterricht negative Auswirkungen hat (und dort besonders gut aufzeigbar ist). Auf dieses gesellschaftspolitische Problem müssen wir aufmerksam machen. Bildungsanstrengungen müssen bei uns wieder einen hohen Stellenwert erhalten, wie sie ihn in den genannten asiatischen Staaten in besonderem Maße besitzen.

Unter mathematikspezifischen Aspekten fällt auf, dass die Schülerinnen und Schüler aus Deutschland bei reinen Routineaufgaben aus Arithmetik und Algebra meist besser abgeschnitten haben als bei geometrischen Problemstellungen und dass sie vor allem bei Aufgaben, in denen ein inhaltliches Eingehen auf gegebene Problemsituationen oder ein selbständiges Anwenden von mathematischen Verfahren erforderlich waren, enttäuscht haben. Auch bei zeitlich weiter zurückliegenden Themengebieten liegen sie eher unter dem Durchschnitt.

All dies korrespondiert mit - aus mehreren früheren Untersuchungen schon bekannten - Beobachtungen, dass im Mathematikunterricht bei uns zu viel Wert gelegt wird auf das routinemäßige, manchmal gar schematische Lösen innermathematischer Standardaufgaben und dass viele Stoffe nur kurzzeitig für die nächste Klassenarbeit gelernt werden und danach rasch wieder vergessen werden können. Zu kurz kommen insbesondere das selbständige, aktive Problemlösen, das inhaltliche, nicht-standardisierte Argumentieren, das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt sowie ein wiederholendes und vertiefendes Wiederaufgreifen weiter zurückliegender Stoffe und deren Vernetzung. Wie Begleitstudien zeigen, ist es mit vielen dieser Punkte z.B. in Japan deutlich besser bestellt.

Wir verkennen nicht, dass es noch weitere Gründe gibt, welche zum schlechten deutschen Abschneiden beigetragen haben können, so etwa das Problem, wie gut die Testfragen mit unseren Lehrplänen für die Mittelstufe harmonieren. Aber dies entkräftet keineswegs die vorhin aufgezählten Kritikpunkte.

Sicher können wir uns nicht ohne weiteres mit den an der Spitze liegenden asiatischen Staaten vergleichen, denn diese haben ein anderes Bildungssystem mit ganz anderen Leistungsanforderungen, was wir nicht einfach übernehmen können und wollen. Unsere Jugendlichen werden trotzdem im späteren Berufsleben mit den Jugendlichen aus diesen asiatischen Ländern im Wettbewerb stehen. Es bedarf deshalb besonderer Anstrengungen in der Forschungs- und Entwicklungsarbeit zum Lernen und Lehren von Mathematik sowie einer konsequenten Umsetzung, damit wir zu einem - für unsere Gesellschaft adäquaten
- erfolgreichen Mathematikunterricht kommen.

Unser Mathematikunterricht muss sich verändern, Innovationen sind nötig! Mathematik ist existentieller Bestandteil unserer Kultur. Mathematik ist u. a. auch die Sprache, in der Wissen ausgedrückt wird, bevor es durch Computer-Software benutzt werden kann; deshalb ist z.B. die Beherrschung der Übersetzung zwischen Alltagswissen und präziser mathematischer Darstellung eine Schlüsselqualifikation, die unsere Jugendlichen weit besser beherrschen müssen, als sie es in den Tests gezeigt haben. Wirtschaft und Gesellschaft brauchen auf allen Stufen unseres Bildungswesens schulische Absolventen. die im Kernfach Mathematik möglichst gut ausgebildet sind.

[1] 1997

Ein paar Stichworte mögen die Richtung andeuten, in der sich der Mathematikunterricht verändern muss:

- mehr selbständiges und aktives Mathematiktreiben,
- mehr fachübergreifendes Lernen,
- mehr inhaltliches Argumentieren und Problemlösen,
- systematisches Wiederaufgreifen und Vernetzen von behandelten Inhalten.

Das alles bedeutet auch eine Veränderung der Leistungsanforderungen an unsere Schülerinnen und Schüler. Zugleich sind verstärkte Anstrengungen in der Lehreraus- und -fortbildung nötig, um Lehrerinnen und Lehrer zu qualifizieren, solche Konzepte - auf wissenschaftlich abgesicherter Grundlage - auch wirklich umzusetzen. Hier besteht gerade in Deutschland aufgrund der ungünstigen Altersstruktur unseres Lehrkörpers ein besonderer Bedarf

All dies sind Forderungen, wie sie von uns, den unterzeichnenden mathematischen Fachverbänden, schon seit langem erhoben und mit vielen eigenen Vorschlägen auch hinlänglich konkretisiert, in der Breite des Unterrichts bisher aber noch unzureichend realisiert worden sind. Natürlich sind auch in der Zukunft noch weitere Forschungs- und Entwicklungsanstrengungen nötig. Dabei setzt, wie schon eingangs erwähnt, eine Realisierung solcher Konzepte adäquate gesellschaftliche Rahmenbedingungen voraus.

Wir bieten den Verantwortlichen in Politik und Bildungsverwaltung unsere Hilfe bei der Implementierung und Realisierung solcher Innovationen und bei der begleitenden Lehreraus- und -fortbildung an. Konkret schlagen wir vor, eine bundesländerübergreifende Arbeitsgruppe bei der KMK einzurichten, die Konzepte für eine Veränderung des Mathematikunterrichts vorlegen soll, damit dieses wichtige Fach den Anforderungen bis zum und vor allem auch nach dem Jahr 2000 besser genügen kann, als es derzeit offenbar der Fall ist.

*Anmerkung

Diese Erklärung zu den Ergebnissen der internationalen Mathematikstudie TIMSS ist unterzeichnet
für die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DM V)* von Prof. Dr. Günter TÖRNER, Duisburg.
für die *Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM}* durch Prof. Dr. Werner BLUM, Kassel, sowie
für den *Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU)* durch StD Jürgen WULFTANGE. Hannover.

Aus:
Mathematik in der Schule 35 (1997) 5

1.2 Internationale Leistungsvergleichsstudie PISA

Im Jahr 2002 wird die Diskussion um das Bildungswesens, insbesondere auch die Diskussion um den Mathematikunterricht, ganz entscheidend durch die Veröffentlichung der Ergebnisse der internationalen Leistungsvergleichsstudie PISA 2000 und der nationalen Ergänzungsuntersuchung PISA-E bestimmt. Im Folgenden eine kurze Darstellung der Ziele und Ergebnisse der internationalen Studie (Quelle: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin / ZUM).

Was PISA bedeutet, wer dabei mitmacht, wie Deutschland abgeschnitten hat.
Die 10 wichtigsten Antworten

1. Was heißt "PISA"?

Die Abkürzung PISA steht für "Programm for International Student Assessment", eine internationale Schulleistungsstudie. Sie ist Teil des Indikatorenprogramms INES, "Indicators of Educational Systems", der OECD (Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung).

2. Was wird untersucht?

PISA erfasst drei Bereiche: Lesekompetenz (reading literacy), mathematische Grundbildung (mathematical literacy) und naturwissenschaftliche Grundbildung (scientific literacy).
Dabei geht es neben dem, was die Jugendlichen gelernt haben, vor allem darum, inwieweit sie allgemeinere Konzepte und Fähigkeiten besitzen, die sie brauchen, um ihr Wissen auch anzuwenden.

3. Wer nimmt an der Untersuchung teil?

Die Untersuchung wird mit 15-jährigen Schülerinnen und Schülern in ihren Schulen durchgeführt. 32 Staaten sind beteiligt, davon 28 Mitgliedsstaaten der OECD. In jedem Land werden zwischen 4.500 und 10.000 Schülerinnen und Schülern getestet. Der Leistungsvergleich im Jahr 2000 umfasste 265 000 Jugendliche.

4. Welche Ziele hat PISA?

Die OECD-Staaten erfahren dadurch, wie es mit dem Wissen, den Fähigkeiten und Fertigkeiten ihrer Schüler/innen bestellt ist, und wie gut die Jugendlichen auf lebenslanges Lernen und auf die Übernahme von konstruktiven Rollen als Mitglieder ihrer Gesellschaft vorbereitet sind. Sie erheben, wie leistungsfähig ihre Bildungssysteme sind und stellen sich dem internationalen Vergleich. Die gewonnenen Erkenntnisse lassen sich im Anschluss schulpolitisch nutzen.

5. Wer hat sich PISA ausgedacht?

Die PISA-Rahmenkonzeption wurde von internationalen Expertengruppen entwickelt. Damit wurde zum einen gewährleistet, dass die Studie hohen wissenschaftlichen Anforderungen genügt, zum anderen konnten die beteiligten Länder so ihre jeweiligen kulturellen und bildungspolitischen Schwerpunkte einbringen. Auch Wissenschaftler aus Deutschland waren beteiligt.
Das Konzept stellt damit einen internationalen Kompromiss dar, der als wissenschaftlich solide begründet und aussagekräftig gilt.
Die Koordination des Projekts obliegt einem internationalen Konsortium unter Federführung des Australian Council for Educational Research (ACER). Für die Durchführung der Studie in Deutschland sind sieben Forschungseinrichtungen unter der Federführung des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung verantwortlich.

6. Was ist in Deutschland anders?

Im deutschen Schulsystem verteilen sich die 15-Jährigen infolge der Stichtagsregelung bei der Einschulung, relativ häufiger Zurückstellungen und hoher Wiederholungsraten auf sechs (!) Jahrgangsstufen, wobei sie sich auf die Jahrgänge 8, 9 und 10 konzentrieren. In den meisten OECD-Ländern, die an der Vergleichsstudie teilnehmen, ist die Jahrgangsstreuung geringer bei einem deutlichen Schwerpunkt auf den höheren Jahrgängen.
In Deutschland wurde deshalb die international vorgesehene altersbasierte Stichprobe durch eine jahrgangsbasierte Stichprobe ergänzt.
Das deutsche Konsortium hat - wie auch andere Länder - die internationale Untersuchung um bestimmte Fragestellungen erweitert, unter anderem um Ursachen für Leistungsunterschiede unter den Jugendlichen zu erforschen und Ansatzpunkte für konstruktive Interventionsmaßnahmen zu finden. Schlüsselqualifikationen wie z.B. Problemlösen, Aspekte von Kooperation und Kommunikation wurden erfasst.
Die Kultusministerkonferenz hat zusätzlich beschlossen, im Rahmen von PISA auch Leistungsvergleiche zwischen den Bundesländern durchzuführen. Die Ergebnisse von PISA-E (PISA-Erweiterungsstudie) sollen am 30.06.02 bekannt gegeben werden.
Insgesamt wurden in der Bundesrepublik Deutschland ca. 1.460 Schulen mit insgesamt ca. 57.000 Schülerinnen und Schülern mit den internationalen und nationalen Testinstrumenten getestet. Davon bilden ca. 210 Schulen die internationale Stichprobe (PISA), ca. 1250 Schulen wurden zusätzlich untersucht.

7. Wie läuft die Untersuchung ab und worum geht es dabei?

Die Tests fanden in der jeweiligen Schule von Ende April bis Ende Juni 2000 an zwei aufeinanderfolgenden Tagen statt:
erster Testtag: 120 Minuten Leistungstests, 30 Minuten Schülerfragebogen;
zweiter Testtag: ca. 130 Minuten, zuzüglich Pausen
Jede Schülerin bzw. jeder Schüler erhielt eines von insgesamt neun verschiedenen Testheften. Rund zwei Drittel der in PISA eingesetzten Aufgaben maßen Lesefähigkeiten und Leseverständnis. Ein Drittel der Testaufgaben stammten je aus der Mathematik oder aus den Bereichen der Naturwissenschaften. Eine realitätsnahe Situation ist jeweils Ausgangspunkt für verschiedene Fragen, teilweise Multiple-Choice-Aufgaben, zum Teil arbeiten die Schüler/innen eigene Antworten aus.
Die Jugendlichen beantworten außerdem einen Fragebogen mit Hintergrundfragen über sich selbst, Dauer etwa 30 Minuten. Dabei geht es z.B. um den familiären Hintergrund, um die Einstellung zum Lernen und die Lernstrategien, Lesegewohnheiten, Umgang mit neuen Technologien und die schulische Karriere.
Auch die Schulleiter erhalten einen Fragebogen zu ihrer Schule, Dauer etwa 30 Minuten. Er beinhaltet Fragen zur Schule, der finanziellen und personellen Situation, ob öffentliche oder private Aufsicht und Finanzierung, zu Entscheidungsprozessen und Personalpolitik, zu Unterricht, Klassengröße und Grad der Schüler- und Elternbeteiligung.
Aus diesen drei Elementen ergibt sich ein Profil der Kenntnisse und Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern gegen Ende der Pflichtschulzeit. Außerdem lässt sich ein Zusammenhang zwischen den Ergebnissen und den Merkmalen von Jugendlichen und Schulen herstellen. Durch die Wiederholung der Untersuchung wird zusätzlich deutlich, wie sich die Ergebnisse im Zeitverlauf ändern.

8. Wie geht es mit PISA weiter?

OECD/PISA ist keine einmalige länderübergreifende Messung, sondern ein fortlaufendes Programm. Alle drei Jahre werden Daten erhoben. Damit ist es möglich, auch Entwicklungstrends im Wissens- und Kompetenzbestand von Schüler/innen aus den verschiedenen Ländern und aus verschiedenen demographischen Untergruppen zu erfassen.
Bei jeder Erhebung wird ein anderer Bereich detailliert untersucht, der dann fast zwei Drittel der Gesamttestzeit in Anspruch nimmt. Im Jahr 2000 stand die Lesekompetenz im Mittelpunkt, im Jahr 2003 wird es die mathematische Grundbildung sein und im Jahr 2006 die naturwissenschaftliche Grundbildung. So wird in jedem dieser Bereiche alle neun Jahre eine gründliche Leistungsanalyse und alle drei Jahre ein "check-up" stattfinden.

9. Was wird im einzelnen geprüft?

Natürlich ist es wichtig, was die Jugendlichen gelernt haben. Aber ob sie dieses Wissen später anwenden können, hängt entscheidend von allgemeineren Fähigkeiten und Kenntnissen ab. PISA fragt also weniger Faktenwissen ab, sondern prüft das Verständnis und die Fähigkeit, selbständig zu denken und Schlüsse zu ziehen.

Lesen: Können die Jugendlichen schriftliches Material verstehen, interpretieren und nutzen, über Inhalt und Eigenschaften von Texten reflektieren - um eigene Ziele zu erreichen, das eigene Wissen und Potential weiterzuentwickeln und am gesellschaftlichen Leben teilzunehmen?

Mathematik: Hier kommt es im täglichen Leben auf die Fähigkeit an, die Bedeutung der Mathematik im heutigen Leben wahrzunehmen, quantitativ zu argumentieren, Beziehungen oder Abhängigkeiten zu erfassen und fundierte mathematische Urteile abzugeben.

Naturwissenschaften: Für die naturwissenschaftlichen Probleme, die in der Welt der Erwachsenen diskutiert werden, sind ein Verständnis von umfassenderen Konzepten und Themen wichtig wie Energieverbrauch, Artenvielfalt und menschliche Gesundheit sowie die Fähigkeit, Schlussfolgerungen zu ziehen, um Entscheidungen zu verstehen und zu treffen, die die natürliche Welt und die durch menschliches Handeln an ihr vorgenommenen Veränderungen betreffen.

Von besonderer Bedeutung sind in allen Bereichen fächerübergreifende Fähigkeiten wie Flexibilität, Anpassungsfähigkeit, Problemlösefähigkeit, die Fähigkeit zur Nutzung von Informationstechnologien, die Fähigkeit zu Kommunikation und Kooperation.
Weil sich Jugendliche auch später immer neu Wissen und Fähigkeiten aneignen müssen, sollen sie außerdem in der Lage sein, ihren eigenen Lernprozess zu organisieren und zu regulieren, selbstständig und in Gruppen zu lernen und Schwierigkeiten im Lernprozess zu überwinden.

10. Wie hat Deutschland abgeschnitten?

Ziemlich schwach: In allen Bereichen liegen wir teilweise deutlich unter dem OECD-Durchschnitt.

- Vom Volk der Dichter und Denker zum Volk der funktionalen Analphabeten?
  Fast jedes vierte Kind hat enorme Schwierigkeiten beim Lesen: 13% der Jugendlichen schafften grade mal die unterste Stufe der Lesekompetenz und können damit simple Informationen herausfinden oder das Hauptthema erfassen - fast zehn Prozent nicht mal das.

- Beim Rechnen und in den Naturwissenschaften sind die Werte ähnlich: Ein Viertel der Schüler erreicht höchstens Kompetenzstufe 1. Das bedeutet Grundschulniveau.

- Außerdem ist Deutschland eines der Länder mit dem größten Abstand zwischen den leistungsstärksten und leistungsschwächsten Schülern. Im Gegensatz zu diversen anderen Länder schaffen wir es nicht, dass auch die schwachen Schüler ein gewisses Leistungsniveau erreichen.

- Der Einfluss der sozialen Herkunft auf die Schülerleistungen ist bei uns überdurchschnittlich groß und wird durch die Schule nicht aufgefangen.

1.3 Mathematik als Hilfsmittel im privaten und beruflichen Alltag

(Aus Heymann, Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz 1996, S. 135-138)

Welche Mathematik bzw. welche mathematikhaltigen Qualifikationen verwenden Erwachsene in unserer Gesellschaft als Hilfsmittel in ihrem privaten und beruflichen Alltag? Der berufliche Alltag derjenigen Minderheit, die in ausgesprochen mathematikintensiven Berufen tätig ist, bleibe dabei ausdrücklich ausgeklammert.
Obwohl es ... keine empirischen Studien gibt, in denen diese Frage repräsentativ untersucht wird, weisen die an Teilpopulationen und zu spezielleren Fragestellungen erhobenen Ergebnisse eine derart hohe Konvergenz auf, dass der weiter unten von mir aufgestellte Katalog als recht brauchbare Annäherung betrachtet werden kann. Zudem wird jeder Erwachsene in unserer Gesellschaft, der sich aufgrund eigener Beobachtungen ein eigenes Urteil zu bilden sucht, diese Ergebnisse im großen und ganzen bestätigen können. Die Fakten, um die es hier geht, sind gleichsam als Elemente einer geteilten gesellschaftlichen Erfahrung für jedes Gesellschaftsmitglied durch Reflexion von Alltagswissen offen zugänglich. - Der unten angeführte Katalog berücksichtigt folgende Untersuchungen:

- Raatz (1974) interviewte einerseits Ausbildungsleiter und Personalchefs nach den mathematischen Mindestkenntnissen und Mindestfertigkeiten von Betriebsangehörigen, andererseits direkt Arbeitnehmer, überwiegend mit Facharbeiterqualifikation, ,,an ausgewählten Arbeitsplätzen mit hohen mathematischen Anforderungen" (a. a. O., S. 43ff). Es wurden die ,,Bereiche“ Elektronische Datenverarbeitung, Verwaltung, Technische Büros und Produktion erfasst.

- In England befragte das *Sheffield Region Centre for Science and Technology* eine repräsentative Stichprobe von Industriebetrieben der Region nach den Mathematikkenntnissen, die von Jugendlichen im ersten Jahr ihrer Beschäftigung gebraucht werden (Knox 1977).
- Ebenfalls englische Verhältnisse wurden in dem großangelegten Projekt ,,Mathematics in Employment (16 - 18)“ untersucht, das sich auf Arbeitsplatzbeobachtungen und Interviews stützte (Fitzgerald/Rich 1981). Ergebnisse dieser Studie flossen in den Cockroft-Report ein, der der Reform des Mathematikunterrichts in Großbritannien eine neue Basis zu geben versuchte (Cockroft u. a. 1982).
- In einer österreichischen Studie wurde die Verwendung von Mathematik am Arbeitsplatz von Beschäftigten mit Abitur untersucht, also eine gänzlich andere Population als in den bisher genannten Untersuchungen erfasst (Borovcnik u. a. 1981, vgl. auch Peschek 1981).
- In einer Fallstudien-Serie befragte ich im Sommer 1989 mittels halbstrukturierter eineinhalbstündiger Interviews eine nicht-repräsentative Gruppe von zehn berufstätigen Erwachsenen beiderlei Geschlechts, Akademiker und Fachhochschulabsolventen - darunter keine Mathematiker, Naturwissenschaftler und Lehrer - nach ihrer Mathematikverwendung im beruflichen und privaten Alltag:

Trotz der gravierenden Unterschiede der berücksichtigten Populationen in Bildungsniveau, aktueller Tätigkeit, Alter und Nationalität stimmen die Ergebnisse in erstaunlichem Maße überein. Eine Essenz bietet der folgende Katalog:

Mathematische Inhalte und inhaltsbezogene Qualifikationen, auf die Nicht-Mathematiker nach Abschluss ihrer Ausbildung im Alltag bisweilen zurückgreifen:

- **Arithmetischer Bereich**. Anzahlbestimmungen; Beherrschung der Grundrechenarten je nach Komplexität ,,im Kopf“ oder schriftlich); Rechnen mit Größen, Kenntnis der wichtigsten Maßeinheiten, Durchführung einfacher Messungen (vor allem Zeit und Längen); Rechnen mit Brüchen mit einfachen Nennern in anschaulichen Kontexten; Rechnen mit Dezimalbrüchen; Ausrechnen von Mittelwerten (arithmetisches Mittel); Prozentrechnung; Zinsrechnung; Schlussrechnung (,,Dreisatz“); Durchführung arithmetischer Operationen mit einem Taschenrechner; Grundfertigkeiten im Abschätzen und Überschlagen.

- **Geometrischer Bereich**: Kenntnis elementarer regelmäßiger Figuren (Kreis, Rechteck, Quadrat etc.) und Körper sowie elementarer geometrischer Beziehungen und Eigenschaften (Rechtwinkligkeit, Parallelität etc.); Fähigkeit zur Deutung und Anfertigung einfacher graphischer Darstellungen von Größen und Größenverhältnissen (Schaubilder, Diagramme, Karten) sowie von Zusammenhängen zwischen Größen mittels kartesischer Koordinatensysteme.

Selbstverständlich weist dieser Katalog unscharfe Ränder auf. Es gibt viele mathematikscheue Erwachsene, denen selbst Anwendungen der Prozent- und Zinsrechnung oder des Dreisatzes - also der vergleichsweise ,,höchsten" in obigem Katalog aufgeführten Mathematik - große Schwierigkeiten bereiten, die sich deshalb in -Situationen, in denen sich persönliche Entscheidungen auf entsprechende Rechnungen stützen ließen, lieber auf andere verlassen: etwa auf den Anlageberater ihrer Bank oder den Verkäufer, die ihnen ,,mathematikfrei“ erklären, welche Geldanlage oder welches Produkt für sie am günstigsten sei. Umgekehrt gibt es einfache Anwendungen der elementaren Algebra (z. B. das ,,Formelumstellen“), die in manchen handwerklichen und technischen Berufen eine gewisse untergeordnete Rolle spielen (vgl. Latz 1974, S.60). Generell ist festzustellen, dass der ,,Dreisatz“ als Berechnungsverfahren beim Vorliegen proportionaler Zusammenhänge dem (mathematisch eleganteren und allgemeineren) Verfahren des Aufstellens und Lösens einer linearen Gleichung von Nicht-Mathematikern vorgezogen wird. In den von mir durchgeführten Fallstudien-Interviews zeigte sich das ausnahmslos auch bei den Probanden, die das Hantieren mit Gleichungen ,,handwerklich" durchaus beherrschten.
Damit bestätigt sich zunächst einmal: **Was an Mathematik im Alltag verwendet wird, ist - gemessen am durchschnittlichen Gymniasial-, aber durchaus auch am Hauptschul-Curriculum - recht wenig**. Und obwohl in den letzten Jahrzehnten immer mehr gesellschaftliche Bereiche einer intensiven „Mathematisierung“ unterzogen wurden - von der industriellen Fertigung und betrieblichen Planung bis zum Marketing, von der statistischen Erfassung aller Lebensbereiche bis zu Wahlprognosen, von der wissenschaftlichen Forschung in traditionell mathematiknahen Gebieten wie der Physik bis hin zur Linguistik und Geschichtswissenschaft -, gibt es kaum Hinweise auf einen Bedarfszuwachs mathematischer Qualifikationen im Alltag, der dieser zunehmenden Mathematisierung entspräche. Ganz im Gegenteil, die Verlagerung anspruchsvoller Mathematik in Computer bzw. aufwendig konstruierte Software stellt dem Nutzer scheinbar problemlose ,,Werkzeuge“ zur Verfügung, denen „von außen“ die in sie investierte Mathematik nicht mehr anzusehen ist. Und die effektive Nutzung solcher Werkzeuge setzt keineswegs komplexe mathematische Qualifikationen voraus.
Bei genauer Betrachtung des obigen Katalogs wird aber ein weiteres Phänomen deutlich: Obgleich das, was im üblichen Mathematikunterricht gelehrt wird, weit über das lebenspraktisch Gebrauchte hinausgeht, wird ein Teil der angeführten Basisqualifikationen nur randständig, beiläufig, ja halbherzig gefördert. Das betrifft insbesondere: Fähigkeiten und Fertigkeiten im quantitativen Abschätzen, Überschlagen und Erkennen von Größenordnungen sowie die Interpretation und Handhabung von Daten in Tabellen und graphischen Darstellungen. Beiden Bereiche gemeinsam ist: Entsprechende Qualifikationen lassen sich nicht ohne weiteres auf das Abarbeiten von Algorithmen (d.h. eindeutige Ketten von Handlungsschritten) zurückführen, wie sie für weite Teile der Schulmathematik charakteristisch sind. Es lassen sich dem gemäß auch nicht ohne weiteres Übungsaufgaben mit rezeptartigen Lösungsschemata und eindeutigen Lösungen konstruieren. Weshalb in einem zeitgemäßen allgemeinbildenden Mathematikunterricht diese Bereiche nicht derart vernachlässigt werden dürften, soll im übernächsten Abschnitt naher erläutert werden.

1.4 Ein Szenario für den künftigen Mathematikunterricht?

(aus: Heymann, H., Allgemeinbildung und Mathematik)
Erste Stufe: Für alle Schüler gemeinsam wird an der Grundschule und an jeder Schulform der SI bis zum Ende der Klasse 8 ein allgemeinbildender Mathematikunterricht angeboten. Dieser Unterricht ist verpflichtend und vermeidet konsequent Themen, die nur fachspezialistisch motiviert sind. (Als fachspezialistisch bezeichne ich Themen, die hauptsächlich deshalb niemand aus dem mathematischen Standard-Curriculum zu streichen wagt, weil später im Rahmen des Standard-Curriculums wieder auf sie zurückgegriffen wird). Großer Wert wird in diesem gemeinsamen Unterricht gelegt auf *Fitness für die mathematische Alltagskultur*, auf *exemplarische Vertiefungen* entsprechend den Überlegungen, die ich unter den Stichworten *Kulturelle Kohärenz, Weltorientierung* und *Kritischer Vernunftgebrauch* anstellen werde, sowie auf eine *Unterrichtskultur*, wie sie in späteren Abschnitten dieses Kapitels beschrieben wird.

Zweite Stufe. **Ab Klasse 9** setzt dann eine äußere Differenzierung ein:

- Der Mathematikunterricht für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die sich die Wahl eines mathematikintensiven Berufs offen halten wollen, die mathematische Neigungen zeigen und von ihren Lehrern (?) als hinreichend mathematisch befähigt eingeschätzt werden, vertieft gezielt fachliche Aspekte. Unter anderem wird das Handwerkszeug des Mathematikers trainiert (von Termumformungen bis zum Beweisen), und es werden systematisch Sachgebiete behandelt, die für die „Nicht-Mathematiker" nicht mehr obligatorisch sind, die aber als Voraussetzung für eine intensivere Beschäftigung mit Mathematik als bedeutsam erachtet werden, z.B. quadratische Gleichungen, Trigonometrie, Potenzen und Logarithmen.

- Für alle anderen Schüler wird der allgemeinbildende Unterricht unter den generellen Zielsetzungen fortgesetzt, die bereits für die Klassen 1 bis 8 beschrieben wurden - selbstverständlich unter Berücksichtigung der gewachsenen kognitiven Fähigkeiten und des veränderten Interessenhorizonts der nun 14- bis 1 7-jährigen. Deskriptive Statistik könnte eine größere Rolle spielen als im herkömmlichen Unterricht. Denkbar wäre auch ein kreativer Umgang mit neuen Computer-Werkzeugen wie der Tabellenkalkulation und Geometrie-Software. Bei diesem Unterricht für die Mehrheit wäre durchaus Raum (bei entsprechender Leistungsfähigkeit und Interesse der Lerngruppe) für Wagenscheinsche Vertiefungen innermathematisch und mathematikhistorisch bedeutsamer Themen, für Untersuchungen der Satzgruppe des Pythagoras oder zahlentheoretischer Phänomene, für die Beschäftigung mit nicht-linearen Funktionen im Zusammenhang mit interessanten Anwendungen.

Die Unterschiede zwischen den Differenzierungsniveaus könnten dabei an den verschiedenen Schulformen unterschiedlich definiert werden.

Dritte Stufe. In der gymnasialen Oberstufe schließlich werden die Schülerinnen und Schüler, die das Abitur anstreben, konsequent getrennt unterrichtet, etwa den heutigen Grund- und Leistungskursen entsprechend. Inhaltlich bestehen hingegen deutliche Unterschiede zur gegenwärtigen Praxis:

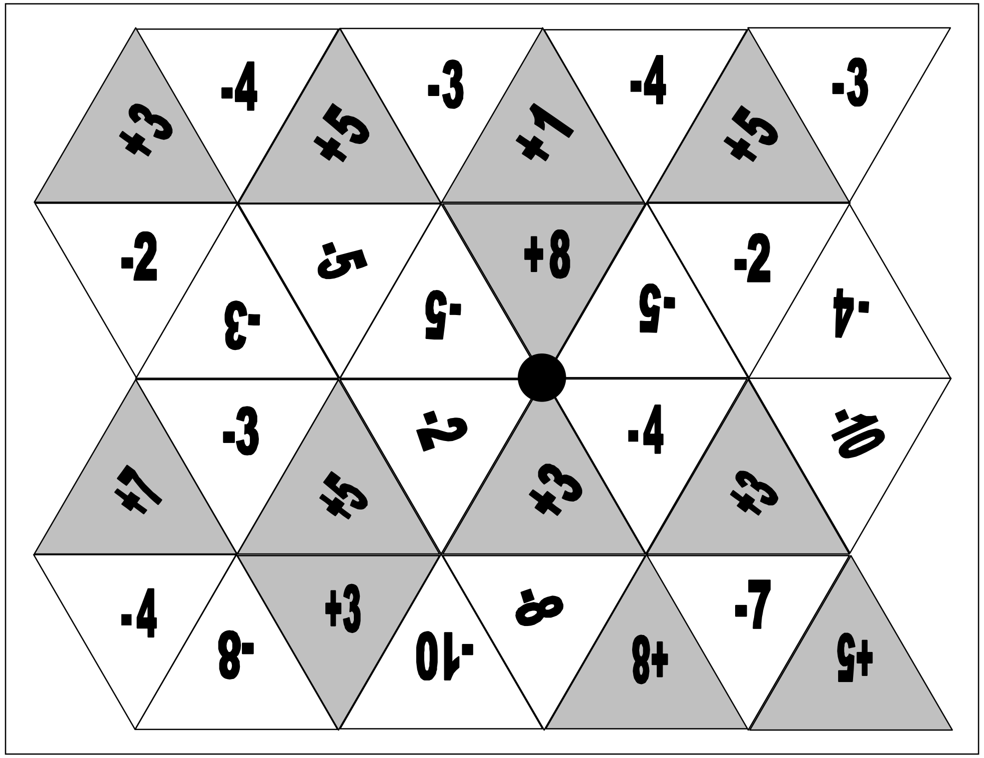
- Die Grundkurse neuer Art werden nicht länger als „verdünnte Leistungskurse“ geführt, sondern koppeln sich weitgehend vom herkömmlichen Oberstufencurriculum ab: Analysis und Lineare Algebra sind nicht mehr obligatorisch. Statt dessen steht eine Vertiefung anwendungs- und alltagsorientierter Mathematik im Vordergrund, vorwiegend im Zusammenhang mit stochastischen Themen und unter Einbeziehung des Computers als mathematisches Werkzeug.

- Auch in den Leistungskursen, die inhaltlich nicht ganz so weitgehend umgestaltet werden müssten, wäre eine Umgewichtung zugunsten stochastischer Themen erwägenswert. Hier würde allerdings dem Ziel, angemessene Voraussetzungen für das Hochschul- oder Fachhochschulstudium von Mathematik im Haupt- oder Nebenfach zu schaffen, Priorität zukommen.

2 Arithmetik im 7.Schuljahr: Rationale Zahlen

2.1 Ein Spiel zur Einführung: Saldix

Saldix



Spielanleitung:[2]

Spielerzahl: 2-4.
Benötigt werden 25 gleichartige Spielsteine (Knöpfe, Männchen, ...), von denen der erste Stein auf den schwarzen Punkt gesetzt wird und die übrigen auf die Spieler gleichmäßig verteilt werden.
Reihum werden Steine auf die Eckpunkte der Dreiecke gesetzt. Wer am Zug ist, **muss setzen**.
Werden bei einem Zug eines Spielers ein oder mehrere Dreiecke ganz eingeschlossen, so erhält dieser Spieler die entsprechende Punktzahl auf sein Konto gutgeschrieben oder abgezogen.
Sieger ist, wer am Spielende die höchste Punktzahl hat.

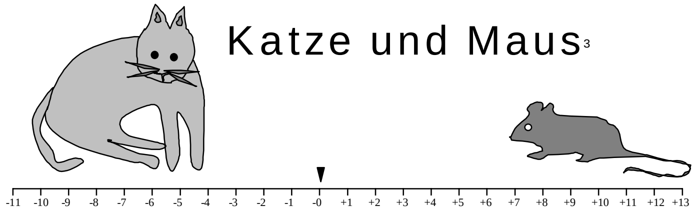
[2] Abänderung eines Spiels aus Mathematik Lehren, Heft 43, Korrektur in Heft 44, bzw. Sammelheft Mathematik Lehren, Spiele

Auswertung zu Saldix:

Welche Vorerfahrungen sind nötig?
Wozu kann das Spiel dienen? Welche Rechenoperationen und welche Operanden treten auf?
Wie lange dauert ein Durchgang (ohne Erklärung der Regel, ohne Zeit für das Ausgeben und Einsammeln des Spielmaterials)?

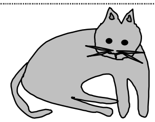
2.2 Ein Spiel zu negativen Zahlen mit dem Taschenrechner: Katz und Maus

Katze und Maus[3]



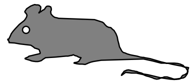
2 Spieler **A** (Katze) **B** (Maus)

Beide legen zuerst einen Zahlbereich um 0 herum fest. z.B. von -20 bis +20.



B denkt sich eine Zahl aus diesem Bereich und gibt sie auf seinem TR als konstanten Summanden (und zur Sicherheit auch in den Speicher) ein.

A muss versuchen B‘s Zahl in höchstens 10 Versuchen zu finden Sonst ist ihm die Maus entkommen. Er nennt B eine positive oder eine negative Zahl.



B gibt sie auf seinem Rechner ein und sagt nur, ob das Ergebnis (die Summe) plus oder minus ist.

A notiert seine Zahl und die Antwort und nennt B eine weitere Zahl.

B gibt sie wieder ein und sagt ob das Ergebnis plus oder minus ist.

Wenn das Ergebnis ,,Null" ist, hat die Katze die Maus gefangen. Rollentausch.

Beispiel: Zahlenbereich von –20 bis +20

B denkt sich –3 und gibt in den TR ein

3 ± + INV K

oder

3 ± + +

je nach Rechnertyp

A nennt Zahl und notiert B’s Antwort

Ansage	Antwort
-5	-
+5	+
+2	-
+3	getroffen

Eingabe von B	Anzeige von B
5 ± =	-8
5 =	2
2 =	-1
3 =	0

Es werden mehrere Runden gespielt.

[3] Aus: Lörcher/Rümmele, Didaktik des Taschenrechners

2.3 Ein Spiel zur Addition und Subtraktion: Das Kontospiel[4]

Zu Beginn erhält jede SpielerIn 20 Gutscheine und 15 Schuldscheine. Als Gutscheine dienen rote Legosteine oder Kärtchen, als Schuldscheine dienen blaue Steine oder Kärtchen. In der Mitte liegen zwei Stapel von Kärtchen mit Anweisungen.
Auf jeder Karte des einen Stapels steht eine ganze Zahl von -10 bis +10. Auf jeder Karte des anderen Stapels steht + oder -.
Die SpielerIn, die an der Reihe ist, nimmt von den beiden Stapeln eine Karte.

$\boxed{+}\ \boxed{+7}$ bedeutet „Nimm 7 Gutscheine auf."

$\boxed{+}\ \boxed{-7}$ bedeutet „Nimm 7 Schuldscheine auf."

$\boxed{-}\ \boxed{+7}$ bedeutet Gib 7 Gutscheine ab."

$\boxed{-}\ \boxed{-7}$ bedeutet „Gib 7 Schuldsteine ab."

Es gewinnt, wer am Schluß den höchsten Kontostand hat.
Jede Kontobewegung wird in einer Tabelle notiert.

Beispiel:

	alter Kontostand	Kontobewegung	neuer Kontostand
1.Runde	+5	-(+8)	-3
2.Runde	-3	+(+1)	-2
3.Runde	-2	+(-5)	+3
usw.			

2.4 Aus der Geschichte der negativen Zahlen[5]:

Es hat sehr lange gedauert, bis negative Zahlen als sinnvolle Zahlen anerkannt wurden. Dies zeigen die folgenden Beispiele:

Altertum
Babylon: negative Zahlen bekannt, aber es ist unklar, ob man damit gerechnet hat.
China vor 2000 Jahren: negative Zahlen addiert und subtrahiert.

Aus dem 9.Jahrhundert:
Statt 3 + (-7) = -4

„Da der Betrag des Nichts größer ist als der des Sein, überwindet die nichtexistierende 7 die existierende 3 und verzehrt sie durch ihr Nichtsein, und es bleiben von ihr selbst 4 nichtexistierende Zahlen"

13.Jarhundert:
Leonardo von Pisa (genannt Fibonacci) beschreibt ein Gleichungssystem negativen Lösungen.
Er beschreibt Rechenregeln für negative Zahlen:
„Es ist noch festzustellen, dass wenn man Abzuziehendes mit Abzuziehendem multipliziert, das Multiplikationsergebnis vergrößernd wirkt,....."

17.Jahrundert:
Blaise Pascal
„Ich kenne Leute, die nicht begreifen können, dass Null übrig bleibt, wenn man von Null Vier wegnimmt"

John Wallis deutet aber etwa zur gleichen Zeit negative Zahlen auf dem Zahlenstrahl als Längen in verschiedenen Richtungen.

In der Folge werden negative Zahlen immer weiter akzeptiert, bis sie im 19. Jahrhundert endgültig als richtige Zahlen anerkannt waren.

---
[4] nach: Denken und Rechnen 7, Westermann-Verlag, S.101/102
[5] Aus Malle,G., Hallo!, mathematik lehren, Heft 76 . Sequenz über die Einführung des Rechnens mit ganzen Zahlen, und Schnittpunkt 7, Klett 1996.

Es ist nicht verwunderlich, dass es so lange gedauert hat, bis man die negativen Zahlen anerkannt hat:

> Die meisten Probleme der Alltagsmathematik lassen sich mit positiven Zahlen alleine lösen, wenn man mit zwei Sorten von Größen rechnet: Statt von negativem Guthaben spricht man von Schulden, statt von negativen Temperaturen von Temperaturen unter Null usw.
> Erst wenn man systematisch Zusammenhänge darstellen will, ohne Fallunterscheidungen vornehmen zu müssen, zeigt sich die Nützlichkeit des Konzepts, nur eine Sorte von Zahlen zu Grunde zu legen, nämlich die Menge der ganzen Zahlen bzw. der rationalen Zahlen.

2.5 Die negativen Zahlen im Unterricht des 7.Schuljahres

2.5.1 Vorkenntnisse

- Kenntnisse über Skalen mit negativen Markierungen (Temperatur, Höhe über/unter Meeresspiegel, Minuspunkte im Spiel, Guthaben und Schulden „wir sind im minus", Kellergeschosse Raum –123, Zeiten vor Chr.)
- Operator –2 in der Grundschule in der Form $3 \xrightarrow{-2} \square$

2.5.2 Modelle zur Einführung und zum Rechnen mit negativen Zahlen

Die wesentlichen Schritte bei der Behandlung der rationalen Zahlen:

- **Erweiterung des Zahlenraums** der positiven rationale Zahlen (6.Schj.) zum Zahlenraum der rationalen Zahlen mit Hilfe von **Skalen**. Ableseübungen, Ordnen an der Zahlengeraden, Einzeichnen von Werten (auch Zwischenwerte schätzen). Betrag und Gegenzahl einer Zahl, Vorzeichen (auch auf dem TR).
  Erhöhen und erniedrigen von Skalenwerten um gewisse Beträge (z.B. Erhöhung/Erniedrigung der Temperatur um 5°) in der Form *Skalenwert ± Änderung = neuer Skalenwert*. So nur Addition und Subtraktion von *positiven* Werten.
- **Addition und Subtraktion** rationaler Zahlen. Schwierig dabei Subtraktion negativer Zahlen.
  Temperatur: Addition über Berechnung von Mittelwerten $\frac{7° + (-2°) + (-3°)}{3}$, Subtraktion über Temperaturunterschiede .
  Guthaben/Schulden, Kontostände: Addition über Gutschrift und Lastschrift, zur Subtraktion noch Rückbuchen von Gutschriften und Lastschriften nötig (→ Kontospiel, etwas künstliche Sprechweisen wie „Lastschrift rückbuchen" oder „Schulden wegnehmen")
  Pfeile auf dem Zahlenstrahl: Zahl und Gegenzahl als entgegen gerichtete Pfeile; Addition: Pfeile aneinander hängen; Subtraktion: Addition der Gegenzahl.
  Rechenstreifen: Entspricht den Pfeilen auf dem Zahlenstrahl.
  Permanenzreihen: 5 + (+4) = 9 , 5 + (+2) = 7, 5 + (+0) = 5 , 5 + (-2) = 3 , 5 + (-4) = 1,
  5 - (+4) = 1 , 5 - (+2) = 3 , 5 - (+0) = 5 , 5 - (-2) = 7 , 5 - (-4) = 9.
  Vermeidet künstliche Sprechweisen, ist aber wenig hilfreich als Gedächtnisstütze, da nicht mit inhaltlichen Vorstellungen verbunden.
  Subtraktion als Umkehroperation der Addition: +5-(-2) = +7 da 7 + (-2) = +5 , -5-(-2) = -3 da -3 + (-2) = -5
  „**Modell Kaner**": siehe „Ein ungewöhnliches Modell". Verzicht auf verquere Erklärungen wie „gehe die Treppe abwärts hoch".
- **Multiplikation** rationaler Zahlen.
  Guthaben/Schulden, Kontostände: Ein Faktor als Operator verstanden, Multiplikation mit positiver Zahl ist wiederholte Addition, mit negativer Zahl wiederholte Subtraktion ; „5 DM · (-3)" heißt „5 DM dreimal abziehen" usw.
  Pfeile auf dem Zahlenstrahl: Multiplikation mit positiven Zahlen als Streckungsoperation, mit negativen Zahlen als Spiegelung mit Streckung.
  Permanenzreihen: 5·(+3) = 15, 5·(+2) = 10, 5·(+1) = 5, 5·0 = 0 ,5· (-1) = -5 , 5· (-2) = -10 usw. für „+ mal –",
  4·(-3) = -12, 3·(-3) = -9, 2·(-3) = -6 ,1·(-3) = -3 , 0·(-3) = 0, (-1)·(-3) = +3 , (-2)·(-3) = +6 , usw. für „- mal -",
- **Division** rationaler Zahlen.
  Kaum einsichtige, inhaltlich deutbare Modelle für *alle* Fälle.
  Division als „Verteilen": Fälle „plus durch plus" und „minus durch plus" in diesem Modell gut deutbar.
  Division als „Messen": Fälle „plus durch plus" und „minus durch minus" gut deutbar, z.B. als „wie oft sind 30 DM Schulden in 120 DM Schulden enthalten?".
  Umkehroperation zur Multiplikation: Wohl am einsichtigsten +15 : (-3) = -5 , da (-5) · (-3) = +15 ist.

$$-5 \underset{:(-3)}{\overset{\cdot(-3)}{\rightleftarrows}} +15$$

Permanenzreihen wie bei der Multiplikation für „+ **:** -“ , wenn „- : -“ schon erklärt ist, z.B. durch „Messen“ (nicht gut geeignet):

$$
\begin{array}{lrl}
 & (-6) : (-2) & = +3 \\
+2 & (-4) : (-2) & = +2 \quad -1 \\
+2 & (-2) : (-2) & = +1 \quad -1 \\
+2 & 0 : (-2) & = 0 \quad -1 \\
+2 & (+2) : (-2) & = -1 \quad -1 \\
+2 & (+4) : (-2) & = -2 \quad -1 \\
+2 & (+6) : (-2) & = -3 \quad -1
\end{array}
$$

- **Verbindung der vier Rechenarten („**Rechenvorteile**“** : Kommutativgesetze, Assoziativgesetze, Distributivgesetz**).**
- **Strategien zur Berechnung von einfachen Summen und Differenzen (ohne Klammern) :** (-2)+(-7)-(-5)-(+4) = ?

1.Strategie: Gesamten Term in ***Summe*** von ***positiven und negativen*** Zahlen umwandeln, dann alle positiven addieren, alle negativen addieren und damit auf Summe von zwei rationalen Zahlen zurückführen (formaler als die 2. Strategie).
Beispiel: (-2)+(-7)-(-5)-(+4) = (-2)+(-7)+(+5)+(-4) = (-2)+(-7)+ (-4)+(+5) = -(2+7+4)+(+5) = (-13)+(+5) = -8

2.Strategie: Gesamten Term in ***Summe*** **und** ***Differenz*** von ***positiven*** Zahlen umwandeln, dann alle zu addierenden addieren, alle zu subtrahierenden addieren und auf Differenz von zwei positiven rationalen Zahlen zurückführen.
Beispiel: (-2)+(-7)-(-5)-(+4) = -(+2)-(+7)+(+5)-(+4) = 5 - (2+7+4) = 5 - 13 = -8

2.5.3 Schülerfehler beim Rechnen mit negativen Zahlen

- Verwechseln von Addition und Subtraktion mit Multiplikation: –3 – 4 = 7 wegen „minus mal minus gibt plus“
- Minuszeichen vor Klammern „ – (3x+4) = -3x +4 “
- Falsche Gegenoperation bei Äquivalenzumformungen: -2x = 8 | +2 ⇒ x = 10

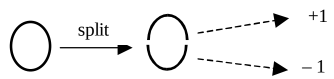
2.5.4 Verwendung von negativen Zahlen in späteren Schuljahren

- Algebra: Termumformungen, Lösen von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen
- Koordinatensystem: Systematische Darstellung von Funktionen; negative Steigung von linearen Funktionen (8.Schj.), quadratische Funktionen mit negativem Formfaktor
- Potenzen: negative Exponenten (9.Schj.), Zahldarstellung auf dem Taschenrechner und Computer in wissenschaftlicher Notation (Sci) , z.B. 1.3 EE-5
- Geometrie: zentrische Streckung mit negativem Streckfaktor (9.Schj.)
- Trigonometrie: trigonometrische Funktionen bei Winkeln im Einheitskreis (10.Schj.)
- Prozentrechnen: prozentuale Zunahme und Abnahme einheitlich behandelt : positive und negative Änderungsraten (8.Schj.)

2.6 Ein ungewöhnliches Modell

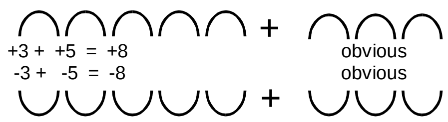
From abstract to concrete
Teaching negative numbers by Peter Kaner

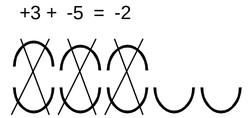
On the BBC computer programme, there was an expert talking about using the computer to write music. "There are three parameters for musical sounds, pitch, duration and volume." He went on to explain that volume is entered on a 15-point scale, -15 to 0. "-15 gives the loudest. It's a bit odd but you get used to it."
This seemed to me to be the zaniest ever in a long time of lunatic application of negative numbers. I can only assume that the programmer had his own reasons or perhaps had never heard of *p, pp, ppp, f, ff ,fff.* **Negative numbers have always baffled the majority of children, especially the concrete minded and they have watched with confusion the attempts of their teachers to prove the properties of negatives by reference to the real world. These applications such as going upstairs downwards or to the right leftwards have appeared eccentric to say the least. The fact is that the world gets by very comfortably without negatives by the use of a few appropriate signal words such as ‚below‘ (4 degrees below zero) or ‚overdraft' (Dear sir, I regret to inform you that your overdraft has risen by a further £100, in spite of ....etc)**. Even when the redoubtable number line is used as a means of explaining negatives it is not clear why right should be positive and left negative. Anything that is done with a graph can be done with its mirror image so choice of left or right is only a matter of convention. It is not even vital to have "up" as positive and "down" as negative, temperature for example gets lower as you go higher in the atmosphere. (Perhaps this is why the programmer chose his weird scale... It is extremely negative to have maximum volume of sound blaring from the speaker output of a computer, especially if the composition is by a computer freak!).
There is, thank goodness, a completely abstract way of teaching negative numbers which rarely fails to interest children and almost always gives them a reliable technique for dealing with negative numbers when they do occur in a genuine application. The idea starts from the fact that zero is not indivisible but can be divided in innumerable ways into a pair of of opposites. Perhaps separated or split would be better words to use than divided. This splitting of zero provides the most valuable introduction and can be shown diagrammatically as a split zero with the parts labelled +1 and –1.



A three dimensional model could be made from coconut shells or, if you want an ancient cultural symbol to represent the relationship between positive, negative and zero, what about the yin yang, the eternal symbol of male and female. The techniques of addition and subtraction follow in the simplest possible way as I have shown in the examples.

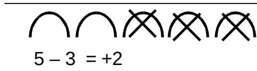
ADDITION



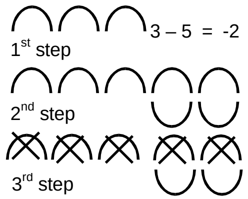


The complete zeros can be rubbed out rather than crossed out

Subtraction

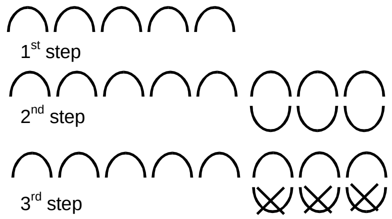


Three are ‘taken away’ or rubbed out. Obvious!

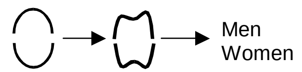


This is the key example. Two extra zeros are introduced and split so that 5 can be taken away.

5 – (-3) = 8 follows the above procedure but this time three zeros are introduced so that –3 can be subtracted.



If you need a further illustration of this process, a small topological distortion produces the sociological phenomenon of men and women looking for partners at a party. 5 – (-3) becomes the story ... „there are five spare men at a party, three women go home so now there are eight spare men at the party. (Very sad!)“



Historians tell us that negative numbers were developed relatively late in the course of mathematics and even now many teachers would hesitate before giving a rigorous proof of the well known rule „the product of two negatives is a positive“. In fact, the proof is extremely simple yet subtle. One is reminded of the way a Mozart melody can have simplicity and at the same time carry great emotion and be very difficult to play.

3 Algebra

3.1 Algebra im Überblick: Fachliche Grundlagen

3.1.1 Zentrale Leitbegriffe

Die folgenden Begriffe sind zentrale Bestandteile der Schulalgebra und werden im Laufe des Curriculums auf immer höherer Stufe behandelt und vertieft.

- **Variablen**
  → Aspekte
  Terme
  Aufbau, Definitionsbereich
  Äquivalenz von Termen (Definition semantisch, d.h. inhaltlich)
  Äquivalenzumformung von Termen (syntaktisch: formal, nach Regeln)
- **Gleichungen**
  Lösen von Gleichungen
  Äquivalenz von Gleichungen bzgl. Grundmenge (Definition semantisch: inhaltlich)
  Äquivalenzumformungen (syntaktisch: formal, nach Regeln)
- **Funktionen**
  Allgemeiner Funktionsbegriff
  Spezielle Funktionstypen
  Proportionalität, Antiproportionalität ($\boldsymbol{y = m \cdot x}$, $\boldsymbol{y = \frac{a}{x}}$)
  lineare Funktionen (genauer: affine Funktionen)
  quadratische Funktionen
  trigonometrische Funktionen
  Exponentialfunktion mit ganzzahligen Exponenten (implizit bei Zinseszins, Wachstum und Zerfall: $y=K_0 \cdot q^n$)

3.1.2 Fachwissenschaftliche Grundlagen:

Variablen
In der Mathematik sind Variablen Symbole für Objekte, in der Algebra der Schule meist für Zahlen. In der Informatik stehen Variablen für Speicherplätze für Daten verschiedener Typen wie Zahlen, Wörter oder komplexerer Gebilde.

Terme
Terme sind Ausrücke, die aus Variablen, Zahlen(namen), Operationszeichen und Klammern nach festen Regeln aufgebaut sind. Operationszeichen sind dabei die Zeichen für die Grundrechenarten +, -, · , : sowie weitere Zeichen wie Bruchstriche, Wurzelzeichen, Quadratzeichen, Zeichen für die Potenzoperation „hoch“ und weitere Funktionen. Ersetzt man alle in einem Term vorkommenden Variablen, so bezeichnet ein Term ein Objekt.

Beispiele für Terme: $2-5x$, $3+4$, $a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$, $\frac{x\cdot\sqrt{c-3}}{(x+4)^2}$

Zu jedem Term gehört ein größter Bereich von Werten für die Variablen, für die der Term definiert ist. Diesen Bereich nennt man den Definitionsbereich des Terms. Alle bis auf den letzten Term der Beispiele sind für alle Einsetzungen der Variablen definiert, der letzte Term nur für $x \neq 4$ und $c \geq 3$. Falls nötig, kann man diesen Bereich noch weiter einschränken.

Bemerkungen:
Oft werden zusätzliche Regeln zur Abkürzung von Termschreibweisen benutzt: Klammerersparnis durch „Punkt vor Strich“, Weglassen des Malpunktes in eindeutigen Fällen usw.
In der Informatik (z.B. Tabellenkalkulation) kommen komplexe Terme mit vielen weiteren Funktionszeichen vor, vielfach auch nicht numerische Terme (z.B. für Zeichenketten).

Äquivalenz von Termen

Definition:
Zwei Terme t_1 und t_2 heißen äquivalent (in Zeichen oft als $t_1 \sim t_2$ notiert) wenn
(1) ihre Definitionsbereiche übereinstimmen und
(2) die Werte von t_1 und t_2 für alle zugelassenen Einsetzungen der Variablen übereinstimmen

Diese Definition nimmt Bezug auf die Bedeutung der Operationen (sie ist also semantischer Natur), von Umformungsregeln muss dabei nicht gesprochen werden. Allerdings gibt diese Definition keinen Hinweis darauf, *wie* die Äquivalenz von zwei Termen nachgewiesen werden könnte.
Für die Schule sollte dieser Aspekt möglichst lange im Vordergrund stehen, da er intuitiv erfaßt werden kann und Äquivalenz immer wieder aufs neue unmittelbar eingesehen werden kann.
Beispiele: Prüfen Sie auf Äquivalenz

(a) 2(a+b) und 2a + 6b (b) $\sqrt{x^2}$ und x (c) (a-1)(a-2) und a^2-3a+2 (d) $\frac{x^2-1}{x+1}$ und x-1 (e) 2 sin x und sin(2x)

Man kann von einer *Termumformung* sprechen, wenn ein Term t_1 durch einen äquivalenten Term t_2 ersetzt wird. Dabei kann man inhaltlich argumentieren, ohne Bezug auf Regeln.

Es kann vorkommen, dass die Werte von zwei Termen t_1 und t_2 nicht für alle Werte von Variablen aus den Definitionsbereichen von t_1 und t_2 übereinstimmen, dass dies aber für Variablenwerte aus einer eingeschränkten Grundmenge G gilt. Man sagt dann, dass t_1 und t_2 äquivalent bezüglich der Menge G sind.
Erläutern Sie dies an den Beispielen oben.

Termumformungen syntaktisch (formal)

Um schnell und einfach die Äquivalenz von Termen nachzuweisen, sucht man ein System von (formalen) Regeln, die es erlauben, zu einem gegebenen Term äquivalente Terme zu finden. Solche Regeln können dann auch in einem Computer zur Umformung von Termen benutzt werden (→ Computer Algebra Systeme , z.B. DERIVE auf dem PC oder Taschenrechner TI 92).
Probleme dabei:
1. Jede Regelanwendung auf einen Term t_1 muss einen äquivalenten Term t_2 ergeben.
2. Jeder zu einem gegebenen Term t_1 äquivalente Term t_2 sollte durch eine wiederholte Anwendung von Regeln aus t_1 hervorgehen.

Während (1) meist einfach nachzuweisen ist, ist es nicht immer einfach, für ein Regelsystem zu zeigen, dass (2) erfüllt ist.

Verwenden Sie ein System von Regeln, um Terme äquivalent umzuformen?
Welches System von Regeln verwenden Sie (und auch der LP), um Terme umzuformen, wenn nur Zeichen für die Grundrechenarten +, -, · , : vorkommen?

Es zeigt sich, dass meist einige Regeln verwandt werden, dazwischen aber auch wieder auf die inhaltliche Definition zurückgegriffen wird.

Gleichungen

Eine Gleichung ist ein Ausdruck der Form $t_1 = t_2$, wobei t_1 und t_2 Terme sind. Eine Gleichung ist eine Aussageform.
Ersetzt man alle in einer Gleichung vorkommenden Variablen durch konkrete Zahlen aus den Definitionsbereichen der Terme, so erhält man eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Der Definitionsbereich einer Gleichung ist der Durchschnitt der Definitionsbereiche der beiden vorkommenden Terme.
Ersetzt man die in einer Gleichung vorkommenden Variablen $v_1, v_2,...,v_n$ durch ein n-tupel von Werten $(k_1, k_2,...,k_n)$ aus dem Definitionsbereich der Gleichung und ist die Gleichung dann erfüllt (wahr), dann heißt $(k_1, k_2,...,k_n)$ eine **Lösung der Gleichung**. Die Menge aller Lösungen heißt **Lösungsmenge** der Gleichung. Meist betrachtet man nur den Fall n=1.

Definition:
Zwei Gleichungen $t_1 = t_2$ und $t_1' = t_2'$ heißen äquivalent wenn
(1) ihre Definitionsbereiche übereinstimmen und
(2) die Lösungsmengen der beiden Gleichungen übereinstimmen,
d.h. jede Einsetzung der vorkommenden Variablen, die eine Gleichung erfüllt, erfüllt auch die andere.

Oft sind Gleichungen nur äquivalent, wenn man die zugelassenen Einsetzungen der Variablen auf eine Grundmenge G beschränkt. Man spricht dann wieder von Äquivalenz bezüglich der Grundmenge G.

Auch diese Definition ist wieder inhaltlich (semantisch) gegeben, sie bezieht sich nicht auf irgendwelche Umformungsregeln. Die Zulässigkeit von Regeln zur Äquivalenzumformung wird wiederum inhaltlich begründet.

Äquivalenzumformungen syntaktisch (formal)

Auch für Gleichungen sucht man ein System von (formalen) Regeln, die es erlauben von einer gegebenen Gleichung zu einer äquivalenten überzugehen. Auch diese Regeln können wieder in einem Computer zur Umformung von Gleichungen benutzt werden.

Wiederum muss gelten:

1. Jede Regelanwendung auf eine Gleichung muss eine äquivalente ergeben.
2. Jede zu einer gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung sollte durch eine wiederholte Anwendung von Regeln aus der ersten hervorgehen.

Während (1) wieder meist einfach nachzuweisen ist, ist es oft schwer, für ein Regelsystem zu zeigen, dass (2) erfüllt ist.

Nennen Sie die Regeln, die Sie benutzen, um Gleichungen äquivalent umzuformen.

3.2 Variablen und Variablenaspekte

Variablenaspekt 1: Was **ist** eine Variable?

<table>
<tr><td rowspan="2">Bedeutung (semantisch)</td><td>1.1 Gegenstandsaspekt
• x ist eine Zahl
• Für welche Zahl x ist x+5=3x-5?</td><td>Objektsprache</td></tr>
<tr><td>1.2 Einsetzungsaspekt
• Für x wird eine Zahl eingesetzt
• Löse die Gleichung x+5=3x-5</td><td rowspan="2">Metasprache</td></tr>
<tr><td>Formal (syntaktisch)</td><td>1.3 Kalkülaspekt
• Mit x wird nach gewissen Regeln operiert
• Termumformung nach Regeln
• Gleichungslösen nach Regeln</td></tr>
</table>

Variablenaspekt 2: Worauf **bezieht** sich eine Variable?

2.1 **Einzelzahlaspekt**

- Lösen von Gleichungen
- x steht für eine spezielle Zahl, die ich (noch) nicht kenne
- Parameter (beliebig, aber fest)

2.2 **Bereichsaspekt**

2.2.1 **Simultanaspekt**

- Alle Zahlen eines Bereichs gleichzeitig: "Formeln"
- $\forall a,b \in \mathbb{R}\ \ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.2.2 **Veränderlichenaspekt**

- dynamisch
- $y = x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$, x "durchläuft" $\mathbb{R}$
- Veränderliche x

Vorerfahrungen der Schüler mit Variablen vor deren expliziten Behandlung im 6.Schuljahr:

Wortvariablen der Umgangssprache
ein Mann, eine Zahl,
Platzhalter, Leerstellen in Termen und Gleichungen seit der Grundschule

$(3 + 5 = \square\ ,\ \ 3 + \square = 7\ ,\ \ 3 \xrightarrow{\boxed{\cdot}} 12)$

Buchstaben als Platzhalter in Zahlenrätseln

Vorbereitung zum Variablenbegriff: Zahlenrätsel

1.
$$\begin{array}{cccccc} & K & L & E & I & N \\ + & K & L & E & I & N \\ \hline W & I & N & Z & I & G \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{cccccc} & H & A & U & S \\ + & H & A & U & S \\ \hline S & T & A & D & T \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ & E & I & N & S \\ & E & I & N & S \\ & E & I & N & S \\ + & E & I & N & S \\ \hline & F & Ü & N & F \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{ccccccc} & & V & A & T & E & R \\ + & M & U & T & T & E & R \\ \hline & E & L & T & E & R & N \end{array}$$

Verschiedene Buchstaben sollen verschiedene Ziffern bedeuten!

3.3 Ein Spiel zu Termen: Rate meine Regel[6]

Ziel des Spiels: Durch Vergleich von Eingabe- und Ausgabezahlen die von einem Mitspieler erdachte Regel erraten.
Material: Taschenrechner für den Experten, Papier zum Notieren der Eingabe- und Ausgabezahlen.

Spielregel mit Beispiel.
Ein Mitspieler (Experte) denkt sich eine Regel aus, die sich auf alle Zahlen anwenden läßt. Die übrigen Mitspieler versuchen diese Regel zu erraten, indem sie reihum Zahlen nennen, zu denen der Experte jeweils eine neue Zahl sagt, die sich nach Anwendung der Regel auf die Zahl ergibt. Jeder Mitspieler schreibt alle Zahlen der Frager mit den Antworten des Experten in eine zweispaltige Liste und versucht aus dem Vergleich die Regel zu erschließen.
Wenn jemand glaubt, die Regel gefunden zu haben, gibt ihm der Experte, bevor er die Regel nennt, zwei Zahlen zur Bearbeitung. Wenn die Antwort so ausfällt, wie sie sich der Experte gedacht hat, darf er die Regel nennen. Falls es die richtige Regel ist, wird dieser Spieler neuer Experte, andernfalls wird mit dem bisherigen Experten weiter gespielt.

Beispiele:

Frager:	5	20	1	3	0	100	-10	0,8	x	
Experte:	1	8,5	-1	0	-1,5	48,5	-6,5	-1,1	Regel y =	x:2-1,5

Frager:	5	20	1	433	18	100	2316	0,8	x	
Experte:	0	0	0	4	0	1	3	0	Regel y =	Hunderterziffer von x

Frager:	5	20	1	3	0	100	-10	0,8	x	
Experte:	0,8	0,95	0	0,666.	ERROR	0,99	1,1	-0,25	Regel y =	1-1/x

Frager:	5	20	1	433	-14	-100	53	1	x	
Experte:	5	25	21	434	419	-114	-47	54	Regel y =	Summe der letzten 2 genannten Zahlen

Varianten:
Nur bestimmte Regelarten zulassen: z.B. *nur 1 Rechenart (5.* Schuljahr) oder *nur 2 Rechenarten (7.* Schuljahr) *oder Division muss dabei sein (8.* Schuljahr) *oder Quadrat muss dabei sein (9.* Schuljahr).
Vorbereitung: Klären, wie man Regeln aufschreiben kann; dabei Möglichkeit, auf eine algebraische Form als Abkürzung eines verbalen Sachverhalts hinzuarbeiten: z.B. *genannte Zahl verdoppeln und 3 dazuzählen* wird kürzer $\cdot 2+3$ oder $x \cdot 2+3$.
Spieleinführung: Ein Spiel mit der Klasse vorspielen, dabei Liste an der Tafel notieren, um zu zeigen, wie aufgeschrieben wird und wie man am Schluß die Regel hinschreiben kann.
Lernziele:
Experte: Sich verschiedene Regeln ausdenken; Zahlen einsetzen; Lücken im Definitionsbereich erkennen; Gleichwertigkeit von Termen erkennen, wenn Frager die gleiche Regel in anderer Form formuliert hat.
Frager: Zusammenhänge zwischen Eingabe- und Ausgabezahl untersuchen; verschiedene Rechnungen testen; Muster und Gesetzmäßigkeiten erkennen, geeignete Testzahlen ausdenken (besondere Rolle der 0); Hypothesen formulieren; Hypothesen testen; Hypothesen verwerfen; Umgang mit Variablen: Gesetzmäßigkeiten formulieren; Variable einsetzen.
Strategie: Bei bestimmten Regeln kann man schließlich durch Nennung von 2 Zahlen die Regel finden.
Stellung im Unterricht: In allen Phasen denkbar (als Vorbereitung - begleitend - oder als Nachbereitung).
Zwei große Vorteile des Spiels: einfache Durchführbarkeit und ständige Erweiterungsfähigkeit.

[6] Quelle: Diane Resek, Berkeley (1973 mündlich an Herrn Lörcher)

3.4 Algebra vom 7.-10.Schuljahr: Inhalte und fachlicher Hintergrund

3.4.1 Terme und lineare Gleichungen (7.Schuljahr)

- Vorkenntnisse aus 6.Schj.: Terme mit einem oder mehreren Variablen („Platzhaltern“) als kurze Schreibweise für Rechenanweisungen, Berechnen von Termwerten, Aufstellen von Termen (Geometrie, Sachaufgaben), einfache Termumformungen wie 3a + 2a = 5a ; keine Gleichungen.
- Terme aufstellen, Einsetzen in Terme, Wertetabellen
- Termumformungen mit Summen, Ausklammern einfacher Faktoren, geometrische Veranschaulichung mit Flächen
- Lineare Gleichungen,
  Lösen durch systematisches Probieren (inhaltliche Argumentation nicht zu früh verlassen)
  Äquivalenzumformungen (Waagemodell, Faltmodell)
  Anwendungsaufgaben

3.4.2 Terme mit Klammern (8. Schuljahr)

- Vereinfachen von Summen von Termen: Zusammenfassen gleichartiger Summanden, Auflösen von Klammern mit Minuszeichen davor.
- Vereinfachen von Produkten von einfachen Termen: Potenzen von Variablen mit natürlichen Exponenten ($(2x)^3 \cdot 3ax$).
- Ausmultiplizieren und Ausklammern von Termen mit Variablen ($(25x^3y - 16xy^3) = xy\,(25x^2 - 16y^2)$, beide Richtungen).
- Produkte von Summen mit Variablen (4x - (3x-2y)(-4y-x-1)); geometrische Veranschaulichung durch Rechtecksflächen
- Binomische Formeln zum Quadrieren und zum Faktorisieren von Termen; Faktorisieren nur mit binomischen Formeln und Ausklammern.
  Nicht im Lehrplan: Allgemeines Faktorisieren von Summen wie z.B. x^2-5x-6 (s. unten :quadratische Gleichungen)
- Lineare Gleichungen mit Produkten von Summen; Quadrate der Variablen können auftreten, fallen aber stets zuletzt heraus. Aufstellen von Termen und Gleichungen im wesentlichen für geometrische Sachverhalte und Zahlenrätsel.

3.4.3 Bruchterme und Bruchgleichungen (8. Schuljahr)

- Einsetzen in gegebene Bruchterme, Definitionsbereich von Termen, eventuell Faktorisieren des Nenners nötig
- Erweitern und Kürzen von Bruchtermen, Faktorisieren von Zähler und Nenner, Hauptnenner zweier Bruchterme
- Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen
- Lösen von Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichungen führen (10.Schj.: Bruchgleichungen die auf quadratische Gleichungen führen). Definitionsmenge beachten.
- Verhältnisgleichungen (→ proportionale Zuordnungen); bei geschickter Wahl der Verhältnisse können Bruchgleichungen vermieden werden. Standardbeispiele: Kettenschaltung beim Fahrrad; Mischungsverhältnisse, Maßstab
- Umformung von Formeln mit Bruchtermen (→ Prozent- und Zinsrechnung)
- Es gibt nur wenige einfache sinnvolle Anwendungsaufgaben, z.B. die Linsengleichung der geometrischen Optik $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$. Daher sind außer Verhältnisgleichungen meist Zahlenrätsel oder eher unrealistische Aufgabenstellungen („Füllaufgaben“) zu finden.

3.4.4 Der Funktionsbegriff (ab 8. Schuljahr.)

Verschiedene Auffassungen

- Mengentheoretisch (spezielle Relation): $R \subseteq A \times B$ ist eine Funktion von A nach B, wenn..... (nicht in der SI).
- Zuordnung f: $x \to y$, $x \in D$ mit einer gegebenen Zuordnungsvorschrift. Zuordnung im Sachrechnen ab 7.Schuljahr.
- Eine Größe y ist eine Funktion von anderen Größen
  z.B. in der Physik: Die Verlängerung s eines Gummibandes ist eine Funktion der Kraft F, mit der man an der Feder zieht: s=s(F), oder auch Das Volumen V einer Luftmenge ist Funktion von Druck p, Temperatur T und Stoffmenge m :
  Funktion von mehreren Veränderlichen, Darstellung im räumlichen Koordinatensystem, z.B.
  V=V(p,T), Gesetze von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac. Funktionen mehrerer Variablen nicht explizit in der SI.

Zuordnungsvorschriften (Darstellung von Funktionen)

- Tabelle
- Verbale Beschreibung
- Schaubild im Koordinatensystem
- Term (Funktionsgleichung y = t(x))
- Term mit Fallunterscheidungen (d.h. Terme mit der Funktion wenn(_ _ _ , _ _ _ , _ _ _) , → Tabellenkalkulation)
- Beschreibung der Relation (implizite Beschreibung, z.B. $\mathbf{R} = \{ (x,y) \mid x \in [-1,1] \text{ und } y \in [0,\infty) \text{ und } x^2+y^2 = 1 \}$)

Bezeichnungen

Funktions*name*: f , Funktions*wert* an der Stelle x: f(x)
Schülerfehler bei trigonometrischen Funktionen : Funktionsname sin gekürzt z.B. $\frac{\sin(\mathbf{30°})}{\sin(\mathbf{60°})} = \frac{\mathbf{30°}}{\mathbf{60°}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Gleichungen, Nullstellen, Schnittpunkte

Die drei Probleme
- Lösen von Gleichungen,
- Bestimmen von Nullstellen,
- Bestimmen von Schnittpunkten von Funktionsgraphen

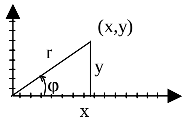
hängen eng zusammen und jedes Problem läßt sich auf die beiden anderen zurückführen. Dies ist besonders im Hinblick auf die immer weiter verbreiteten Graphiktaschenrechner und Computer von Bedeutung, da sich damit näherungsweise Nullstellenbestimmungen auf einfachste Weise durchführen lassen (Funktionsgraph zeichnen und Trace-Modus benutzen).
Formulieren Sie um: Löse die Gleichung $x^2 = 2x+4$.

Behandlung in der Schule

- Welcher Funktionsbegriff wird zu Grunde gelegt?
- Welche Definitionen werden gegeben?
- Geben Sie eine geeignete Definition an! (Besser implizit als explizit)
- In welchen Schuljahren werden diese Begriffe behandelt?

3.4.5 Koordinatensysteme

Kartesisches Koordinatensystem
Stufenfolge
Gitternetz mit positiven ganzen Zahlen als Koordinaten in der GS
1.Quadrant mit positiven rationalen Koeffizienten im 6. Schj.
Erweiterung des Koordinatensystems im 7. Schuljahr auf alle 4 Quadranten mit rationalen Koordinaten



*Polarkoordinaten (nicht im LP Mathematik der RS)
ebenes Koordinatensystem → CAD, Taschenrechner (Pythagoras x, y → r),
Suchen Sie die Umrechnungsfunktionen (x,y) ↔ (r,φ) als Hausaufgabe !
*Kugelkoordinaten (nicht im LP Mathematik der RS, aber aus der Geographie bekannt)
räumliches Koordinatensystem → Geographie (Radius, Längengrade, Breitengrade)
Umrechnungsfunktionen?

3.4.6 Lineare Funktionen (8.Schuljahr)

In der Schule bezeichnet man Funktionen mit der Funktionsgleichung y = mx + b als lineare Funktion (LP).[7]
Je größer – desto größer / Je größer – desto kleiner :
Was bedeutet das für Funktionen? Gilt das für lineare Funktionen? Für welche gilt was? Ist das hinreichend für lineare Funktionen?
Welche Eigenschaften definieren proportionale Funktionen? (→ Sachrechnen 7.Schuljahr)
Welche Eigenschaften definieren lineare Funktionen?
Definition über Wachstum:
Es gibt eine Zahl m, so dass gilt: Nimmt x um einen Betrag d zu, dann nimmt y um den Betrag m·d zu.
Beispiele, Anwendungen?
Deutung der Steigung m
Hilfe beim Zeichnen des Schaubildes für rationale Steigungen m, z.B. m= $\frac{3}{4}$, m= $-\frac{5}{4}$?
Deutung des y-Achsenabschnittes b
Lineare Umrechnung von 30 Punkten in die Notenskala 1 bis 6:
Schaubild? Funktionsterm? Wie kann man die Gleichung finden? Deutung von m und b in diesem Zusammenhang?

3.4.7 Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen (8.Schuljahr)

Wo treten lineare Gleichungssysteme (LGS) auf? Typische Beispiele im 8.Schuljahr?
Schreibweise von LGS
Lösungsmenge eines LGS und geometrische Deutung (auch „keine Lösung“ und „unendlich viele Lösungen“)
Lösungsverfahren graphisch (→ Graphiktaschenrechner)
Probleme der Schüler, Stufenfolge bei der Behandlung?
Lösungsverfahren rechnerisch (→ **C**omputer **A**lgebra **S**ysteme)

[7] Die strengen Bezeichnungen in der Mathematik unterscheiden sich häufig von denen der Schule. Dort bezeichnet man als lineare Funktionen: Funktionen mit der Gleichung y=mx (allgemeinere Definition s. Sachrechnen bzw. Lineare Algebra), affine Funktionen: Funktionen mit der Gleichung y=mx+b .

Welche Verfahren? Stufenfolge? Vor- und Nachteile? Schreibweisen?
Welche **Ziele** gibt der Lehrplan für die Behandlung von LGS an? Wie könnte man diese Ziele erreichen?

3.4.8 Potenzen und Wurzeln (9.Schuljahr)

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, Potenzgesetze
Definition von a^0 und a^{-n} für $n \geq 1$?
Herleitung der Rechenregeln für Potenzen?
Zahldarstellungen im Taschenrechner und Computer
Zehnerpotenzen
Modus Sci, Fix bei Taschenrechnern
Wurzeln
Definition n-te Wurzel? Problem bei negativen Radikanden bei ungeradem n (Unterschiede bei verschiedenen Taschenrechnern)
Irrationalität der Quadratwurzel von 2 (sogar aller nicht-Quadratzahlen); Beweis dazu? Reelle Zahlen.
Näherungsverfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln (Intervallhalbierung, Heron-Verfahren, Begründung dazu)
Rechengesetze für Quadratwurzeln? Herleitungen (exakt / schulische Behandlung)? Teilweise Wurzelziehen.
Rationalmachen von Nennern ohne Summe im Nenner (Was heißt das? Wozu wird das gebraucht?)
Wurzeltasten auf verschiedenen Taschenrechnern.
Wo braucht man in der RS überhaupt n-te Wurzeln für n größer als 3?

3.4.9 Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen (9. und 10. Schuljahr)

9.Schuljahr:
Definition quadratischer Funktionen? Welche Typen im 9.Schuljahr?
Wo treten quadratische Funktionen auf? Typische Beispiele im 9.Schuljahr?
Lösung rein quadratischer Gleichungen: Verschiedene Begründungsmöglichkeiten für die Lösung (formal durch Faktorisierung / intuitiv-inhaltlich)
Wozu braucht man quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen? Was rechtfertigt ihre Behandlung in der RS?
Was sagt der Lehrplan dazu? Gibt der Lehrplan an, welche Anwendungsgebiete eine Rolle spielen?

10.Schuljahr:
Stellen Sie die Scheitelform für die Funktion mit der Gleichung $y = x^2-6x+1$ her (ohne Verwendung einer Formel).
Warum kann man daraus die Scheitelkoordinaten ablesen? (strenge Begründung, Extremaleigenschaft)
Behandlungsmöglichkeiten der Scheitelform in der Schule?
Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2-6x+5 = 0$ auf drei verschiedene Arten ohne Verwendung einer Lösungsformel:

- Graphisch (Zwei Arten: Nullstellenbestimmung für eine quadratische Funktion, Schnittstellenbestimmung für die Graphen einer rein quadratischen Funktion und einer linearen Funktion)
- Durch quadratische Ergänzung
- Durch Faktorisierung (häufiges Verfahren in US-Curricula)

Was davon schreibt der Lehrplan vor? Wie kann man in der Schule vorgehen?

Geben Sie eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1=3$ und $x_2=5$ an.
Warum kann man sich bei der Lösung quadratischer Gleichungen auf den Fall $x^2+px+q = 0$ beschränken und muss nicht den allgemeinen Fall der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ behandeln?

Welche Lösungsformeln sind für die Schule möglich? Welche Vorteile/Nachteile sehen Sie?

Für	ax^2+bx+c	$= 0$
Für	x^2+px+q	$= 0$
Für	x^2	$= mx+b$

Welche Schwierigkeiten erwarten sie bei Schülern bei der Anwendung der Formeln?
Was könnte für / gegen eine Anwendung der Formeln sprechen?

Kann man sich auch bei den quadratischen Funktionen auf die Funktionen mit der Gleichung $y= x^2+px+q$ beschränken?
Kann man jede Funktion mit der Gleichung $y= ax^2+bx+c$ auch in der Form $y= x^2+px+q$ schreiben? Zusammenhang der Funktionsgraphen der beiden Formen?
Was sagt der „Satz von Vietà“ ? (nicht explizit im Lehrplan der Realschule in BW) Begründung des Sachverhalts?
Geben Sie eine Bruchgleichung an, die auf eine quadratische Gleichung führt.

Typische Aufgaben der Realschulabschlußprüfung mit quadratischen Gleichungen
- rein algebraisch gestellte Aufgaben,
- geometrische Aufgaben (Pyramidenstümpfe).

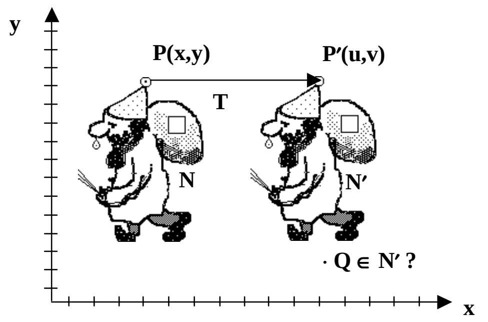
3.4.10 Verschieben und Strecken/Stauchen von Funktionsgraphen: Einheitliche Darstellung als Hintergrundwissen

Problem:
Wie hängt der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = 3(2x+2)^2 + 4$ mit dem Graphen von $y = x^2$ zusammen?

Im folgenden wird gezeigt, wie man in einheitlicher Weise die Gleichungen von Funktionsgraphen finden kann, die sich aus dem Graphen einer Basisfunktion durch Strecken, Stauchen und Verschieben in die beiden Achsenrichtungen des Koordinaten-systems ergeben.
Diese Darstellung ist **nicht für die Behandlung in der Realschule geeignet** sondern kann nur als Hintergrundwissen und als Ausblick auf die SII dienen.

Transformieren von Relationsgraphen

Jede Funktion ist eine spezielle Relation. Relationen über $\mathbb{R}$ sind Teilmengen von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und können im kartesischen Koordinatensystem als Menge von Punkten dargestellt werden. Die „Nikolaus-Relation“ N möge das veranschaulichen.
Nun kann man auf den Relationsgraphen eine umkehrbare Transformation T anwenden, z.B. eine Verschiebung, und erhält einen neuen Graphen N‘. Im Beispiel sei T die Translation T: $(x,y) \mapsto (x+6,y)$.



Für einen Punkt P(x,y) und seinen Bildpunkt P′(u,v) gilt offensichtlich:

$$P' \in N' \Leftrightarrow P \in N \Leftrightarrow T^{-1}(P') \in N$$

Um also zu prüfen, ob ein Punkt $Q(u,v) \in N'$ ist, muß man prüfen, ob $T^{-1}(Q) \in N$ ist.

In unserem Fall heißt das:

$$(u,v) \in N' \Leftrightarrow (u\text{-}6,v) \in N,$$

d.h. man muß den Punkt Q **zurückschieben** und prüfen, ob dieser Punkt zu N gehört.

Allgemeine Regel
Wird die Relation N durch eine Gleichung G(x,y) beschrieben, so erhält man die Gleichung G‘(x,y) für die transformierte Relation, indem man die **rücktransformierten** Koordinaten in die Ausgangsgleichung G(x,y) einsetzt.

Beispiel:

Ein Kreis K mit Mittelpunkt M(0,0) und Radius 2 wird durch die Gleichung G: $x^2 + y^2 = 4$ beschrieben (Satz des Pythagoras). Verschiebt man den Kreis in x-Richtung um +6, so erhält man die Gleichung für den verschobenen Kreis indem man die rücktransformierten Koordinaten in die Ausgangsgleichung einsetzt: G‘: $(x-6)^2 + y^2 = 4$.

Wie heißt die Gleichung, wenn man den Ausgangskreis
- in x-Richtung um -5 verschiebt,
- in y-Richtung um +3 verschiebt,
- in y-Richtung um -5 verschiebt?

Verschiebungen in Achsenrichtungen:

Man erhält die Gleichung eines um $\pm a$ in x- oder y-Richtung verschobenen Graphen, indem man die Verschiebungsgröße a mit **umgekehrtem** Vorzeichen unmittelbar an die entsprechende Variable anhängt.

Aufgabe 1:

1. Bestimmen Sie mit dieser Regel die Gleichung des Graphen, der aus $y=x^2$ hervorgeht durch
   (a) Verschiebung in y-Richtung um +2, (b) Verschiebung in y-Richtung um –3,
   (c) Verschiebung in x-Richtung um +5 (d) Verschiebung in y-Richtung um –4.
2. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem, was Sie mit den Kenntnissen der SI erhalten haben.
3. Ist für die Verschiebung eines Graphen in x-Richtung und eine anschließende Verschiebung in y-Richtung die Reihenfolge der Verschiebungen entscheidend?
4. Geben Sie die Gleichung des Graphen an, der aus y=x2 entsteht durch
   (a) Verschiebung in y-Richtung um +2 und anschließende Verschiebung in x-Richtung um +5
   (b) Verschiebung in y-Richtung um -3 und anschließende Verschiebung in y-Richtung um +4
   (c) Verschiebung in y-Richtung um -3 und anschließende Verschiebung in y-Richtung um -6.

Strecken/Stauchen und Spiegeln in Achsenrichtungen: senkrechte Achsenaffinitäten

Streckungen, Stauchungen und Spiegelungen an den Koordinatenachsen sind senkrechte Achsenaffinitäten mit verschiedenen Affinitätsfaktoren.

Streckungen:	Faktor positiv und kleiner 1,
Stauchungen:	Faktor positiv und größer 1
Spiegelungen:	Faktor –1

Beispiele:

Streckung in y-Richtung mit Faktor 3:	A: $(x,y) \mapsto (x,3y)$
Streckung in x-Richtung mit Faktor 2:	A: $(x,y) \mapsto (2x,y)$
Spiegelung an der x-Achse:	A: $(x,y) \mapsto (x,-y)$

Wie heißen die entsprechenden Rücktransformationen?

Die Parabel mit der Gleichung $y=x^2$ soll in y-Richtung mit Faktor +2 gestreckt werden. Die Abbildungsvorschrift lautet A: $(x,y) \mapsto (x,2y)$. Die Gleichung der gestreckten Parabel erhält man indem man in die Ausgangsgleichung die rücktransformierten Koordinaten einsetzt: $\frac{y}{2} = x^2$, oder in vertrautere Form umgeformt $y = 2x^2$.

Die Parabel mit der Gleichung $y=x^2$ soll in x-Richtung mit Faktor +3 gestreckt werden. Die Abbildungsvorschrift lautet A: $(x,y) \rightarrow (3x, y)$. Die Gleichung der gestreckten Parabel erhält man indem man in die Ausgangsgleichung die rücktransformierten Koordinaten einsetzt: $y = \left(\frac{x}{3}\right)^2$.

Strecken/Stauchen/Spiegeln in Achsenrichtungen:

Man erhält die Gleichung eines mit Faktor k in x- oder y-Richtung gestreckten/gestauchten/gespiegelten Graphen, indem man in der Ausgangsgleichung den **Faktor** unmittelbar an die entsprechende Variable **als Nenner** anhängt.

Aufgabe 2:

1. Bestimmen Sie mit dieser Regel die Gleichung des Graphen, der aus $y=x^2$ hervorgeht durch
   (a) Streckung in y-Richtung mit Faktor 4 (b) Stauchung in y-Richtung mit Faktor 1/3
   (c) Streckung in x-Richtung mit Faktor 5 (d) Stauchung in x-Richtung mit Faktor 1/4
   (e) Spiegelung an der x-Achse (f) Spiegelung an der y-Achse
2. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem, was Sie mit den Kenntnissen der SI erhalten haben. Skizzieren Sie die Parabeln.
3. Ist für die Streckung/Stauchung eines Graphen in x-Richtung und eine anschließende Streckung/Stauchung in y-Richtung die Reihenfolge der Transformationen entscheidend?
4. Kann man Verschiebungen, Streckungen und Stauchungen in alle möglichen Richtungen vertauschen? Wobei spielt die Reihenfolge eine Rolle, wo nicht? Geben Sie Beispiele an.
5. Geben Sie die Gleichung des Graphen an, der aus $y=x^2$ entsteht durch
   (a) Verschiebung in y-Richtung um +2 und anschließende Streckung in y-Richtung mit Faktor 5
   (b) Streckung in y-Richtung mit Faktor 5 und anschließende Verschiebung in y-Richtung um +2
   (c) Streckung in y-Richtung mit Faktor 5 und anschließende Verschiebung in x-Richtung um +2

Aufgabe 3:

Wie heißt die Gleichung der Parabel, die aus der Normalparabel mit der Gleichung $y=x^2$ hervorgeht indem die folgenden Transformationen nacheinander angewandt wurden:

(a) Verschiebung in x-Richtung um +1
Streckung in x-Richtung mit Faktor 3
Spiegelung an der x-Achse
Streckung an der y-Achse mit Faktor 2

(b) Streckung in x-Richtung mit Faktor 2
Verschiebung in x-Richtung um -4
Spiegelung an der x-Achse
Stauchung an der y-Achse mit Faktor ½

(c) Stauchung an der y-Achse mit Faktor 2/5
Verschiebung in x-Richtung um -5
Streckung in x-Richtung mit Faktor 3
Verschiebung in y-Richtung um -6

(d) Verschiebung in x-Richtung um -1
Streckung in x-Richtung mit Faktor 4
Spiegelung an der x-Achse
Streckung an der y-Achse mit Faktor -3

Lösung zu (a):

$$y = x^2 \xrightarrow{x-Versch.} y = (x-1)^2 \xrightarrow{x-Str} y = \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 \xrightarrow{x-Spieg.} y = \left(\frac{-x}{3} - 1\right)^2 \xrightarrow{y-Str.} \frac{y}{2} = \left(\frac{-x}{3} - 1\right)^2$$

$$\xrightarrow{umformen} y = 2\left(\frac{-x}{3} - 1\right)^2$$

Aufgabe 4:

Wie entstehen die folgenden Parabeln aus der Normalparabel mit der Gleichung $y=x^2$? Wo liegt der Scheitel?
(a) $y = 2(x-3)^2+4$ (b) $y = (x/3-1)^2-2$ (c) $y = 3(2x-1)^2+1$

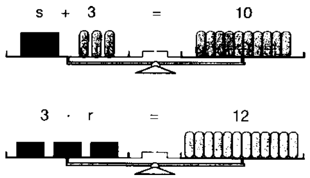
Aufgabe 5:

Zeigen Sie am Beispiel der Parabel mit der Gleichung $y = 5(2x+3)^2-4$ dass man für alle Parabeln, die aus der Normalparabel durch die zuvor behandelten Transformationen hervorgehen, auf die Affinitäten in Richtung der x-Achse verzichten kann.
Hinweis: geeignet umformen.
Beachten Sie: Diese Tatsache gilt nicht für alle Funktionsgraphen. Für die trigonometrischen Funktionen beispielsweise ist dies falsch. (Begründung?)

CALVIN AND HOBBES By Bill Watterson

3.5 Gleichungen im 7.Schuljahr: Modelle

Waagemodell[8]



Die Waagschalen der Balkenwaagen sind im Gleichgewicht. Die Gewichtsstücke sind 1-kg-Stücke.

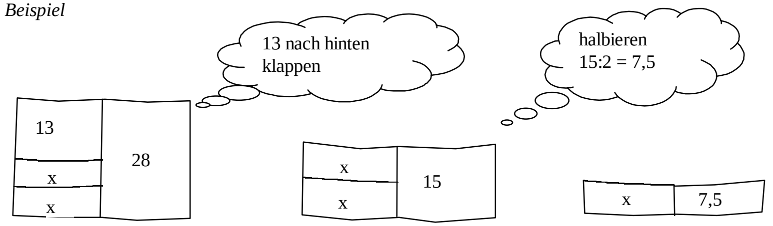
a) Wie kann man die 1. Waage links und rechts verändern, um das Gewicht s der schwarzen Schachtel zu ermitteln?

b) Wie kann man die 2. Waage links und rechts verändern, um das Gewicht r der roten Schachtel zu ermitteln?

Modell „Papierblatt“ [9]

Falte jeweils ein Papier der Länge nach in der Mitte, klappe es auf und zeichne freihändig die folgenden Bilder darauf. Löse die Gleichung wie im Beispiel durch Falten und Berechnen der neuen Werte. Schreibe die Gleichungen untereinander ins Heft.

Beispiel



$$\begin{array}{rcl} 13 + 2\cdot x &=& 28 \\ -13 & & -13 \\ \hline 2\cdot x &=& 15 \\ :2 & & :2 \\ \hline x &=& 7{,}5 \end{array}$$

Modell „Umkehroperation“[10]

$$x \xrightarrow{\cdot 4} 4\cdot x \xrightarrow{+6} 4\cdot x + 6 = 18$$

$$3 \xleftarrow{:4} 12 \xleftarrow{-6}$$

Schema für Umformungen hier:

$$\begin{array}{l} A + B = C \iff A = C - B \\ A - B = C \iff A = C + B \\ A \cdot B = C \iff A = C : B \\ A : B = C \iff A = C \cdot B \end{array}$$

Aufstellen von Gleichungen[11]

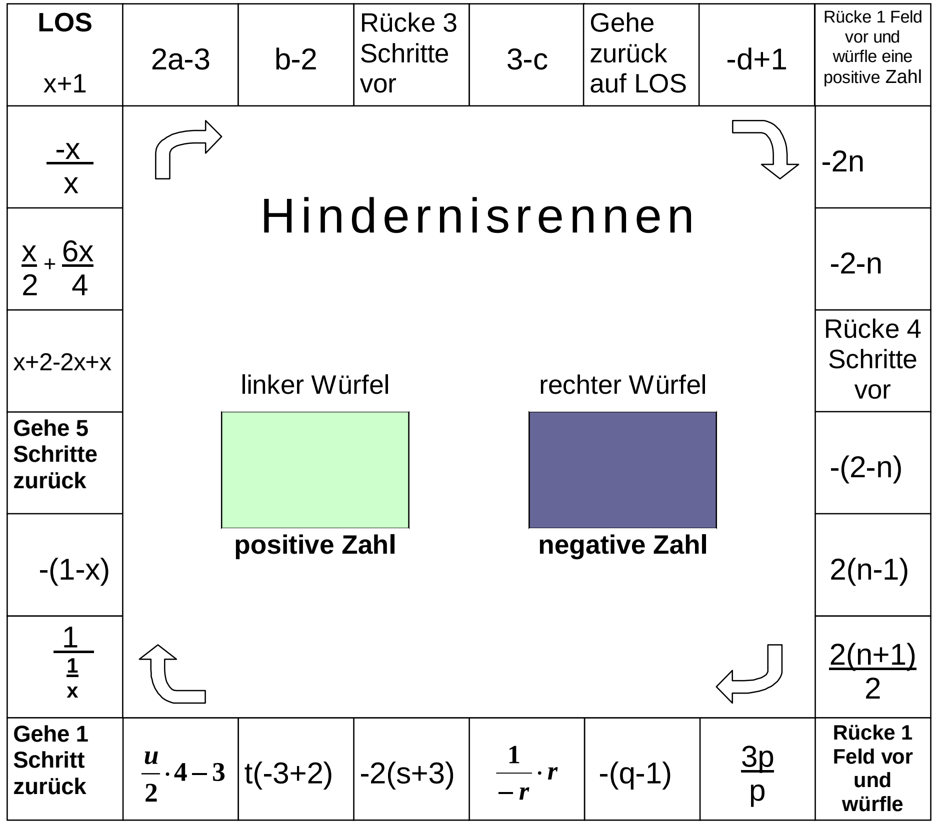
Schreibe zu jedem Zahlenrätsel eine Gleichung auf und löse sie.

a) Ich denke mir eine Zahl, verdopple sie, zähle 18 dazu und erhalte 0.
b) Wenn man meine gedachte Zahl durch 10 teilt und davon 20 abzieht, erhält man 1000.
c) Subtrahiere von 20 das Vierfache einer Zahl, dann erhältst du 18.
d) 0,4 ist gleich groß wie die Summe vom zehnten Teil einer Zahl und -0,4.

---

[8] Querschnitt
[9] Querschnitt
[10] Malle
[11] Querschnitt

3.6 Ein Spiel zu Bruchtermen: Hindernisrennen[12]



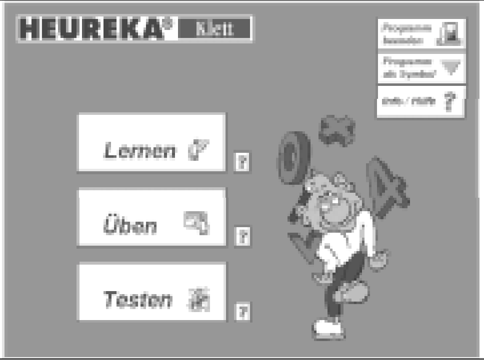
Spielregel:
Jeder Spieler stellt seinen Spielstein auf LOS. Wer die höchste Zahl würfelt, beginnt. Dann wird in Pfeilrichtung gespielt. Vor dem Würfeln entscheidet der Spieler, ob er mit dem positiven oder negativen Würfel würfeln will. Jeder Spieler setzt seine Zahl, die er gewürfelt hat, in den Term ein, auf dem sich sein Spielstein befindet. Wenn das ausgerechnete Ergebnis positiv ist, rückt er so viele Schritte in Pfeilrichtung weiter, wenn es negativ ist, entgegengesetzt. Wenn es kein Ergebnis gibt, muß er wieder zurück auf LOS.
Gewonnen hat, wer zuerst über LOS kommt.

Beispiel:
A würfelt mit dem positiven Würfel 5 und geht 6 Schritte vor. Er kommt auf das Feld –d+1. Beim nächsten Mal nimmt er wieder den positiven Würfel und würfelt 3. Er muß also 3 Schritte zurück auf 3-c. Jetzt wählt er den negativen Würfel und würfelt –4. Er kann also 7 Schritte vorwärts gehen und kommt auf –(2-n). Er würfelt +1 und muß 1 rückwärts gehen......

---

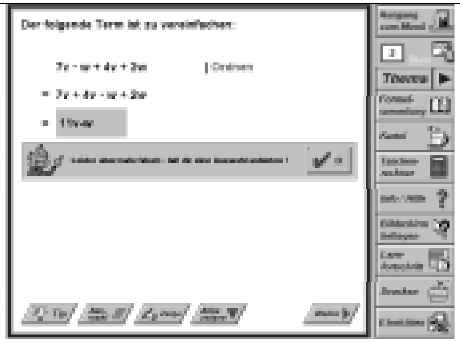
[12] Quellen: Idee aus A.Friedlander, The Steeplechase, in Mathematics Teaching 30, 1977, S. 37-39
Einfachere Variante: Kahle/Lörcher, Querschnitt Mathematik 7, Westermann Verlag 1994, S 147

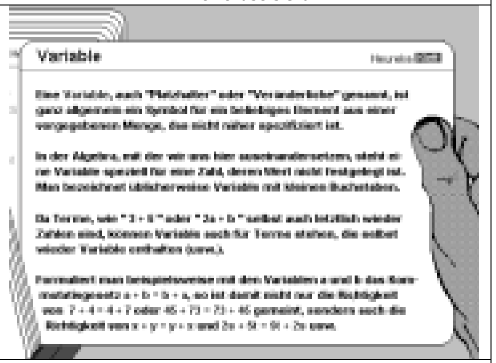
3.7 Übungsprogramme zur Algebra: Beispiel *Termumformung* (Klett Software)



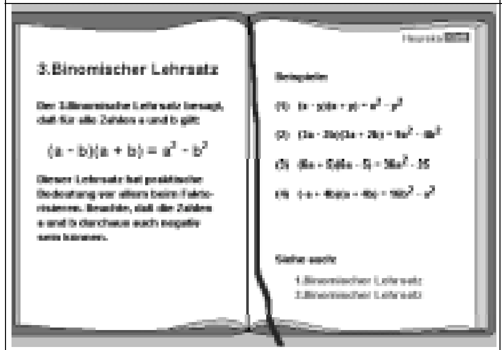
Titelseite

Themenübersicht

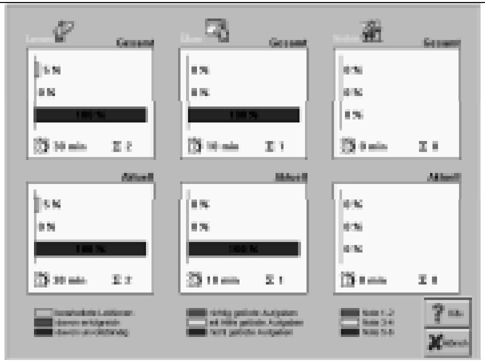

Üben mit Hilfen und Fehleranalyse



Karteikasten mit Definitionen und Erklärungen



Formelsammlung


Übersicht über Bearbeitungserfolg

3.8 Ein Paket von Übungs- und Testprogrammen zur Algebra in der SI: SMILE

Paket von 6 Programmen, davon 5 zur Algebra, eines zu Strahlensätzen.
Bezugsquelle: CoTec, Traberhofstr. 12, 83026 Rosenheim, Tel.: 08031/2635-0, Fax: 08031/2635-29
Nutzungsbedingungen: (Stand Sommer 2000)
Einzellizenz: DM 138.-
Schullizenz: DM 398.-
Schülerlizenz DM 40.- (ab 3 Stück)
Lizenz für ein Einzelprogramm für Schüler DM 10.- (ab 6 Stück, bei Dr.Gutschke direkt)
Hardw./Betriebssystem:MS DOS Rechner, 512KB, CGA-, EGA-, VGA-, Hercules-Graphikkarte

Positiv zu bewerten (Bewertung aus der SODIS-Datenbank, mit Ergänzungen):
- Einsatzmöglichkeiten:
  SMILE-Programme behandeln Schulstoff, der zum normalen Pflichtpensum des Mathematikunterichts gehört. Sie sind geeignet für Übungs-, Wiederholungs- und Förderstunden an Gymnasien oder Realschulen. Auch die selbständige Erarbeitung der Lerninhalte ist möglich. Die Programme stellen den Schülern Aufgaben variabler Schwierigkeit, kommentierten die Schülerlösung, analysieren Fehler, stellen Hilfen und Erläuterungen bereit. Ein bis vier Schüler pro Computer können unabhängig voneinander üben.
- Variabler Modus:
  Je nach Lernstil des Schülers kann sich dieser entscheiden für Lernmodus, Übungsmodus, Tempomodus oder Testmodus.
- Variable Schwierigkeit:
  Unabhängig vom Modus ist die Schwierigkeit der einzelnen Aufgaben veränderlich. Nach einer bestimmten Anzahl richtig gelöster Aufgaben steigt der Schwierigkeitsgrad und paßt sich der Schülerleistung an. Anfangs- und Höchststufe der Schwierigkeit können vorgewählt werden.
- Zufallsgenerierte Aufgaben:
  Die Aufgaben werden per Zufallsgenerator erzeugt. Es steht also, auch in den höheren Schwierigkeitsstufen, eine sehr große Anzahl von Aufgaben zur Verfügung.
- Eingabefilter:
  Es werden meist nur wenige sinnvolle Eingaben zugelassen, so dass der Schüler keinen absoluten Unsinn eingeben kann, mit dem das Programm dann nichts anzufangen wüßte. Es wird stets angezeigt, welche zeichen in einem gegebenen Kontext gerade zugelassen sind.
- Übersichtliche menügesteuerte Benutzerführung:
  Eine schriftliche Anleitung für die Programme ist nicht erforderlich. Die Schüler finden sich aufgrund der Auswahlmenüs, die mit zusätzlichen abrufbaren Entscheidungshilfen versehen sind, selbständig im Programm zurecht. Computerkenntnisse werden weder beim Lehrer noch beim Schüler benötigt.
- Lösungseingabe, Fehlerbehandlung:
  Mathematisch korrekte Schreibweisen der richtigen Lösung werden in sinnvollem Rahmen akzeptiert. Nach einer bestimmten Anzahl von Fehlversuchen wird die Lösung vom Computer vorgeführt. Typische Fehler werden (meist) erkannt und erläutert.
- Hilfen und Erläuterungen:
  Während der Aufgabenlösung stehen spezielle, auf die Aufgabe bezogene mathematische Hilfen zur Verfügung, und es kann ein erläuternder mehrseitiger Lehrtext mit Graphik abgerufen werden.
- Kopfzeile zur Lehrerinformation:
  Der Lehrer erfährt aus der Kopfzeile, auf welchem Level der Schüler übt und wie viele Aufgaben er schon gelöst hat.
- Antwort auf Schülerleistungen:
  Die Motivation der Schüler wird durch ein positives Feedback unterstützt. Eine Punktbewertung und eine Bestenliste für den Tempomodus sprechen den leistungsmotivierten Schüler an.

Negativ zu bewerten (nicht in der SODIS-Datenbank erwähnt):
Die Bedienung des Systems entspricht nicht (mehr) den heutigen Anforderungen der Software-Ergonomie. So sind - insbesondere bei den früher entstandenen Programmen- zum Weiterschalten, Akzeptieren, Auswählen usw. viele verschiedene Tasten in nicht immer gleicher Weise zu benutzen: Leertaste, Eingabetaste, Esc-Taste, Funktionstasten, bisweilen auch Taste <j> oder <n> oder andere Buchstabentasten. Das Verlassen oder Abbrechen des Programms ist nicht von jeder Stelle im Programm möglich, es ist bisweilen schwierig, überhaupt den Punkt zu finden, von dem aus das Programm beendet werden kann.
Leider ist auch die Bedienung der verschiedenen Programme des Pakets nicht ganz einheitlich, auch wenn viele Teile standardisiert sind. Die neueren Programme QUADRA und STRAHL sind besser bedienbar. Eine Angleichung der Benutzeroberflächen der übrigen Programme an diesen Standard ist geplant.

Trotz der erwähnten Mängel gewöhnen sich Schüler sehr schnell an die Bedienung. Die Programme sind hervorragend geeignet, in kurzer Zeit im Unterricht viele Aufgaben rechnen zu lassen. Dadurch ergibt sich einerseits die Möglichkeit der

Differenzierung im Unterricht - schwächeren Schülern kann mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden - , andererseits können die Programme zur schnellen Diagnose von Schülerschwierigkeiten dienen.

Die Programme des Pakets im einzelnen:

BINOMI:

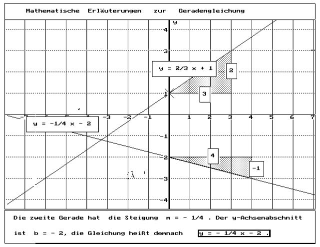
Auflösen und Setzen von Klammern, Multiplizieren von Summen, binomische Formeln.

BINOMI 1 übt mit den Schülern das Ausmultiplizieren von Klammern, das Ausklammern des größten gemeinsamen Teilers (ggT) und das Multiplizieren zweier Summen. BINOMI 2 trainiert das Ausmultiplizieren und Faktorisieren mittels der drei binomischen Formeln sowie das Ergänzen fehlender Summanden in den binomischen Formeln. Das Programm erkennt richtige Lösungen auch in unterschiedlicher Schreibweise, wertet Rechenfehler aus und kann schrittweise die Lösungen vorrechnen und erläutern. In einem eigenen Dienstprogramm kann der Lehrer **Arbeitsblätter mit zufallsgenerierten Aufgaben** ausdrucken, die genau zur Computerübung passen.

LINEAL:

Geradengleichungen.

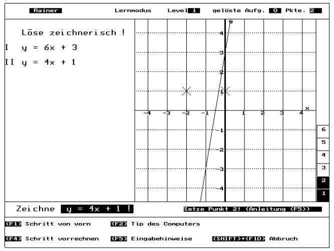
Zwei Typen von Aufgaben stehen zur Verfügung: Finden der Gleichung zu gegebener Geraden und zeichnen der Geraden zu gegebener Gleichung. Arbeitsblätter mit Aufgaben wie bei BINOMI können nicht erstellt werden.
Nebenstehend ein Beispiel für die mathematische Erklärung zu einer Aufgabe.



KREUZUNG:

Lösung von linearen Gleichungssystemen mit 2 Variablen.

Graphische Lösung und Lösung mit der Gleichsetzungsmethode.
Die Geraden sind durch zwei Punkte einzugeben. Anschließend soll die Lösung auch rechnerisch gefunden werden. Dabei werden wieder Hinweise und Hilfen gegeben. Auch hier können Aufgabenblätter nicht erstellt werden



QUADRA:

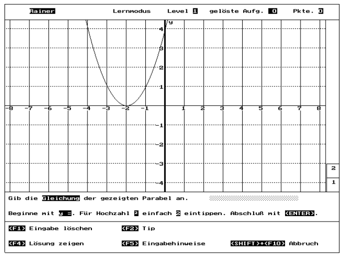
Quadratische Gleichungen lösen.
Es werden mehrere Verfahren angeboten: Quadratische Ergänzung, faktorisieren und Lösungsformel. Aufgabenblätter mit Lösungen können wieder erstellt werden. Das Programm ist sehr flexibel, was Lösungsmöglichkeiten betrifft. Die Eingabe von Zeilen wie

$$x_{1/2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

bereitet naturgemäß einige Schwierigkeiten.

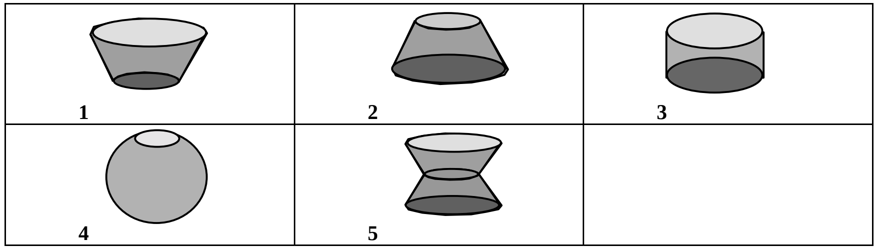
PARABELN:

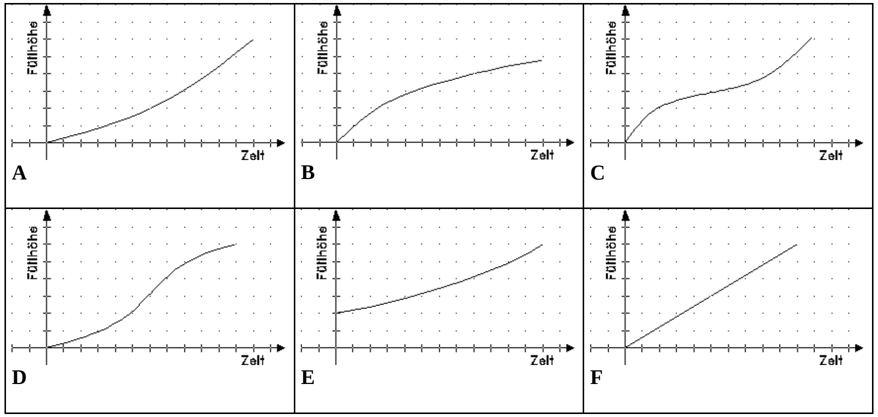
Zu gegebenen Parabeln sind die Gleichungen zu suchen. Wird eine falsche Gleichung angegeben, dann wird die entsprechende Parabel ebenfalls gezeigt um den Fehler verständlich zu machen. Aufgabenblätter können nicht erstellt werden.



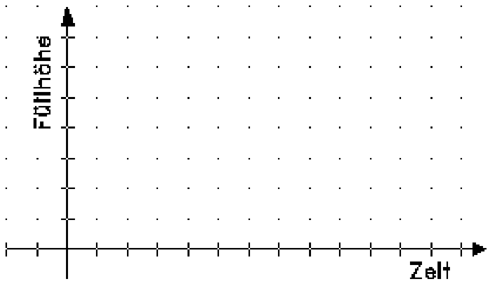
3.9 Funktionales Denken

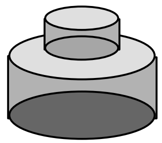
Die unten gezeichneten Gefäße werden durch einen konstanten Zulauf mit Wasser gefüllt.
Zu jedem Gefäß gehört eines der Schaubilder, auf denen die Füllhöhe als Funktion der Zeit dargestellt wird.
Ordne die Gefäße ihren Schaubildern zu.





Skizziere das Schaubild für das hier gezeigte Gefäß.

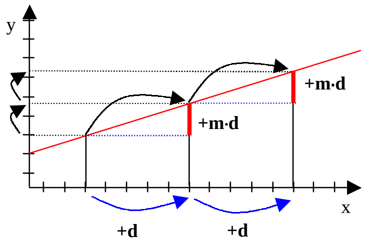




Wachstum als Leitbegriff zur Untersuchung von Funktionen

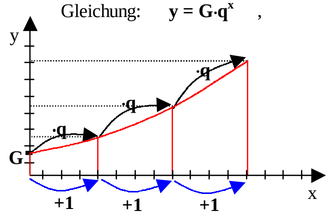
In den folgenden Skizzen wird jeweils der Zuwachs der x-Werte einer Funktion und der davon abhängige Zuwachs der zugehörigen y-Werte dargestellt. Zwei Fälle werden unterschieden:
1.Fall: x nimmt um einen **festen Summanden d** zu.
2.Fall: x nimmt um einen **festen Faktor k** zu.
Dann kann man bei einigen Funktionstypen allgemeine Aussagen über das Wachstumsverhalten der y-Werte machen.

1.Fall Lineare Funktion
Gleichung: $\mathbf{y = m \cdot x + c}$



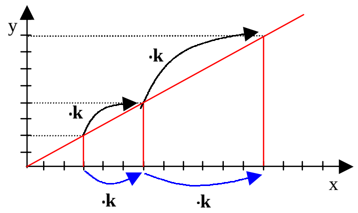
konstanter Zuwachs

Exponentialfunktion (Wachstum und Zerfall)
Prozent- und Zinsrechnung
Gleichung: $\mathbf{y = G \cdot q^x}$,

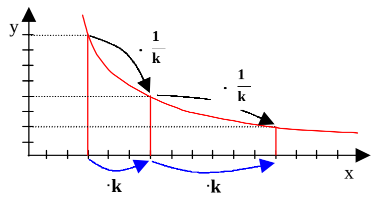


konstante Zuwachs**rate**

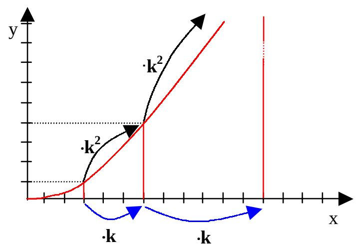
2.Fall Proportionale Funktion
Gleichung: $\mathbf{y = m \cdot x}$



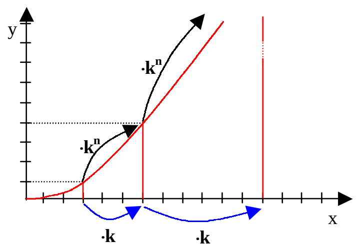
Antiproportionale Funktion
Gleichung: $\mathbf{y = A \cdot \frac{1}{x}}$



Quadratfunktion
Gleichung: $\mathbf{y = a \cdot x^2}$



Allgemeine Potenzfunktion
Gleichung: $\mathbf{y = a \cdot x^n}$



4 Sachrechnen

4.1 Sachrechnen: Übersicht

Zuordnung (Funktion)
- Schaubild, Diagramme

Proportionalität (proportionale Zuordnung),
Antiproportionalität (umgekehrt proportionale Zuordnung)
- Tabelle
- Schaubild
- Zweisatz, Dreisatz (Schlußrechnung)
- Verhältnisgleichung, Produktgleichung

Prozentrechnen
- Darstellungsarten
- Grundaufgaben (Erhöhung **um** ....)
  Rechenmethoden
  Gleichung
  Dreisatz
  Verhältnisgleichung
  Operatormethode

7.Schuljahr

- Erhöhter/verminderter Grundwert (Erhöhung **auf** ....)
- Wachstum und Zerfall (Verknüpfung von Prozentsätzen) erst ab 9.Schj.

Zinsrechnen (Prozentrechnen mit zusätzlichem Zeitfaktor)
- Jahreszins, Monatszins, Tageszins

8.Schuljahr

- Zinseszins (Wachstum)
- spezielle Themen (effektiver Jahreszins, Ratenkauf,...)

ab 9.Schuljahr

Taschenrechner, **Computer**
- Tabellenkalkulation

ab 7.Schuljahr

4.2 Sinnvolles Runden, Genauigkeit beim Rechnen von Sachaufgaben.

- Erkläre die Begriffe *absoluter Fehler* und *relativer Fehler* (Beispiele?).
- Addiere 2873 kg und 3,2345 kg. Welche Genauigkeit ist für das Ergebnis sinnvoll?

Wir können annehmen:
Die erste Zahl ist auf die 1 kg – Stelle gerundet. Sie liegt also zwischen 2872,5 kg und 2873,5 kg.
Die zweite ist Zahl auf die 0,000 1 kg – Stelle gerundet. Sie liegt also zwischen 3,23445 kg und 3,23455 kg.

Die nicht angegebenen Stellen können daher nicht einfach als 0 angesehen werden sondern müssen als unbekannt vorausgesetzt werden. Unbekannte Stellen sollen mit * bezeichnet werden.

Eine schriftliche Addition sieht dann so aus:

	2	8	7	3,	*	*	*	*	*
+				3,	2	3	4	5	*
	2	8	7	6,	*	*	*	*	*

Addition und Subtraktion

Das Ergebnis ist nicht genauer als **auf die kleinste Dezimalstelle der ungenauesten Zahl** anzugeben.

Die **absoluten Fehler** addieren sich.

Multipliziere 624 cm und 1,2 cm. Welche Genauigkeit ist für das Ergebnis sinnvoll?

Man könnte zunächst vermuten, dass eine schriftliche Multiplikation so aussehen könnte:

6	2	4	·	1,	2		
		6	2	4			
		1	2	4	8		
		7	4	8,	8		

Ergebnis: 624 cm · 1,2 cm = 748,8 cm^2

Man muss aber auch hier wieder beachten, dass z.B. die zweite Größe nur auf die 0,1cm – Stelle gerundet ist, der wirkliche Wert also um ±0,05 cm davon abweichen kann. Die Abweichung beim Ergebnis kann also

624 cm · 0,05 cm = 31,2 cm^2

betragen, es kann sicher nicht auf die 0,1 cm^2-Stelle angegeben werden.

Notiert man wieder die ungenauen Stellen mit *, so hat man

6	2	4,	*	·	1,	2	*
		6	2	4	*		
		1	2	4	8	*	
				*	*	*	*
		7	4	*	*	*	*

Das Ergebnis ist höchstens auf zwei gültige Ziffern genau.

Multiplikation und Division

Das Ergebnis ist nicht genauer als auf **die Anzahl gültiger Ziffern der ungenauesten Zahl** anzugeben.

Die **relativen Fehler** addieren sich.

4.3 Proportionale und Antiproportionale Zuordnungen

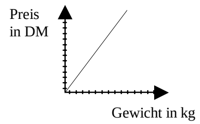
Welche Beispiele sind Zuordnungen, welche nicht?
Name → Körpergröße, Gewicht → Preis, Studentenname → Studienfach, Dichte des Wassers → Wassertemperatur
Telephoneinheiten → Endbetrag Telephonrechnung, getankte Benzinmenge → bezahlter Preis,
gekaufte Heizölmenge → Rechnungsbetrag, Einkommen → Einkommenssteuer

Welche Darstellungsarten für Zuordnungen kennen Sie?
Für welche Zuordnungen ist es nicht sinnvoll zu fragen, ob es sich um Proportionalitäten handelt?

Verschiedene Definitionen von „proportionale Funktion“ . Äquivalenz?

1

Der Graph ist eine Ursprungsgerade
(Gerade durch den Nullpunkt)



$f: x \longrightarrow y$
$f: x \longrightarrow f(x)$

Der Quotient der Wertepaare ist konstant $y/x = k$
$y = k \cdot x$

Quotientengleiche Paare

x in kg	y in DM
0,25	0,60
1	2,40
3	7,20

· k DM/kg

Tabelle horizontal betrachtet

Was bedeutet der konstante Faktor k?

2

Doppelte Menge	doppelter Preis
dreifache Menge	dreifacher Preis
halbe Menge	halber Preis
....	

$f: x \longrightarrow y$
$f: x \longrightarrow f(x)$

Für alle r und alle x: $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$, $r \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$)

:4 :4
·3 ·3

x in kg	y in DM
0,25	0,60
1	2,40
3	7,20

Tabelle vertikal betrachtet

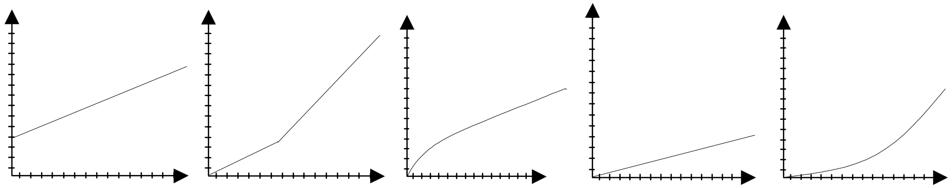
Welche der Tabellen stellt eine proportionale Zuordnung dar?

x in kg		3,0	4,1	7,2	8,5	12,6
y in DM		2,1	2,87	5,04	5,95	8,82

x in kg		3,0	4,1	7,2	8,5	12,6
y in DM		2,7	3,54	5,47	6,09	7,31

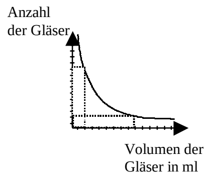
Skizzieren Sie die Funktionsgraphen.

Welche Graphen können keine proportionale Zuordnungen darstellen? Warum?
Welcher Sachverhalt könnte durch diese Graphen beschrieben werden?



Verschiedene Definitionen von „antiproportionale Funktion“ . Äquivalenz?
Beispiel: Wie viele Gläser Apfelsaft erhält man aus 4 Liter, wenn ein Glas x ml fasst? Gib die Zuordnungsvorschrift an.

1



Der Graph ist eine Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten

(Graph mit einer Gleichung $y = \frac{k}{x}$)

f: x ⟶ y
f: x ⟶ f(x)

Das Produkt der Wertepaare ist konstant $y \cdot x = k$
$y = k / x$

Produktgleiche Paare

x in ml	y
100	40
125	32
250	16
500	8

k/x

Tabelle horizontal betrachtet

Was bedeutet der konstante Faktor k rechnerisch/geometrisch?

2

Doppeltes Volumen	halbe Anzahl
dreifaches Volumen	Drittel der Anzahl
halbes Volumen	doppelte Anzahl
....	

f: x ⟶ y
f: x ⟶ f(x)

Für alle *r* und alle x: $f(r\cdot x) = \frac{1}{r}\cdot f(x)$, $r \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$)

x in ml	y
100	40
125	32
250	16
500	8

·5 :2 :2 ·2 ·2 :5

Tabelle vertikal betrachtet

Liegt bei einer Zuordnung von Größen eine Proportionalität oder Antiproportionalität vor, dann wird oft erst durch diese Zuordnung eine weitere zusammengesetzte Größe definiert. Bei Proportionalitäten, also quotientengleichen Paaren zugeordneter Größen, ist dies der konstante Quotient, bei Antiproportionalitäten, also produktgleichen Paaren das konstante Produkt. Die Einheit der neuen Größe ergibt sich als Quotient bzw. Produkt aus den Einheiten der Ausgangsgrößen. Oft ist diese zusammengesetzte Größe jedoch in der Praxis nicht gebräuchlich (zumindest nicht im Alltag von Schülern).

Beispiele:

- Benötigte Zeit t in h → Zurückgelegter Weg s in km: Proportionalität, konstanter Quotient s/t = Geschwindigkeit v in km/h.
- Gekaufte Menge in kg → bezahlter Preis in DM : Proportionalität, konstanter Quotient Preis/Menge = Kilopreis in DM/kg.
- Anzahl der Mitarbeiter → Zeit für Fertigstellung des Projekts in h : Antiproportionalität, konstantes Produkt
  Mitarbeiter · Zeit = Projektumfang in Mannstunden .
- Anzahl der Katzen → Zahl der Tage, für die Katzenfutterpaket reicht : Antiproportionalität, konstantes Produkt
  Katzen · Zeit = Futtermenge in „Katzentagen“ (wohl wenig gebräuchliche, aber nützliche Einheit!) .

Systematische Darstellung von Proportionalität, Antiproportionalität und Lösungsmethoden der entsprechenden Aufgaben.

Hier wird der Zusammenhang von

- Beschreibung einer Beziehung zwischen Größen durch eine multiplikative Gleichung,
- proportionaler bzw. antiproportionaler Zuordnung,
- Dreisatzaufgaben,
- Verhältnis- bzw. Produktgleichungen,

an Hand eines durchgängigen Beispiels dargestellt.

Der Sachverhalt:

Eine Gesamtmenge **G l Apfelsaft** soll an **n Kinder** in **Gläsern mit dem Rauminhalt v l** ausgeschenkt werden.

Gleichung:
$G = n \cdot v$
Gesamtmenge = Anzahl der Kinder · Rauminhalt eines Glases

G: Gesamtmenge Apfelsaft in Litern
n: Anzahl der Kinder
v: Rauminhalt eines Glases in Litern

Aus diesem Sachverhalt ergeben sich verschiedene Zuordnungen, je nachdem, welche der drei Größen als fest angenommen wird. Zu den Zuordnungen lassen sich entsprechende Berechnungsaufgaben stellen, die jeweils mit den verschiedenen Methoden (Dreisatz, Verhältnis/Produktgleichung, Formel) gelöst werden können. Dazu wird ein Wertepaar angegeben, aus der die feste Größe berechnet werden kann sowie eine weitere Größe, zu der die zugeordnete Größe zu berechnen ist. Die *feste Größe* wird in den Aufgaben nicht genannt, daher sind Aufgaben insbesondere zu Antiproportionalitäten oft schwierig zu verstehen.

Im Folgenden sollen alle Möglichkeiten dargestellt werden.

1. Glasvolumen fest.

1.a Zuordnung: Ein Glas fasst 0,25 l.
n ⟶ G proportionale Zuordnung, n gegeben, G gesucht.

Fragestellung dazu: **Wenn n Gläser Apfelsaft ausgeschenkt wurden, wie viel Apfelsaft wurde dann insgesamt getrunken?**

Berechnungsaufgabe: **Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.**
Für 40 Kinder braucht man 10 l Apfelsaft. Wie viel Apfelsaft braucht man für 32 Kinder?

Hier wird das Glasvolumen nicht genannt! Es wird nicht explizit gesagt, dass das Glasvolumen fest ist.

1.b Zuordnung: Ein Glas fasst 0,25 l
G ⟶ n proportionale Zuordnung, G gegeben, n gesucht.

Fragestellung dazu: **Wenn insgesamt G Liter Apfelsaft getrunken wurden, wie viele Gläser Apfelsaft wurden dann ausgeschenkt?**

Berechnungsaufgabe: **Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.**
Für 40 Kinder reichen 10 l Apfelsaft. Wie viele Kinder kann man mit 8 l Apfelsaft bedienen?

Auch hier wird das Glasvolumen nicht genannt! Ebenfalls wird nicht explizit gesagt, dass das Glasvolumen fest ist.

2. Zahl der Kinder fest.

2.a Zuordnung: Eine Klasse hat 40 Kinder. Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.
v ⟶ G proportionale Zuordnung, v gegeben, G gesucht.

Fragestellung dazu: **Wenn ein Glas v Liter Apfelsaft fasst, wie viel Apfelsaft wurde dann insgesamt getrunken?**

Berechnungsaufgabe: **Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.**
Wenn man 0,25-Litergläser verwendet, braucht man 10 l Apfelsaft. Wie viel Apfelsaft braucht man, wenn man statt dessen nur 0,2-Litergläser verwendet ?

Hier wird die Zahl der Kinder nicht genannt! Es wird nicht explizit gesagt, dass die Zahl der Kinder fest ist.

2.b Zuordnung: Eine Klasse hat 40 Kinder. Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.
$G \longrightarrow v$ proportionale Zuordnung, G gegeben, v gesucht.

Fragestellung dazu: **Wenn insgesamt G Liter Apfelsaft getrunken wurden, wie viel Apfelsaft fasst dann ein Glas? (vielleicht besser: darf man in ein Glas einschenken?)**

Berechnungsaufgabe: **Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.**
Wenn man insgesamt 10 l Apfelsaft hat, kann man in ein Glas jeweils 0,25 Liter Apfelsaft einschenken. Wie viel Apfelsaft darf man in ein Glas einschenken, wenn man statt dessen nur 8 Liter Apfelsaft hat?

Wieder wird die Zahl der Kinder nicht genannt! Es wird nicht explizit gesagt, dass die Zahl der Kinder fest ist.

3. Gesamtmenge Apfelsaft fest.

3.a Zuordnung: Es stehen fürs Klassenfest 10 Liter Apfelsaft zur Verfügung. Jedes Kind bekommt ein Glas Apfelsaft.
$n \longrightarrow v$ antiproportionale Zuordnung, n gegeben, v gesucht.

Fragestellung dazu: **Wenn n Kinder kommen, wie viel Apfelsaft darf man dann in ein Glas einschenken?**

Berechnungsaufgabe: **Für das Klassenfest wird ein Fässchen Apfelsaft beschafft. Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.**
Wenn 40 Kinder kommen, dann kann man 0,25 Liter in ein Glas füllen. Wie viel Apfelsaft darf man in ein Glas füllen, wenn 50 Kinder kommen?

Hier wird die Menge Apfelsaft nicht genannt!

3.b Zuordnung: Es stehen fürs Klassenfest 10 Liter Apfelsaft zur Verfügung. Jedes Kind bekommt ein Glas Apfelsaft.
$v \longrightarrow n$ antiproportionale Zuordnung, v gegeben, n gesucht.

Fragestellung dazu: **Wenn man v Liter Apfelsaft in ein Glas einschenkt, für wie viele Kinder reicht dann der Apfelsaft?**

Berechnungsaufgabe: **Für das Klassenfest wird ein Fässchen Apfelsaft beschafft. Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.**
Wenn man 0,25 Liter in ein Glas füllt, dann reicht der Apfelsaft für 40 Kinder. Für wie viele Kinder reicht der Apfelsaft, wenn man nur 0,2 Liter in ein Glas füllt?

Hier wird die Menge Apfelsaft nicht genannt!

Lösungsverfahren für die Berechnungsaufgaben (nur an einigen Beispielen):

Dreisatz:

Wird im 6.Schuljahr eingeführt (Zweisatz im 5. Schuljahr explizit, aber schon in der GS verwandt, ohne ein festes Schema zu verwenden). Die Dreisatzmethode ist meist zeitaufwendiger, als die anderen Lösungsverfahren, insbesondere bei Verwendung des Taschenrechners. Er bietet sich als relativ leicht zu erlernendes Lösungsverfahren zum Einstieg und für schwächere Schüler an, die beim Umstellen von Formeln unsicher sind.
Die sehr schematisch anmutende Formulierung der Sätze kann Kindern helfen, sich das Verfahren zu merken und die Größen in der richtigen Reihenfolge zu nennen: Die gesuchte Größe wird an zweiter Stelle genannt bzw. steht im abgekürzten Schema in der rechten Spalte.
Um zu entscheiden, ob eine Proportionalität oder eine Antiproportionalität vorliegt, ist zu überlegen, ob der Sachverhalt durch den Satz „je mehr, desto mehr“ oder den Satz „je mehr, desto weniger“ beschrieben wird.

Arbeiten mit der Tabelle:

Schon ab dem 6.Schuljahr kann statt mit dem Dreisatz auch mit der Tabelle der Zuordnung gearbeitet werden; im 7.Schuljahr nach der Behandlung des Zuordnungsbegriffs bietet sich dies an.

Verhältnisgleichung, Produktgleichung:

Beim Lösen über eine Verhältnisgleichung die unbekannte Größe (Variable) möglichst in den Zähler setzen.
Setzt sicheres Umgehen mit Brüchen voraus!
Es ist nicht einfach zu sehen, ob eine Verhältnisgleichung oder eine Produktgleichung zu verwenden ist.
Verhältnisgleichungen muss man verwenden, wenn der Sachverhalt durch den Satz „je mehr, desto mehr“ beschrieben wird, Produktgleichungen für den Fall „je mehr, desto weniger“.

1.a Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.
Für 40 Kinder braucht man 10 l Apfelsaft. Wie viel Apfelsaft braucht man für 32 Kinder?

Dreisatz:

Für 40 Kinder braucht man 10 Liter Apfelsaft.	Bedingungssatz.
Für 32 Kinder braucht man wie viel Apfelsaft?	Fragesatz.

Die drei Sätze des Dreisatzes, die auch so gesprochen werden können:

Für 40 Kinder braucht man 10 Liter Apfelsaft.	Bedingungssatz.
Für 1 Kind braucht man den 40. Teil, also 10 : 40 = 0,25 Liter Apfelsaft.	Schluss auf die Einheit
Für 32 Kinder braucht man 32 mal soviel, also $10{:}40 \cdot 32 = 8$ Liter Apfelsaft.	Schluss auf die Vielheit

Ausführliches Schema, Sätze während des Aufschreibens dazu sprechen:

Zahl der Kinder	**Apfelsaft in Litern**
40	10
1	$\frac{10}{40}$
32	$\frac{10\cdot 32}{40}=8$

„*Apfelsaft*“ gesucht,
also „*Apfelsaft*“ in die
rechte Spalte schreiben

Abgekürztes Schema

Kinder	**Apfelsaft in l**
40	
1	$\frac{10\cdot 32}{40}=8$
32	

Tabelle:

	Zahl der Kinder	**Apfelsaft in Litern**	
	40	10	
:40	1	$\frac{10}{40}$	:40
·32	32	$\frac{10\cdot 32}{40}=8$	·32

„*Apfelsaft*“ gesucht,
also „*Apfelsaft*“ in die
rechte Spalte schreiben

Die Lösung über eine Tabelle bietet sich an, wenn Zuordnungen und ihre Eigenschaften im Vordergrund stehen.

Verhältnisgleichung:

Lösen über Verhältnisgleichung, unbekannte Größe (Variable) möglichst in den Zähler setzen.

Apfelsaft	0 l	x l	10 l
Kinder	0	32	40

$$\left.\begin{array}{c}\frac{x}{32}=\frac{10}{40}\\ \text{oder auch}\\ \frac{x}{10}=\frac{32}{40}\end{array}\right\}\qquad \boldsymbol{x = 8}$$

1.b Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.
Für 40 Kinder reichen 10 l Apfelsaft. Wie viele Kinder kann man mit 8 l Apfelsaft bedienen?

Die Aufgabenstellung kann erleichtert werden, wenn schon bei der Nennung der Daten die Reihenfolge eingehalten wird, die beim Dreisatz verwandt wird: Gesuchte (zugeordnete) Größe als zweite.

Dreisatz:

10 Liter Apfelsaft reichen für 40 Kinder.	Bedingungssatz.
8 Liter Apfelsaft reichen für wie viele Kinder?	Fragesatz.

Die drei Sätze des Dreisatzes:

10 Liter Apfelsaft reichen für 40 Kinder.	Bedingungssatz.
1 Liter Apfelsaft reicht für den 10. Teil, also 40 : 10 = 4 Kinder.	Schluss auf die Einheit
8 Liter Apfelsaft reichen 8 mal soviel, also 40:10 · 8 = 32 Kinder.	Schluss auf die Vielheit

Ausführliches Schema, Sätze während des Aufschreibens dazu sprechen:

Apfelsaft in Litern	**Zahl der Kinder**
10	40
1	$\frac{40}{10}$
8	$\frac{40 \cdot 8}{10} = 32$

„*Kinder*" gesucht, also „*Kinder*" in die rechte Spalte schreiben

Abgekürztes Schema

Apfelsaft in l	**Kinder**
10	
1	$\frac{40 \cdot 8}{10} = 32$
8	

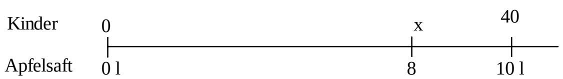
Tabelle:

	Apfelsaft in Litern	**Zahl der Kinder**	
:10	10	40	:10
	1	$\frac{40}{10}$	
·8	8	$\frac{40 \cdot 8}{10} = 32$	·8

„*Kinder*" gesucht, also „*Kinder*" in die rechte Spalte shreiben

Verhältnisgleichung:

Lösen über Verhältnisgleichung, unbekannte Größe (Variable) möglichst in den Zähler setzen.



$$\left.\begin{array}{c}\frac{x}{8} = \frac{40}{10} \\ \text{oder auch} \\ \frac{x}{40} = \frac{8}{10}\end{array}\right\} \quad \boldsymbol{x = 32}$$

3.a Für das Klassenfest wird ein Fässchen Apfelsaft beschafft. Jedes Kind beim Klassenfest bekommt ein Glas Apfelsaft.
Wenn 40 Kinder kommen, dann kann man 0,25 Liter in ein Glas füllen. Wie viel Apfelsaft darf man in ein Glas füllen, wenn 50 Kinder kommen?

Dreisatz:

Hier zunächst klären: „**Je mehr** Kinder, **desto weniger** in ein Glas füllen". Gesuchte Größe ist Füllmenge für ein Glas, also bei der Formulierung mit „Kindern" beginnen, Füllmenge als zweites.

Bei 40 Kindern kann man 0,25 Liter in ein Glas füllen.	Bedingungssatz.
Für 50 Kindern kann man wie viele Liter in ein Glas füllen?	Fragesatz.

Die drei Sätze des Dreisatzes:

Bei 40 Kindern kann man 0,25 Liter in ein Glas füllen.	Bedingungssatz.
Bei 1 Kind kann man 40 mal soviel in ein „Glas" füllen, also 0,25 · 40= 10 Liter.	Schluss auf die Einheit
Bei 50 Kindern kann man nur den 50. Teil in ein „Glas" füllen, also 0,25 · 40 : 50 = 0,2 Liter.	Schluss auf die Vielheit

Ausführliches Schema, Sätze während des Aufschreibens dazu sprechen:

Zahl der Kinder	**Füllmenge in Litern**
40	0,25
1	$0{,}25 \cdot 40 = 10$
50	$\frac{0{,}25 \cdot 40}{50} = 0{,}2$

„*Füllmenge*" gesucht, also „*Füllmenge*" in die rechte Spalte schreiben

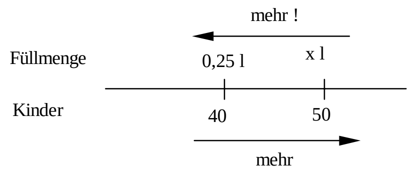
Tabelle:

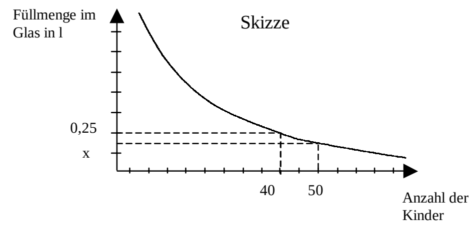
	Zahl der Kinder	**Füllmenge in Litern**	
: 40	40	0,25	· 40
	1	$0{,}25 \cdot 40$	
· 50	50	$\frac{0{,}25 \cdot 40}{50} = 0{,}2$	: 50

„*Füllmenge*" gesucht, also „*Füllmenge*" in die rechte Spalte schreiben

Produktgleichung:

Hier kann man die Zuordnung nicht mehr so einprägsam an einer Doppelskala veranschaulichen, da die Richtungen der beiden Skalen entgegengesetzt sind. Das Schaubild der Zuordnung macht den Zusammenhang klarer.





$$0{,}25 \cdot 40 = x \cdot 50 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0{,}25 \cdot 40}{50} = 0{,}2$$

Aufgaben:

Lösen Sie die übrigen der Aufgaben 2a, 2b, 3b

- mit einem Dreisatz (genau aufschreiben als: Bedingungssatz, Fragesatz, ausführliches Schema, abgekürztes Schema; Name Dreisatz?)
- mit einer Verhältnisgleichung oder einer Produktgleichung
- auf eigenen Wegen.

Schreiben Sie weiteren multiplikative Beziehungen zwischen Größen auf, formulieren Sie dazu alle möglichen Varianten von konkreten Aufgaben und lösen Sie diese mit den verschiedenen Methoden.

4.4 Prozentrechnung

4.4.1 Inhalte der einzelnen Schuljahre im Prozentrechnen

Grundaufgaben zur Prozentrechnung (7.Schuljahr)

G Grundwert
P Prozentwert (auch als P_w bezeichnet, um Verwechslungen mit p zu vermeiden)
p% Prozentsatz (Vorsicht Schreibweise: p%=15% oder p=15, aber nicht p=15%, sonst sind die Formeln inkorrekt)

- Wieviel sind 20% von 30 DM? — Prozentwert P gesucht
- Wieviel % sind 20 DM von 30 DM? — Prozentsatz p% gesucht
- Der Preisnachlass von 20% beträgt 4 DM. Wie teuer war die Ware vorher? — Grundwert G gesucht

Vermehrter und verminderter Grundwert (8.Schuljahr)

- Nach einer Preiserhöhung von 10% kostet ein Volleyball 80 DM. — Grundwert G vor der Erhöhung gesucht

Verknüpfung von Prozentsätzen (9.Schuljahr/10.Schuljahr)

- 30% der Fläche von Achzivland ist Wald. 60% dieser Waldfläche besteht aus Kiefernwald, das sind 20 ha. Wie groß ist die Fläche von Achzivland?
- Ein Baum von 1 m wächst jedes Jahr um 15% Wie groß ist er nach 5 Jahren? — Wachstum
- Ein Baum wächst in 10 Jahren von 1m auf 10m Höhe. Wie groß ist die (als konstant angenommene) jährliche Wachstumsrate ?

4.4.2 Modelle zum Prozentbegriff

1. Von-Hundert-Auffassung

   20 von 100 Schülern ......
   30 DM von jeden verdienten 100 DM gehen an das Finanzamt..

2. Hundertstel-Auffassung

   $\frac{20}{100}$ der 350 Schüler ....
   $\frac{30}{100}$ meines Einkommens gehen an das Finanzamt..

Welche Vorteile, Nachteile haben die beiden Auffassungen?

4.4.3 Mögliche Zugänge zur Prozentrechnung

1. Zunächst Anknüpfen an das Vorwissen der Schüler: Bekannte Erfahrungen aus dem Alltag.
   Einstieg mit Beispielen aus der Zeitung oder dem Fernsehen. Dann Entwicklung und Präzisierung eines Modells und der exakten Begriffe.

   Bekannt sind z.B. Ausdrücke wie
   99% sicher, 50% Chance,50% aller Schüler, 45%iger Rum, Preissteigerung von 10%, Preissenkung von 50%...
   zur Angabe von Anteilen an einer Gesamtheit (100%), Bruchteilen von Größen, Veränderungen.

2. Einstieg über das Problem des Vergleichs zweier Anteile: Absoluter Vergleich – relativer Vergleich.
   An einem Beispiel Entwicklung eines Modells und der grundlegenden Begriffe.

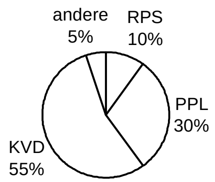
   Beispiel:

Klasse 7a	Klasse 7b
25 Kinder 6 Mädchen	20 Kinder 5 Mädchen

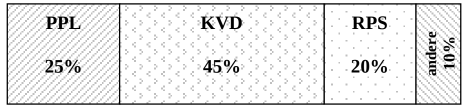
   In welcher Klasse sind mehr Mädchen?

Lösung mit dem 1. Modell: Rechne die Klassenstärke auf eine 100er Klasse hoch
Lösung mit dem 2. Modell: Rechne die jeweiligen Bruchteile aus und vergleiche diese mit Hilfe des gemeinsamen Hauptnenners 100.

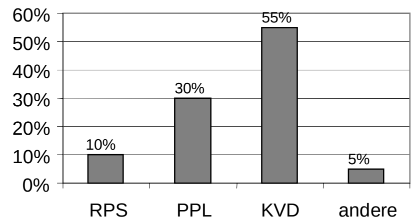
4.4.4 Diagramme



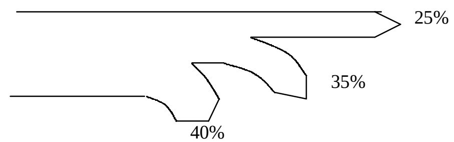
Kreisdiagramm



Streifendiagramm



Balkendiagramm, auch für mehrere Datenreihen geeignet, aber die Gesamtheit von 100% ist so nicht zu erkennen.



Sankey-Diagramm. Die Breite des Streifens vor der Verzweigung rerpräsentiert 100%. (Verluste sind damit eindrücklich darstellbar)

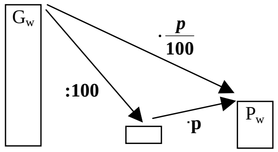
4.4.5 Prozentrechnen: Grundaufgaben

Unter den Grundaufgaben der Prozentrechnung versteht man die Bestimmung einer der Größen Grundwert G_w, Prozentwert P_w oder Prozentsatz $p\%$, wenn die beiden anderen gegeben sind. Es sind die folgenden Lösungsverfahren möglich:

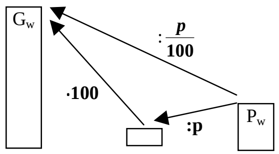
- **Formel:** $P_w = p\%\ G_w$
  Lösen durch Formelumstellen. Erst ab 8. Schuljahr sinnvoll, wenn Bruchgleichungen behandelt sind.

- **Operator:** Veranschaulichung mit Balken und dem Operator $\boxed{\cdot p\%}$ bzw. dem Umkehroperator $\boxed{:p\%}$.
  Besonders für Taschenrechner geeignete Lösungsmöglichkeit.

$$p = \frac{P_w}{G_w} \cdot 100$$

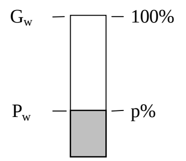


$P_w = G_w \cdot 0{,}15$
für p%=15%

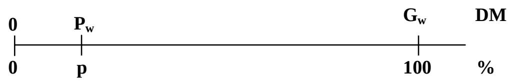


$G_w = P_w : 0{,}15$
für p%=15%

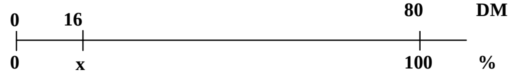
Verhältnis: Lösen über Verhältnisgleichung, unbekannte Größe (Variable) möglichst in den Zähler setzen. Setzt sicheres Umgehen mit Brüchen voraus!



...oder schematischer (Beispiel Grundwert in DM):



Beispiel: Wieviel % sind 16 DM von 80 DM?



$\frac{x}{16}=\frac{100}{80}$ oder $\frac{x}{100}=\frac{16}{80}$ $\Big\}$ $x = 20$

- **Dreisatz:** Kann schon im 7.Schuljahr verwandt werden, vertraute Methode, leicht zu merken, alle Aufgaben auf ähnliche Art zu lösen.
  Benötigt die Kenntnis der Begriffe G_w, P_w, p% in geringerem Maße als die anderen Methoden.
  Nachteil: meist zeitaufwendiger, insbesondere bei Verwendung des Taschenrechners.
  Der Dreisatz bietet sich als Lösungsverfahren zum Einstieg und für schwächere Schüler an.

Musteraufgaben zum Dreisatz:

1. Prozentsatz gesucht:

Wieviel % sind 16 DM von 80 DM?

80 DM sind 100%
16 DM sind **wieviel %** ?

DM	%
80	100
1	$\frac{100}{80}$
16	$\frac{100\cdot 16}{80}=20$

% gesucht, also % in die rechte Spalte schreiben

2. Prozentwert gesucht:

Was sind 20% von 80 DM?

100% sind 80 DM
20% sind **wieviel DM** ?

%	DM
100	80
1	$\frac{80}{100}$
20	$\frac{80\cdot 20}{100}=16$

Hilfe: Wieviel ***DM*** sind 20% von 80 DM ? DM gesucht, also DM in die rechte Spalte schreiben

3. Grundwert gesucht:

Wovon sind 16 DM 20% ?

20% sind 16 DM
100 % sind **wieviel DM** ?

%	DM
20	16
1	$\frac{16}{20}$
100	$\frac{16\cdot 100}{20}=80$

Hilfe: Von wieviel ***DM*** sind 16 DM 20% ? DM gesucht, also DM in die rechte Spalte schreiben

- **Intuitive Lösungsstrategien (** durch Aufteilen, Zerfällungsmethode, Ausnutzen einfacher Zusammenhänge)

  An Stelle der oben genannten formalen Lösungsstrategien sollten für alle einfachen Fälle immer (auch) sich anbietende intuitive Lösungsstrategien eingesetzt werden, wie dies im Alltag fast immer geschieht. Auch Überschlagen von Prozentwerten und Prozentsätzen soll so trainiert werden.

  Von Beginn der Prozentrechnung an muss daher die Angabe gängiger Prozentsätze in allen Darstellungsarten immer wieder geübt werden:

  in Prozentschreibweise **25% ,** als Bruch mit Nenner 100 $\frac{25}{100}$,

  als gekürzter Bruch $\frac{1}{4}$, als Dezimalzahl **0,25 .**

  Damit lassen sich viele Grundaufgaben unmittelbar oder durch Aufteilen lösen:

  50%, 25%, 10%, 20% ....von 80 DM sind ....? Prozentwert gesucht
  60% sind 50%+10%, 90% sind 100%-10% ......usw.

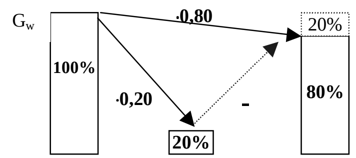
  Wenn 25% 20DM sind, dann sind 100% viermal soviel Grundwert gesucht

  30DM sind ein Drittel von 90DM, also etwa 33% von 90DM Prozentsatz gesucht
  10DM sind nochmal ein Drittel davon, also ca. 11% von 90DM
  40 DM sind also etwa 44% von 90DM

4.4.6 Verminderter und vermehrter Grundwert (8.Schuljahr)

Jetzt wird ein bekannter Sachverhalt anders formuliert:

Statt „Der Preis von 80 DM wird ***um 20%*** reduziert" jetzt „Der Preis von 80 DM wird ***auf 80%*** herabgesetzt"

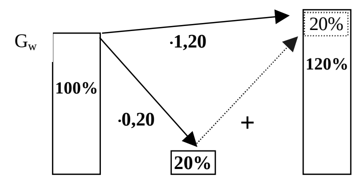


Verminderter Grundwert

Beispiel: Rabatt

0,20 Änderungs***rate*** 0,80 Änderungs***faktor***

Statt „Der Preis von 80 DM wird ***um 20%*** erhöht" jetzt „Der Preis von 80 DM wird ***auf 120%*** erhöht"



Vermehrter Grundwert

Beispiel: Mehrwertsteuer

0,20 Änderungs***rate*** 1,20 Änderungs***faktor***

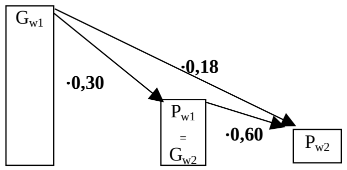
Formel: $\mathbf{G_w \pm p\% \cdot G_w = G_w \cdot (1 \pm p\%)}$ (für p>0 heißt (1+p%) Wachstumsfaktor)

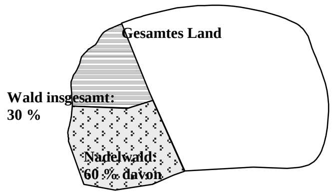
Hier treten Prozentsätze über 100% auf. Die Lösungsverfahren zu den Grundaufgaben können alle hierauf übertragen werden.

4.4.7 Verknüpfen von Prozentsätzen (9.Schuljahr)

Standardaufgaben zum Einstieg:

30% der Fläche eines Landes besteht aus Wald, davon sind 60% Nadelwald, der Rest Laubwald. Wieviel Prozent der Fläche des Landes ist mit Nadelwald bedeckt? Wieviel Prozent der Fläche des Landes ist mit Laubwald bedeckt?





Hier tritt zweimal ein Grundwert von 100% auf.

Weitere häufige Aufgabentypen:
Zinseszins (insbesondere Zuwachssparen), Verbindung von Rabatt und Mehrwertsteuer (2%Rabatt, dann 16% MWSt), Warenkalkulation (Verbindung zu fächerverbindendem Thema im 9.Schulj. *Teilnahme am Wirtschaftsleben*)
Wachstum: Eine Spareinlage von 2000 DM wächst in 18 Jahren auf 8000 DM. Welcher Jahreszinssatz wurde zugrunde gelegt?

4.5 Zinsrechnen (ab 8. Schuljahr)

Beim Zinsrechnen kommen zum Prozentrechnen folgende Schwierigkeiten hinzu:

- Zeit kommt ins Spiel
- ungleiche Behandlung von Zinsen innerhalb eines Jahres (Jahreszinsen) und über mehrere Jahre hinweg (Zinseszins, ab 9.Schj.)
- viele schwierige Fachbegriffe aus dem Bereich Wirtschaft und Finanzen (eff.Jahreszins, Ratensparen, Ratenzahlung, Tilgung....), die zudem meist nicht dem unmittelbaren Erfahrungsbereich der Schüler entnommen sind.

Zinsen innerhalb eines Jahres: Jahreszins, Monatszins, Tageszins (8.Schuljahr)

Grundsatz:

Innerhalb eines Jahres ist der Zins für ein festes Kapital und festen Zinssatz proportional zur Zeit.

Bezeichnungen und Entsprechungen:

$K = G_w$	Kapital
$Z = P_w$	Zins
p%	Zinssatz, Zinsfuß
t	Zeit in Monaten oder Tagen
i	Anteil eines Jahres

$i = \frac{t}{12}$ wenn t in Monaten angegeben wird

$i = \frac{t}{360}$ wenn t in Tagen angegeben wird

Dabei gilt in Deutschland (noch) die Konvention: 1 Monat = 30 Tage, 1 Jahr = 360 Tage

Jahreszins $$Z_J = \frac{K \cdot p}{100}$$

Tageszins $$Z_T = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 360}$$

Zins für t Tage $$Z_t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{K \cdot i \cdot p}{100}$$

Beispiel: Zins für 8000 DM für 40 Tage bei einem Zinssatz von 9% $$Z_{40} = \frac{8000 \cdot 9 \cdot 40}{100 \cdot 360} = 80 \text{ DM}$$

Zinsen für mehr als ein Jahr: Zinseszins, Kontokorrentrechnung, Ratenzahlungen usw. (9.Schuljahr)

1. Fester Zinssatz

Fester Zinssatz von 2%, Verzinsung 5 Jahre, Kapital zu Beginn K=5000 DM

Jahr	Kapital zu Beginn des Jahres		Kapital am Ende des Jahres
1	$\boxed{K}$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}02}$	$K \cdot 1{,}02$
2	$K \cdot 1{,}02$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}02}$	$K \cdot 1{,}02^2$
3	$K \cdot 1{,}02^2$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}02}$	$K \cdot 1{,}02^3$
4	$K \cdot 1{,}02^3$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}02}$	$K \cdot 1{,}02^4$
5	$K \cdot 1{,}02^4$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}02}$	$\boxed{K \cdot 1{,}02^5}$

Allgemein erhält man so die Formel

$$K_t = K_0 \cdot (1+p\%)^t$$

t	Zeit für Verzinsung in Jahren
K_0	Anfangskapital
K_t	Kapital nach t Jahren
p%	Fester Zinssatz

Fragen dazu:

(1) **Um** welchen Prozentsatz hat das Kapital in 5 Jahren zugenommen?
$1{,}02^5 \approx 1{,}104$, Zunahme ca. 10,4%

(2) Welchen Zinssatz müßte man erhalten, um in 5 Jahren sein Kapital von 5000 DM zu verdoppeln?
$10\,000 = 5000 \cdot x^5 \Rightarrow 2 = x^5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{2} \approx 1{,}149 \Rightarrow$ Verdopplung nach 5 Jahren bei ca. 14,9%
(Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Ausgangskapital K_0, aber die Aufgabe ist mit konkreten Zahlen einfacher zu lösen)

(3) Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich das Kapital von 5000 DM bei 2% Zinsen?
Diese Frage kann mit den nach LP verfügbaren Hilfsmitteln nicht exakt beantwortet werden, da sie auf die Lösung der Gleichung $2 = 1{,}02^t$ führt. Diese Gleichung erfordert zur Lösung die Kenntnis einer Logarithmusfunktion. $t = \ln(2)/\ln(1{,}02) \approx 35$. Das Ergebnis kann nur durch Probieren mit dem Taschenrechner gefunden werden oder durch Verwendung der folgenden Faustregel:

Faustregel zur Verdoppelung eines Kapitals

Ist der Zinssatz p%< 10, dann lässt sich die Verdoppelungszeit eines Kapitals in Jahren näherungsweise angeben als

Verdopplungszeit $\approx \frac{70}{p}$ **Jahre**

(für Werte p>5 gibt die Zahl 72 an Stelle von 70 bessere Näherungen)

Die exakte Begründung dieser Regel erfordert Kenntnisse aus der Analysis der SII.
Für die SI bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Verifikation der Regel mit den Schülern an Beispielen.
- Begründung durch Probieren:
  Rechnet man zunächst ***ohne Zinseszins***, so ergibt sich, dass die Verdopplungszeit t in Jahren umgekehrt proportional zu Jahreszinssatz p ist ($t = \frac{100}{p}$, Begründung?).
  Man kann nun als Hypothese annehmen, dass die Verdopplungszeit auch für die Berechnung ***mit Zinseszins*** (näherungsweise) umgekehrt proportional zum Zinssatz ist, also p · Verdopplungszeit ≈ konstant. Legt man eine Tabelle für die Verdopplungszeit t und zugehörigen Zinssatz p an, kann man die Konstante näherungsweise für Werte von p < 10 bestimmen. Die Berechnung von p bei gegebener Verdopplungszeit t läßt sich mit den im 9.Schuljahr verfügbaren Mitteln durchführen: $p = (\sqrt[t]{2} - 1) \cdot 100$. (Begründung?)
  Hilfmittel dabei: Tabellenkalkulation oder Taschenrechner.

2. Zeitlich veränderliche Zinssätze

Für ein Zuwachs-Sparkonto werden folgende Zinssätze vereinbart: 1.Jahr: 4%, 2.Jahr 4,5%, 3.Jahr 5,5%

(1) Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 5000 DM in 3 Jahren an?

(2) Um wieviel % wächst es?

Jahr	Kapital zu Beginn des Jahres		Kapital am Ende des Jahres
1	$\boxed{K}$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}04}$	$K\cdot 1{,}04$
2	$K\cdot 1{,}04$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}045}$	$K\cdot 1{,}04\cdot 1{,}045$
3	$K\cdot 1{,}04\cdot 1{,}045$	$\xrightarrow{\cdot 1{,}055}$	$K\cdot 1{,}04\cdot 1{,}045\cdot 1{,}055$

Allgemein erhält man so die Formel

$K_t = K_0\cdot (1+p_1\%)\cdot (1+p_2\%)\cdot ...\cdot (1+p_t\%)$

K_0 Anfangskapital
K_t Kapital nach t Jahren
$p_i\%$ Zinssatz im i.Jahr

(1) $5000\cdot 1{,}04\cdot 1{,}045\cdot 1{,}055 = 5000\cdot 1{,}146574 =$ 5732,87 DM . Das Kapital wächst auf 5732,87 DM an.

(2) $1{,}04\cdot 1{,}045\cdot 1{,}055 = 1{,}146574$. Das Kapital wächst um ca. 14,7%.

4.6 Spezielle Begriffe zum Prozent- und Zinsrechnen[13]

Inflationsrate

Der jährliche Anstieg des Preisniveaus, die sogenannte **Inflationsrate**, bewirkt eine Wertminderung des Geldes. Beispielsweise verringert sich bei einer Inflationsrate von 3% der tatsächliche Wert eines Kapitals von 100 DM auf 97 DM. Ein Kapital von 2000 DM wird für 4 Jahre gleichbleibend zu 6,5% verzinst.

- Berechne den tatsächlichen Wertzuwachs, wenn man von einer jährlich gleichbleibenden Inflationsrate von 3% ausgeht.
- Berechne den tatsächlichen Jahreszinssatz unter Berücksichtigung der 3%igen Inflationsrate.
- Wie hoch muss der Zinssatz mindestens sein, damit kein tatsächlicher Wertverlust entsteht?

Ist die angegebene Definition des Begriffs Inflationsrate korrekt? Was ergibt sich, wenn die Inflationsrate in einem Land 200% beträgt?
Wie könnte eine bessere Definition lauten?

Kontokorrentrechnung

Die Zinseszinsformel gilt nur für volle Jahre. Wird ein Kapital länger als ein Jahr, jedoch nicht über volle Jahre hinweg verzinst, dann ist das Endkapital getrennt für Jahre und Monate zu berechnen.
Beispiel:
Anfangskapital: K_0=400,00 DM
Zinssatz: p % = 5,0% , Zeit: 2 Jahre und 8 Monate
K_{2J}=400,00 DM$\cdot 1{,}05^2$=441,00 DM
Z_{8M}=441,00 DM$\cdot 0{,}05\cdot \frac{8}{12}$ = 14,70 DM
$K_{2J8M} = K_{2J} + Z_{8M}$ = (441,00 +14,70) DM = 455,70 DM

- Ein Kapital von 1 800,00 DM wird über 1 Jahr und 3 Monate zu 6,0% verzinst. Berechne das Endkapital.
- Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 750,00 DM beim Zinssatz von 8,75% in 3 Jahren und 7 Monaten an?
- Ein Guthaben ist bei einem Zinssatz von 7,0% in 2 Jahren und 9 Monaten auf 1687 DM angewachsen. Wie hoch war das Anfangsguthaben?

Zuwachssparen

Banken und Sparkassen bieten auch Geldanlagen mit von Jahr zu Jahr unterschiedlich hohen Zinssätzen an.
Bietet eine Bank für das erste Jahr einen Zinssatz von 4,5%, für das zweite Jahr *5,5%* und für das 3. Jahr 7,0%, dann läßt sich das nach 3 Jahren angesparte Kapital auf folgende Weise berechnen: $K_3 = K_0\cdot q_1\cdot q_2\cdot q_3$.
Für K = 8 000 DM ergibt sich somit: K_3 = 8000 DM$\cdot 1{,}045\cdot 1{,}055\cdot 1{,}07$ = 9437,19 DM.
Diese Form des Sparens wird als Zuwachssparen bezeichnet.

Beispiel:
Welches Anfangskapital wächst nach 3 Jahren bei folgenden Zinssätzen auf 14631,42 DM an? $p_1\%$ = 6,25%, $p_2\%$ = 6,75%, $p_3\%$ = 7,5%

[13] Klett, Schnittpunkt 9, S.179

Lösung: K_0= 12000,00DM

Aufgaben

Bei welchem Zinssatz verdoppelt sich ein Kapital, einschließlich der Zinseszinsen, in 20 Jahren?

Familie Berger legt ein Kapital von 15000 DM zu folgenden Zinssätzen an.
1. Jahr: 3,5%
2. Jahr: 4,5%
3. Jahr: 6,75%
a) Auf welchen Betrag wächst das Kapital nach 3 Jahren an?
b) Berechne die Zinsbeträge der einzelnen Jahre.

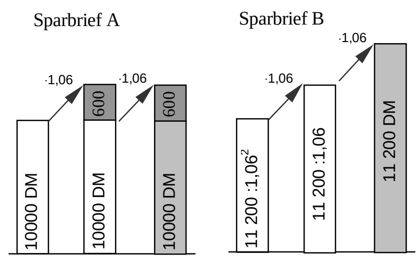
Frau Metzger legt Geld an. Im 1. Jahr wird es mit 5,0%, im 2. Jahr mit 6.5% verzinst. Ihr Guthaben ist nach zwei Jahren auf 4137,53 DM angewachsen.
a) Wie hoch war der Anfangsbetrag?
b) Wie viel DM Zinsen sind in dieser Zeit ausbezahlt worden?
c) Berechne den durchschnittlichen Zinssatz.

4.7 Aufgaben zum Sachrechnen: Prozent und Zins[14]

1. Wieviel Zinsen erhält man für ein Guthaben von 600 DM bei einem Zinssatz von 3% in den angegebenen Zeiten?
a) 1 Monat b) 7 Monate c) 240 Tage d) vom 1.9. bis 25.10. (einschließlich)

2. Bei einem Zeitraum von mehreren Jahren werden die Zinsen mitverzinst (Zinseszins). Auf wie viel DM wächst ein Guthaben von 600 DM bei 3% in den angegebenen Zeiten?
Beispiel: Nach 2 Jahren ist das Guthaben 1,03.1,03 so groß. Man erhält also 636,54 DM.
a) 3 Jahre b) 5 Jahre c) 6 Jahre d) 10 Jahre

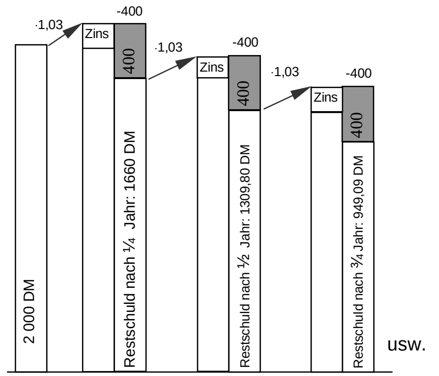
3. Eine Sparkasse bietet zwei verschiedene Arten von Sparbriefen an.
Beim Sparbrief A wird eine Sparsumme von 10 000 DM für 2 Jahre mit einem Zinssatz von 6% pro Jahr festgelegt. Die Zinsen werden jährlich ausgezahlt. Beim Sparbrief B sind es nach 2 Jahren ebenfalls insgesamt 11200 DM. Eingezahlt wird der Betrag, der mit Zinseszins in 2 Jahren bei 6% auf 11200 DM wächst.
Wieviel DM müssen beim Sparbrief B eingezahlt werden?
Diskutiere Vorteile und Nachteile der beiden Sparbriefe.



4. Ende 1993 hatten die Bundesbürger 470 Milliarden DM auf Sparbüchern zu einem Zinssatz von 3,5% angelegt. Bei einer anderen Anlage des Gesparten (z.B. als Sparbrief) hätten sie 6% bekommen. Wieviel DM gewinnen die Banken und Sparkassen in diesem Jahr, weil die Sparer Sparbuch statt Sparbrief gewählt haben?

5. Bei einem **Ratenkredit** wird in der Regel monatlich, viertel-, halb- oder ganzjährlich ein fester Betrag (Rate) abgezahlt, wobei zur Restschuld die Zinsen für diesen Zeitraum dazukommen.
Eine Musikanlage kostet bar 2000 DM. Zur Finanzierung wird folgende Ratenzahlung angeboten:
Bei einem vierteljährlichen Zinssatz von 3% soll der Betrag in Vierteljahresraten von 400 DM abgezahlt werden.
Wie viele Vierteljahresraten müssen gezahlt werden, wie hoch ist die letzte Rate?

6. 1992 hatten die 80 Millionen Bundesbürger Konsumentenkredite in Höhe von 324 Milliarden DM aufgenommen. Dafür mussten sie 36,4 Milliarden DM Zinsen zahlen.
Wie hoch war der durchschnittliche Zinssatz für diese Kredite?



[14] aus Kahle/Lörcher, Querschnitt 10

Wie hoch waren die Kredite pro Kopf und wie hoch waren die zu zahlenden Zinsen pro Kopf der Bevölkerung?
Von den Konsumentenkrediten waren 148 Milliarden Ratenkredite und 176 Milliarden Dispo-Kredite u.ä. Rechne beide Sorten um in DM pro Kopf.

7. Auf das Wievielfache wächst ein Guthaben in einem Jahr bei einem Zinssatz von 0,98%; *4,56%; 5%; 8,45%;* 10%; 14,87%? Auf das Wievielfache wächst es bei den gleichen Zinssätzen in 5 Jahren?

8. Wie hoch sind die Guthaben nach 4 Jahren?
a) 1000 DM bei 4,7% b) 800 DM bei 5,75% c) 900 DM bei 2,7%

9. Welches Guthaben wächst in 2 Jahren auf den angegebenen Betrag?
Beispiel: Endbetrag 676DM, Zinssatz 4%, also $x \cdot 1{,}04^2 = 676$, somit $x = 676:1{,}04^2 = 625$ DM.
a) 2205 DM bei 5% b) 2247,20 DM bei 6% c) 2000 DM bei 6%

10. Berechne die Zinssätze für den Überziehungskredit wie im Beispiel.
Beispiel: Ina hat ihr Konto 14 Tage lang um 900 DM überzogen. Die Bank belastet sie dafür mit 4,90 DM. Ina möchte wissen, wie hoch der Zinssatz war. (*Lösung:* Zinssatz 14%.)
3 DM bei 800 DM in 9 Tagen c) 0,40 DM bei 1200 DM in 1 Tag
7,25 DM bei 1000 DM in 18 Tagen d) 80 DM bei 3000 DM in 2 Monaten

11. Lars ist in der Klemme. Er braucht dringend 1000 DM. Er findet in der Zeitung die nebenstehende Kleinanzeige. Lars nimmt das Angebot an. Er denkt: „2% ist nicht viel und 2 Jahre sind eine lange Zeit.“ Nach 2 Jahren bekommt er eine Mitteilung, dass er 1608,44 DM zurückzahlen muss. Kann das sein? Kontrolliere durch eigene Rechnung.

> Sofort 1000 DM auf die Hand, erst in 2 Jahren zurück!
> Zinssatz nur 2% pro Monat.

12. Ende 1993 hatten die 80 Millionen Bundesbürger Konsumentenkredite in Höhe von 354 Milliarden DM aufgenommen. Das waren rund 17% der verfügbaren Jahreseinkommen. Zusammen mit den Baukrediten machten die Schulden 66% ihrer Einkommen aus.
a) Wie hoch waren die Konsumkredite pro Kopf?
b) Wie hoch war das Jahreseinkommen pro Kopf?
c) Wie hoch waren die Schulden für den Wohnungsbau pro Kopf?
d) Wie viel Zinsen mussten pro Kopf im Jahr für alle Schulden gezahlt werden, wenn man mit einem Zinssatz von rund 10% rechnet?

13. Die öffentlichen Schulden von Bund, Ländern und Gemeinden betrugen 1993 in der Bundesrepublik 1,75 Billionen DM. Dafür mussten 1993 rund 105 Milliarden DM Zinsen gezahlt werden. Die gesamten Steuereinnahmen betrugen 1993 rund 750 Milliarden DM.
a) Wie hoch war der durchschnittliche Zinssatz?
b) Wie viel Prozent der Steuereinnahmen mussten für Zinszahlungen verwendet werden?

> **GIF ist tot - es lebe PNG**
>
> Drei weitere Verbesserungen werden das Internet drastisch entlasten: Ein schnelleres HTTP-1.1-Protokoll (Hypertext Transfer Protocol), Cascading Style Sheets zur Strukturierung von Dokumenten und ein neues Grafikformat sollen **Download-Zeiten um 400 Prozent reduzieren**. Das gute alte GIF-Format wird ausgemustert und durch „Portable Network Graphics" (PNG) ersetzt. Die Images sind kleiner, schneller im Bildaufbau und erlauben eine höhere Darstellungsqualität.
>
> Erich Bonnert
>
> Aus: Computerzeitung, 1997

5 Geometrie

5.1 Übersicht

Grundlegende geometrische Kenntnisse	**5.Schuljahr**
Geometrische Grundbegriffe Punkt, Strecke, Gerade, Strahl parallel, senkrecht; Abstand Rechteck und Quadrat Zeichnen; Umfang, Flächeninhalt Flächenmaße, Umwandlungen, Anwendungen Achsenspiegelung Deckungsgleichheit, Achsensymmetrische Figuren Schiebung Deckungsgleichheit	Ebene Geometrie
Quader und Würfel Zeichnen, Netze, Schrägbild Oberfläche Volumen Raummaße, Umwandlungen, Anwendungen	Räumliche Geometrie

Grundlegende geometrische Kenntnisse	**6.Schuljahr**
Kreis Mittelpunkt, Radius, Durchmesser, Sehne, Bogen, Ausschnitt, Abschnitt Winkel Winkelarten, Messen und Zeichnen, Winkel an geschnittenen Parallelen Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende Drehung Drehpunkt, Drehwinkel, Deckungsgleichheit Punktspiegelung Punktweise Konstruktion, Deckungsgleichheit Punktsymmetrische Figuren	Ebene Geometrie
Vertiefung Körper Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel Herstellen von Modellen aus Netzen	Räuml. Geom.

Dreiecke	**7.Schuljahr**
Dreieckstypen Winkelsumme Mittelsenkrechte, Umkreis Winkelhalbierende, Inkreis Höhe [Seitenhalbierende] Konstruktionen Planung und Durchführung Kongruenzsätze	Ebene Geometrie

Vierecke, Vielecke; Prismen	**8.Schuljahr**
Vierecke Klassifizierung (Haus der Vierecke) Winkelsumme Konstruktion Umfang und Flächeninhalt von Dreiecken und Vierecken Herleitung der Formeln, Berechnungen Anwendung auf Vierecke [Satz des Thales, Konstruktion der Kreistangenten]	Ebene Geometrie

Prismen (gerade) Schrägbild Oberfläche und Volumen Berechnungen	Räumliche Geometrie

Kreis; **Zentrische Streckung, Satz des Pythagoras;** **Zylinder, Kugel**	**9.Schuljahr**
Kreis Umfang und Flächeninhalt Kreisbogen und Kreisausschnitt Berechnungen, Anwendungen Zentrische Streckung Berechnung von Strecken mit Strahlensätzen **oder** Ähnlichkeit [Ähnliche Figuren] [Kathetensatz, Höhensatz] Satz des Pythagoras, Berechnungen, auch an Körpern	Ebene Geometrie
Zylinder (gerade) Schrägbildsskizze; Mantelfläche, Oberfläche, Volumen Kugel Oberfläche und Volumen Berechnungen, Anwendungen	Räumliche Geometrie

Zäsur im 9.Schuljahr:
Stand bisher die Figuren- und Formenlehre sowie das Zeichnen und Konstruieren mit Zeichengeräten im Vordergrund, so tritt ab jetzt die **Berechnung** der geometrischen Objekte mit dem **Satz des Pythagoras**, den **Strahlensätzen** und der **Trigonometrie** ins Zentrum des Interesses.
Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens und die echten geometrischen Fragestellungen sollten darüber nicht vergessen werden!

Trigonometrie; **Körperberechnungen**	**10.Schuljahr**
sin α, cos α und tan α im rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis Berechnungen am rechtwinkligen. Dreieck Funktionswerte spezieller Winkel Anwendung bei Herleitung von Formeln Berechnungen an Figuren, die sich auf rechtwinklige Dreiecke zurückführen lassen Anwendungsaufgaben [Beziehungen zwischen sin α, cos α, tan α] [Bogenmaß eines Winkels] Die trigonometrischen Funktionen mit $y = \sin\alpha$ und $y = \cos\alpha$ und ihre Schaubilder [Die Funktion mit $y = \tan\alpha$] Die Funktion mit $y = a \sin\alpha$	Ebene Geometrie
Pyramide und Kegel Schrägbild Zeichnung ebener Teilfiguren als Hilfe für Berechnungen Mantelfläche, Oberfläche und Volumen Pyramiden- und Kegelstumpf Schrägbildsskizze Mantelfläche, Oberfläche und Volumen Zusammengesetzte Körper Anwendungsaufgaben	Räumliche Geometrie

5.2 Grundlegende Konzepte und Ziele des Geometrieunterrichts, Materialien

5.2.1 Ziele des Geometrieunterrichts

- Orientierung im Raum
- Räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln
- Formenkunde → Beschreiben der Welt
- Entdecken von Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten
- Begründungen und Beweise
- Mathematisches Argumentieren und Kommunizieren
- Problemlösen
- Entwicklung der Ästhetik
- Mathematik schätzen lernen (affektives Verhältnis zur Mathematik)
- Zeichnerische und handwerkliche Fähigkeiten und Fertigkeiten entwickeln
- sorgfältiges und sauberes Arbeiten lernen
- Kennenlernen bedeutsamer Ideen aus den Ursprüngen und der Geschichte der Mathematik („kulturelles Erbe")

Fast alle dieser Ziele sind auch Ziele des Mathematikunterrichts im allgemeinen, die Geometrie eignet sich aber wegen der Anschaulichkeit und der leichten Verfügbarkeit von handhabbaren Modellen besonders, diese Ziele zu erreichen. Das ist ein wesentlicher Grund, Geometrie im Unterricht allgemeinbildender Schulen ausgiebig zu betreiben, auch wenn die eigentlichen Inhalte oft austauschbar sind und oft nicht durch die Nützlichkeit im Arbeitsleben begründet werden können.

Zum Punkt „kulturelles Erbe".
Berühmte Probleme der Antike, die mit Zirkel und Lineal zu lösen sein sollten:
Delisches Problem (Würfelverdopplung), Dreiteilung des Winkels, Quadratur des Kreises. Alle diese Probleme haben über ca 2000 Jahre die Mathematiker beschäftigt und zu vielen Untersuchungen Anlass gegeben, bis im 19. Jahrhundert diese Probleme allesamt als unlösbar nachgewiesen werden konnten.

5.2.2 Geometrische Grundkonzepte

Die folgenden geometrischen Grundkonzepte werden durchgängig unterrichtet. Darunter lassen sich viele Inhalte einordnen. Einige davon sind sicher eng miteinander verbunden.

- Abbildungen
- Symmetrie (Invarianz unter gewissen Abbildungen)
- Ortslinien
- Flächeninhalt, Rauminhalt → Messen
- Berechnen geometrischer Beziehungen (algebraisches Modell der Wirklichkeit, „Descartes' Traum")
  Strahlensätze, Ähnlichkeit
  Satzgruppe des Pythagoras
  Trigonometrie
- Parkettierungen

5.2.2.1 Abbildungen

Folgende Abbildungen spielen explizit oder implizit eine Rolle:

Achsenspiegelung
Punktspiegelung
Drehung
Verschiebung
Zentrische Streckung
Allgemeine Affine Abbildung (Elliptische Grundfläche bei Schrägbild von Zylinder und Kegel)
Projektive Abbildung (eventuell Schrägbilder mit Fluchtpunkten, nicht im LP enthalten)

Welche Zugänge sind möglich? Welche Materialien? Was kann man in der Realschule machen? Wo finden die Abbildungen Anwendung?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen „Abbildungen" und „Symmetrie" ?

5.2.2.2 Symmetrie

Welche Begriffe können mit Hilfe von Symmetrie definiert oder erschlossen werden?
Geben Sie für die folgenden Begriffe jeweils Definitionen an. Welche Eigenschaften für den Begriff ergeben sich daraus unmittelbar? Wo spielen diese Eigenschaften eine Rolle? Wie kann dieser Zugang mit Material erschlossen werden?

Mittelsenkrechte einer Strecke
Winkelhalbierende eines Winkels
Tangente an einen Kreis
Ordnen von Dreiecken (gleichseitiges Dreieck, gleichschenkliges Dreieck)
Ordnen von Vierecken (Haus der Vierecke)
Winkelsumme im Dreieck und Viereck (Translationssymmetrische Muster, Parkettierungen)

5.2.2.3 Ortslinien

Geben Sie jeweils eine Definition der geometrischen Figur als Ortslinie an. Geben Sie jeweils auch eine andere Definition an.
Kreis,
Mittelsenkrechte,
Winkelhalbierende,
Parallele zu einer Geraden g durch einen Punkt P,
Thaleskreis (allg. Fasskreis),
[in SII fortführbar: Ellipse, Parabel, Hyperbel]

Wo benötigt man die Ortslinieneigenschaft der Figur? Geben Sie ein Beispiel für eine Konstruktion an, die diese Eigenschaft benutzt.

5.2.2.4 Flächeninhalt

Wie wird die Begriffsbildung ab der Grundschule vorbereitet?
Welche Methoden zur Bestimmung von Flächeninhalten finden in der SI Anwendung? Bei welchen Figuren?
In welchen Stufen erfolgt die Entwicklung des Begriffs des Flächeninhaltes?
Probleme in der Schule: Verwechslungen Umfang – Flächeninhalt von ebenen Figuren. Wie kann man dieser Verwechslung vorbeugen?

5.2.2.5 Rauminhalt

Wie wird die Begriffsbildung ab der Grundschule vorbereitet?
Welche Methoden zur Bestimmung von Rauminhalten finden in der SI Anwendung? Bei welchen Körpern?
In welchen Stufen erfolgt die Entwicklung des Begriffs des Rauminhaltes?
Probleme in der Schule: Verwechslungen Rauminhalt – Oberfläche von Körpern. Wie kann man dieser Verwechslung vorbeugen?

5.2.2.6 Berechnungen

Zunächst spielt in der Geometrie das Beschreiben der Umwelt mit geometrischen Begriffen, das Entdecken geometrischer Zusammenhänge und die Konstruktion geometrischer Figuren die größte Rolle. Im 9.Schuljahr erfolgt ein wesentlicher Einschnitt: mit den Strahlensätzen und dem Satz des Pythagoras zusammen mit den Winkelsummensätzen aus dem 7.Schuljahr werden nun sehr viele geometrische Größen berechenbar, die zuvor nur mit Zeichengeräten konstruierbar waren. Mit der Entwicklung der Trigonometrie im 10.Schuljahr findet diese Entwicklung ihren Abschluss. Damit sind alle mit den Kongruenzsätzen konstruierbaren Größen der Berechnung zugänglich (wenigstens prinzipiell, vergl. Sinussatz, Cosinussatz, die ab 1994 nicht mehr im LP vorgesehen sind).
Geometrische Berechnungen stellen das Hauptgebiet für Übung und Anwendung der in der Algebra erworbenen Techniken dar. Sie sind damit zu einem ganz zentralen Thema in der gegenwärtigen Realschul-Abschlussprüfung geworden. Aus der Notwendigkeit, alle gewünschten Bereiche aus der Algebra (auch quadratische Gleichungen) mit geometrischen Aufgaben zu erfassen ergeben sich oft Festlegungen der geometrischen Inhalte, die vielleicht aus der geometrischen Bedeutung alleine nicht zu rechtfertigen wären und die andere wünschenswerten geometrischen Ziele in den Hintergrund drängen.

5.2.3 Beweisen im Geometrieunterricht

Häufig werden im Geometrieunterricht „Beweise“ geführt. Dies kann auf ganz verschiedenen Stufen mit verschiedenen Zielsetzungen geschehen.

Beweise in einer axiomatischen Theorie.

Schon im Altertum wurde von Euklid ein Axiomensystem für die Geometrie aufgestellt. In der Folge versuchten die Mathematiker, nicht auf Grund der Anschauung, sondern nur auf Grund der Euklidischen Axiome geometrische Wahrheiten zu gewinnen. Da die Entwicklung der axiomatischen Methode in der Geometrie zu einer der ganz großen kulturellen Leistungen der

Menschheit zählt, hatte die Pflege dieser Methode eine lange Tradition im Geometrieunterricht. Die schon im Altertum unternommen Versuche, das Parallelen-Axiom als eines der am wenigsten evidenten Axiome aus der Gültigkeit der übrigen Axiome abzuleiten haben erst im letzten Jahrhundert ihren Abschluss gefunden, als gezeigt werden konnte, dass dies nicht möglich ist (Entwicklung von Nicht-Euklidischen Geometrien). Lücken in Euklids Axiomensystem wurden von David Hilbert, dem wohl bedeutendsten Mathematiker der Jahrhundertwende, geschlossen. Mit Hilberts Axiomen war für die Gewinnung geometrischer Wahrheiten auch die letzte Notwendigkeit eines Bezugs auf die Wirklichkeit überflüssig geworden. Die Natur der geometrischen Objekte wird nicht mehr beschrieben, sondern nur noch die formalen Regeln für den Umgang mit ihnen. Hilbert selbst hat dies mit seinem berühmten Ausspruch unterstrichen: „Statt Punkt, Gerade und Ebene können wir ebensogut Tisch, Stuhl und Bierseidel sagen.“

Beweise in der Schule.

Beweise zur Sicherung des Wahrheitsgehaltes.
Für die Schule ist selbstverständlich auf keiner Stufe ein ganz streng axiomatisches Vorgehen möglich. Dennoch finden sich immer wieder Ansätze in der Geometriedidaktik, die dieses Prinzip wenigstens in gewissen Teilbereichen des Geometrieunterrichts verfolgen: Sind gewisse grundlegende Sachverhalte als wahr akzeptiert, so kann man versuchen, andere Sachverhalte daraus mehr oder weniger streng herzuleiten (lokales Ordnen). In diesem Sinne soll ein Beweis – ganz in der Tradition des axiomatischen Vorgehens – der Sicherung des Wahrheitsgehaltes dienen. Diese Stufe des Beweisens wird in der Schule – wenn überhaupt – nur im Gymnasium anzustreben sein. Sind Schüler nach eigener Erfahrung und mit Hilfe konkreter Beispiele von der Richtigkeit einer Vermutung subjektiv überzeugt, so entwickeln sie in der Regel kein Bedürfnis nach einem Beweis für diese Vermutung (etwa bei dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck nach Versuchen mit Papierdreiecken).

Beweise zur Erklärung von Sachverhalten.
Ein Beweis führt die Gültigkeit eines Satzes auf die Gültigkeit schon früher akzeptierter Sachverhalte zurück. Selbst wenn ein Satz durch Erfahrung und Anschauung als gültig erkannt wird, kann ein Beweis eine *Beziehung* zu anderen Sätzen herstellen, die erklärt, warum dieser Satz gilt und damit den Satz selbst nicht sicherer, aber besser verständlich im Beziehungsgeflecht der Geometrie macht, in derselben Weise, wie die Erklärung des mechanischen Mechanismus einer Uhr unseren Glauben in das korrekte Funktionieren derselben nicht erhöht, wohl aber das Verständnis für dieses Funktionieren fördert und die Einordnung in den Bereich der mechanischen Maschinen ermöglicht. Beispielsweise kann ich zwar nach Experimenten (eventuell auch mit Hilfe dynamischer Geometriesysteme am Computer) von der Gültigkeit des Satzes des Thales überzeugt sein und mich dennoch fragen, welche Rolle hierbei der Kreis spielt, welche Eigenschaft des Kreises dafür verantwortlich ist, dass der Satz „funktioniert“. In diesem Sinne ist die Geometrie eine induktive Wissenschaft, die ihre Erkenntnis aus der Welt durch Beobachtung, Experiment und Abstraktion gewinnt.

Niveaustufen von Beweisen
Stufe des Argumentierens: Mit Beispielfiguren, mit geeignetem Material (Modelle, Papier, Folien) und konkreten Handlungen (Schneiden, Falten, Flechten) werden mit eigenen Worten Sachverhalte erklärt bzw. die Gültigkeit nicht unmittelbar einsichtiger begründet. Damit soll ein Beziehungsgeflecht der geometrischen Einsichten entwickelt werden. Das Entdecken von Zusammenhängen und anschließende Erklären soll dabei im Vordergrund stehen. Diese Stufe ist der Sekundarstufe I angemessen.

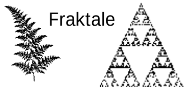
Stufe des inhaltlichen Schließens: Statt nur überzeugende Argumente für die Gültigkeit eines Satzes zu geben wird versucht, eine Kette von auseinander folgenden Aussagen zu finden, an deren Ende der zu beweisende Satz steht. Dabei wird man nicht auf die Anschauung verzichten und nicht jeden Schritt lückenlos durch Angabe der verwandten Sätze begründen. Auch diese Stufe kann in der Sekundarstufe I noch angestrebt werden, aber sicherlich nicht durchgängig, sondern höchstens exemplarisch.

Stufe des formalen Schließens: Hier muss jeder Schritt einer Beweiskette lückenlos durch Angabe des verwandten Axioms oder schon bewiesenen Satzes begründet werden. Wegen der hohen Abstraktion und geringen Nutzens für die Einsicht in die Zusammenhänge ist diese Stufe bestenfalls der Sekundarstufe II vorbehalten.

5.2.4 Materialien und Modelle, Aktivitäten

Falten, Schneiden, Flechten
Netze, Flächenmodelle, Pop-up-Modelle
Tangrams
Kantenmodelle, Massivmodelle
Geobrett
Gummiband zur zentrischen Streckung
Computerprogramme
  Dynamische Geometriesysteme (DGS), Visualisierungshilfen
Soma-Würfel
Pyramiden zum Aufbau eines Würfels → Hinführung zum Pyramidenvolumen
Umfüllversuche zum Pyramidenvolumen
Modelle zum Kugelvolumen (Zylinder, Doppelkegel, Kugel)
Beklebeversuche zur Kugeloberfläche

Vermischtes (Spiele, Puzzles, Merkwürdiges)



Escher-Modelle
Faltpuzzles (Spektrum der Wissenschaft)
„Kisten stapeln"
Pop-Up-Modelle als Grußkarten etc. (Spektrum der Wissenschaft, wissenschaftliche Hausarbeit, PH Freiburg)
Rund ums DIN-Format (halbes Blatt ist ähnlich zum ganzen Blatt)
Fraktale und Selbstähnlichkeit
„Patty paper" (kreisrundes Filterpapier, Backpapier)
Geschichte und Geschichten über antike Mathematiker (Thales, Pythagoras)

5.2.5 Dynamische Geometrieprogramme

Allgemeine Merkmale:

- **Freies Zeichnen von Basisobjekten**: Punkte, Strecken, Geraden, Polygone, Kreise usw.
- **Konstruieren von neuen geometrischen Objekten**, die von den Basisobjekten abhängen.
  Beispiele: Mittelsenkrechten zu Strecken,
  Streckenmittelpunkte zu Strecken,
  Spiegelpunkte zu einem Punkt und einer Spiegelachse.
- **Bewegen der frei gezeichneten Basisobjekte**. Die davon abhängigen konstruierten Objekte verändern sich dann ebenfalls so, dass die geometrischen Beziehungen erhalten bleiben. Das bedeutet, dass z.B. beim Bewegen einer Strecke die konstruierte Mittelsenkrechte immer Mittelsenkrechte bleibt. Man sieht auf diese Weise, welche Eigenschaften einer Konstruktion unabhängig von der speziellen Lage der willkürlich gezeichneten Basisobjekte sind.
  Beispiel: Lage des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten im Dreieck.
  So können ohne Schwierigkeiten Erfahrungen gesammelt werden, für die sonst viele verschiedene Zeichnungen angefertigt werden müssten.
- **Ortslinien darstellen**. Ein oder mehrere Punkte können markiert werden, so dass beim Bewegen eines Basisobjekts diese markierten Punkte die Bahn ihrer Bewegung aufzeichnen.
  Beispiele: Scheitel eines rechten Winkels über einer Strecke ⇨ Thaleskreis
  Scheitel eines beliebigen Winkels über einer Strecke ⇨ Umfangswinkelsatz (Abb.1)
  Spiegelpunkt eines Punktes ⇨ Abbildung von Figuren durch Achsenspiegelung (Abb.2)
  Diese Eigenschaft erlaubt es, ganz neue Inhalte zu erschließen, die ohne Computer nicht in der Sekundarstufe I zu behandeln sind. Beispiele dafür sind Abbildungen, die nicht geradentreu sind (Spiegelung am Kreis, Abb.3) oder Kegelschnitte.
- **Messen von Längen, Winkeln und Flächeninhalten**. Die gemessenen Werte werden bei Bewegung der Basisobjekte aktualisiert. Damit lassen sich Beziehungen zwischen den Maßen der geometrischen Objekte ablesen.
- **Rechnungen mit Meßwerten durchführen**. Alle gemessenen Werte lassen sich im eingebauten Taschenrechner verwenden und die Ergebnisse in der Zeichnung darstellen. Auf diese Weise können auch kompliziertere Zusammenhänge gefunden werden.
  Beispiele: Summe von Flächeninhalten bzw. Quadraten ⇨ Satz des Pythagoras
  Quotienten von Streckenlängen ⇨ Strahlensätze.
- **Wiederholen von Konstruktionsfolgen**. Alle Konstruktionen werden in Konstruktionsbeschreibungen intern aufgezeichnet und können wiederholt abgespielt werden, und zwar vorwärts und rückwärts.
- **Erstellen von vorgefertigten Zeichnungen**, mit denen Schüler experimentieren können, ohne zunächst den Konstruktionsprozess im einzelnen zu durchschauen (black box).
- **Aufzeichnen von komplexen Konstruktionsfolgen** (**Makros**), die dann immer wieder auf andere Anfangsobjekte angewandt werden können, wie z.B. die Konstruktion eines Quadrates aus einer Strecke. Auch solche Makros können wieder vom Lehrer den Schülern zum Experimentieren zur Verfügung gestellt werden, ohne dass diese die Makrodefinition verstehen müssen. Beispiel: Spiegelung am Kreis.
- **Erstellen von fertigen Demonstrationen**. Dies ist nicht der eigentliche Sinn dieser Programme, die für Eigenarbeit und eigene Experimente gedacht sind. Der Nutzen hierbei ist fraglich.
- **Ausdruck der Konstruktionen** zur Ergebnissicherung. Auch hilfreich für den Lehrer zum Gestalten von Arbeitsblättern.

Mögliche Vorzüge von Geometrieprogrammen gegenüber den herkömmlichen Methoden:

- Viel Eigentätigkeit möglich.
- Geometrische Experimente durchführen und selbst Zusammenhänge durch diese Experimente entdecken. "Spurensicherung" durch Ortslinien.
- Motivation durch Herstellen einer eigenen Konstruktion, die "stabil" gegen Veränderungen der Basisobjekte ist. Erfolg oder Nichterfolg ist vom Schüler selbst feststellbar.
- Leicht erreichbare Zwischenziele, viele kleine Erfolge mit positiver Rückmeldung bei einzelnen Konstruktionsschritten.
- Ausdruck von schönen Zeichnungen, eventuell mit Beschreibung der Konstruktion, Schaffen eigener "Werke".

Unterschiede zwischen einzelnen Programmen.

Die einzelnen Programme unterscheiden sich etwas in Einzelheiten. Dabei haben wohl alle Vor- und Nachteile. Mögliche Besonderheiten sind

- Die aufgezeichneten **Konstruktionsbeschreibungen können editiert** werden und Konstruktionen können auch alleine durch Angabe von Konstruktionsbeschreibungen durchgeführt werden. Dies kann didaktische Vorteile haben. (GEOLOG)
- **Schnittpunkte von Strecken, Geraden und Kreisen werden als Punkte erkannt**, auch wenn sie nicht ausdrücklich als Schnittpunkte konstruiert wurden. Dies ist besonders beim ersten Kennenlernen des Programms hilfreich, da nur schwer zu verstehen ist, dass so offensichtlich reale Dinge für das Programm als Objekte nicht existieren. (CABRI II)
- Nicht nur Basisobjekte, sondern **auch konstruierte Objekte können bewegt werden**, wobei sich dann die Basisobjekte so mitbewegen, dass die geometrischen Relationen erhalten bleiben. (SKETCHPAD)
- Auch **Polygonflächen sind als geometrische Objekte** definierbar und können ausgeschnitten, eingefügt und verschoben werden. Damit sind Puzzles realisierbar, z.B. Pythagoras-Puzzles. (SKETCHPAD)
- **Bewegte Demonstrationen** sind möglich, indem auf Knopfdruck sich ein Punkt auf einer festgelegten Bahn (Strecke oder Kreisbogen) bewegt (Animation). (SKETCHPAD)
- **Makrodefinitionen erlauben Rekursion**. Damit können interessante und im bisherigen Geometrieunterricht nur schwer zu behandelnde Figuren erzeugt werden, wie die bekannten Fraktale Baum des Pythagoras (Abb. 6) oder die Schneeflockenkurve. (SKETCHPAD)

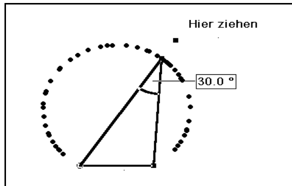


Abbildung 1

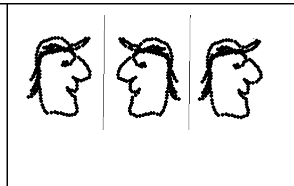


Abbildung 2

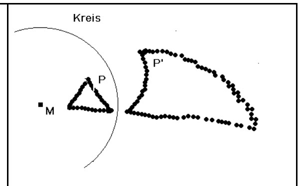


Abbildung 3

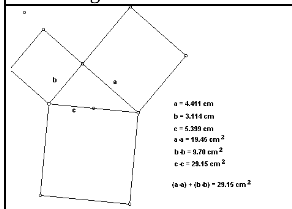


Abbildung 4

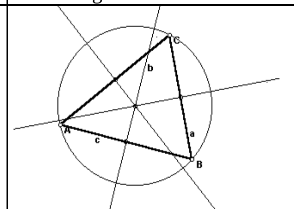


Abbildung 5

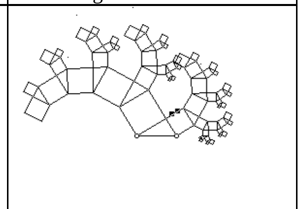


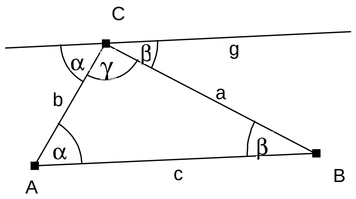
Abbildung 6

5.3 Inhalte

5.3.1 Dreiecke (7. Schuljahr)

Winkelsumme

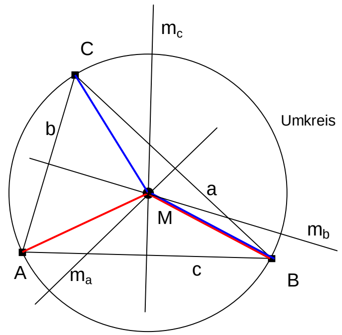
Die Summe der Winkel im Dreieck beträgt 180°



$g \parallel c$,
Satz über Wechselwinkel an Parallelen

Mittelsenkrechten, Umkreis

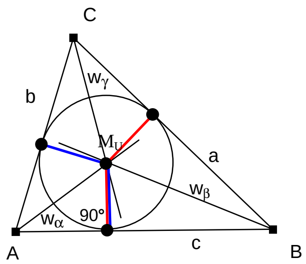
Die Mittelsenkrechten im Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises.



Beweis:
M ist der Schnittpunkt von m_c und m_a
$\overline{MA} = \overline{MB}$ und $\overline{MB} = \overline{MC}$
$\overline{MA} = \overline{MC}$ und daher $M \in m_b$, M hat von allen Eckpunkten den gleichen Abstand, ist also Mittelpunkt des Umkreises

Winkelhalbierende, Inkreis

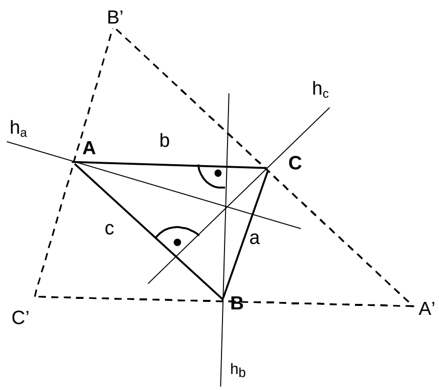
Die Winkelhalbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Inkreises.



Beweis:
M_U ist der Schnittpunkt von w_β und w_α
Aus der Ortslinieneigenschaft oder der Symmetrieeigenschaft der Winkelhalbierenden folgt analog wie beim Umkreis, daß der Abstand von M_U zu allen Dreiecksseiten gleich groß ist, d.h. die Lote von M_U auf die Dreiecksseiten sind alle gleich lang. Die Länge eines solchen Lotes von M_U zur Seite ist der Radius des Inkreises.

Höhen im Dreieck

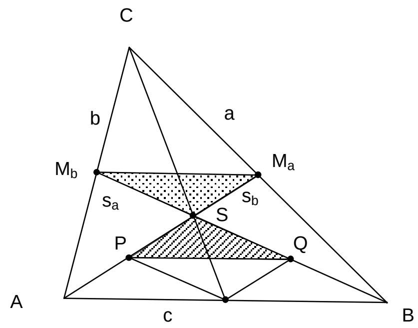
Die Höhen im Dreieck schneiden sich in einem Punkt.



Beweis:
Zeichne zu den Seiten des Dreiecks ABC Parallelen, so daß ein Dreieck A'B'C' entsteht.
Dreieck ABC ist das Mittendreieck von A'B'C'. Die Höhen des Dreiecks ABC sind gerade die Mittelsenkrechten von A'B'C', die sich in einem Punkt schneiden.

Seitenhalbierende, Schwerpunkt

Die Seitenhalbierenden im Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks (Flächenschwerpunkt). Er teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 .



Beweis:
Betrachte zunächst nur s_a und s_b. Zeichne im Dreieck ABS die Mittelparallele $\overline{PQ}$. $\overline{PQ}$ ist $\frac{1}{2}$c. Spiegle das Dreieck PQS an S. $\overline{PQ}$ geht in $\overline{M_aM_b}$ über, da $\overline{M_aM_b} = \frac{1}{2}c$ (als Mittelparallele in ABC).
ABS wird in 4 kongruente Dreiecke zerlegt. Damit ist $\overline{AP} = \overline{PS} = \overline{SM_b}$, S teilt s_b im Verhältnis 2:1.
Das gilt für jede Seitenhalbierende, daher geht auch s_c durch S.

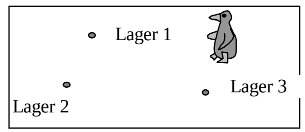
Experimente zu den Seitenhalbierenden und zum Schwerpunkt.

Balancieren eines Pappdreiecks auf der Kante eines Lineals. Liegt eine Ecke des Dreiecks über dem Lineal, dann zeigt sich, dass das Lineal unter der Mitte der gegenüberliegenden Seite hindurchgeht. Eine Erklärung ergibt sich, wenn man sich das Dreieck zerlegt denkt in schmale Streifen (s. Abbildung).

Hängt man ein Pappdreieck an einer Ecke auf, dann ist das Lot durch diese Ecke die entsprechende Seitenhalbierende.
Welches physikalische Prinzip steckt dahinter?

Aufgabe zum Umkreis

In vielen Schulbüchern findet man zum Einstieg oder zur „Anwendung" des Umkreises Aufgaben des folgenden Typs[15]:



Während einer Antarktis-Expedition soll ein Versorgungslager eingerichtet werden, das von drei Forschungsstationen gleich weit entfernt ist. Suche den passenden Platz, indem Du um die Stationen Kreise mit gleichen Radien zeichnest.

In anderen Büchern handelt es sich um drei Dörfer, die ein gemeinsames Schwimmbad oder ein Wasserwerk bauen wollen.
Was ist an dieser Aufgabenstellung auszusetzen? Untersuchen Sie verschiedene Lagen der Stationen!
Wie müsste die Fragestellung lauten, die in der Praxis bei dieser Art von Problemen gestellt werden müsste?

Aufgabe zum Ankreis

Ein Kreis, der eine Seite eines Dreiecks und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten von außen berührt, heißt Ankreis an das Dreieck. Konstruieren Sie die drei Ankreise an ein gegebenes Dreieck.

[15] Schnittpunkt 7, Klett 1994, S 98

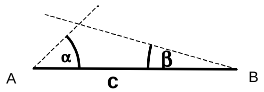
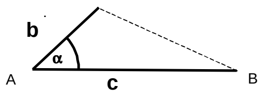
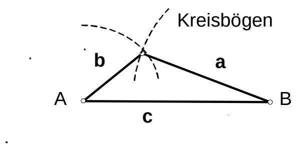
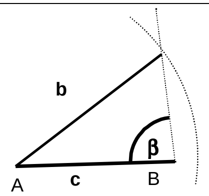
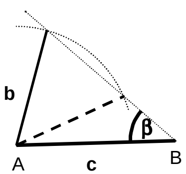
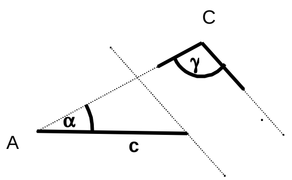
Kongruenzsätze

Formulierung als *Kongruenzsätze* : *Zwei* Dreiecke sind kongruent, wenn sie in ...... übereinstimmen.

Formulierung als *Konstruktionssätze*: *Ein* Dreieck ist eindeutig bestimmt durch die Angabe von ....

Die zweite Formulierung eignet sich für die schulischen Anwendungen besser, zumindest zum Einstieg, da die erste Anwendung der Sätze die Konstruktion eines Dreiecks nach gegebenen Größen sein wird. Erst wenn man Beweise führt, benötigt man die zweite Formulierung häufiger, um die Übereinstimmung gewisser Längen oder Winkel in Figuren nachzuweisen.

Ordnung nach der Schwierigkeit der Konstruktion:

Kurzname	Konstruktion	Beispiel	Trigonometrischer Satz zur Berechnung der fehlenden Stücke
wsw		α, c, β α + β < 180°	Sinussatz für Seiten Winkelsummensatz für Winkel
sws		b, α, c	Cosinussatz für Seite, Sinussatz für Winkel
sss		a, b, c Bedingung: a+b>c	Cosinussatz für Winkel
Ssw		b, c, β Bedingung b>c	Sinussatz
sSw **Kein Kongruenz-satz !!!**		b, c, β Bedingung b<c **zwei** oder **kein** oder **ein** **rechtwinkliges** Dreieck	Sinussatz
wws ↓ **wsw**		γ, α, a	Sinussatz für Seiten Winkelsummensatz für Winkel

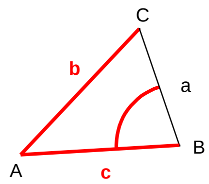
Kongruenzsätze systematisch

Seiten	Winkel	Satz
1	2	wsw wws
2	1	sws Ssw
3	-	sss

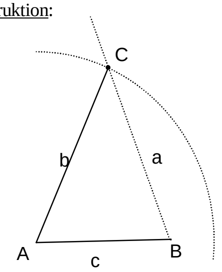
Konstruktion von Dreiecken

Aufgabe: Konstruiere ein Dreieck mit b= 4 cm, c=3 cm, β=70° .

Planskizze:



Konstruktion:



Beschreibung (Vorschlag):

Seite c

Winkel β an c in B

Schenkel a verlängern

Kreis(bogen) um A mit Radius b

C ist Schnittpunkt des Kreisbogens mit Schenkel a

Wie ausführlich soll eine Konstruktionsbeschreibung sein? Richtschnur sollte die Verständlichkeit sein: es sollte möglich sein, an Hand der Beschreibung die Konstruktion nachzuvollziehen.

Gute Anhaltspunkte für die Genauigkeit, mit der man eine Konstruktion beschreiben muss, findet man bei den dynamischen Geometrieprogrammen (EUKLID, Geolog usw.), die zu einer vollzogenen Konstruktion die vom Computer automatisch erfasste Mitschrift der Konstruktionsschritte anzeigen. Hier als Beispiel die Konstruktionsbeschreibung des Programms EUKLID für die oben durchgeführte Konstruktion:

A ist ein freier Basispunkt
B ist ein freier Basispunkt
c ist eine Strecke der festen Länge 3 cm zwischen A und B
a ist eine Gerade durch B im Winkel w = - 70 (°) zur Geraden (A ; B)
k1 ist ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius = 4 (cm)
C ist der 2. Schnittpunkt der Linie a mit dem Kreis k1
b ist die Strecke [A ; C]

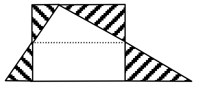
Aufgabe

Konstruiere ein Dreieck mit a=3cm, c=4cm, h_c=2cm.
Planskizze, Konstruktion, Konstruktionsbeschreibung. Wie viele solche Dreiecke gibt es?

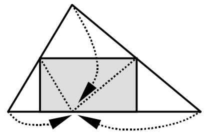
5.3.2 Flächeninhalt von Dreiecken und Vierecken (8. Schuljahr)

Begründung der Formel: Zeichnen, Ergänzungsbeweise oder Zerlegungsbeweise; Teilweise Formel aus der Faltung entwickelt

Dreieck



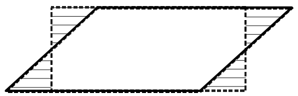
$A = \frac{1}{2} g \cdot h$



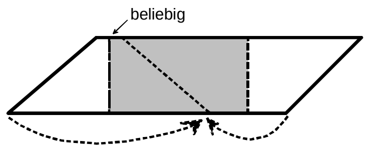
$A = 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} g \cdot h$

Aus dieser Faltung ist auch der Satz über die Winkelsumme im Dreieck ablesbar.

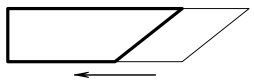
Parallelogramm



$A = g \cdot h$

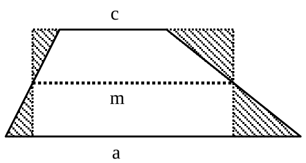


$A = 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h = g \cdot h$

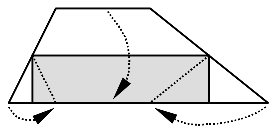


Schieben; Ergänzungsbeweis

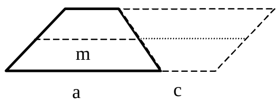
Trapez



$A = m \cdot h$

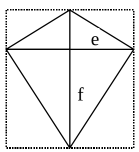


$A = m \cdot \frac{1}{2} h \cdot 2 = m \cdot h$



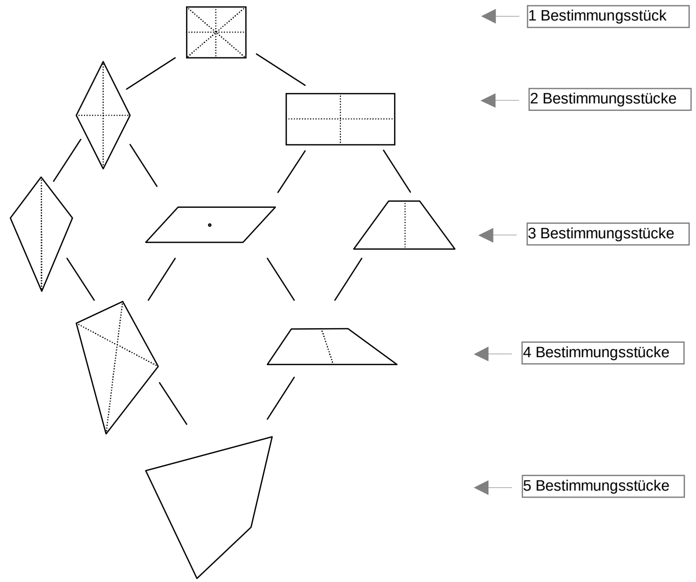
$A = \frac{1}{2} (a+c) \cdot h$

Drachen



$A = \frac{1}{2} e \cdot f$

5.3.3 Haus der Vierecke (8.Schuljahr)



Ordnen der (konvexen) Vierecke:

- Nach Eigenschaften wie Gleichheit von Winkeln oder Seiten, nach Parallelität von Seiten. Der schiefe Drachen tritt hierbei nirgendwo in Erscheinung. Man kann versuchen, mit möglichst wenigen Eigenschaften eine Vierecksklasse zu definieren.
- Nach Symmetrieeigenschaften: Symmetrieachsen (Zahl, Diagonale oder Verbindung der Seitenmitten), Punktsymmetrie. Will man auch nicht-gleichschenklige Trapeze und schiefe Drachen erfassen auf diese Art, so muss man Schrägspiegelungen zulassen; nicht für SI geeignet.
  Schrägspiegelsymmetrie beim Trapez zeigt sich darin, dass die Verbindung der Mitten der parallelen Seiten alle Parallelen zu diesen Seiten im Inneren des Trapezes halbiert.

Die Linien zwischen den Viereckstypen lassen sich von oben nach unten lesen als „... ist ein ...“. Von unten nach oben nimmt die Symmetrie zu. An der Spitze steht das Quadrat mit der höchsten Symmetrie.

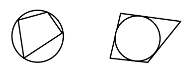
Winkelsumme im Viereck.

Rückführung auf die Winkelsumme im Dreieck durch Zerlegung in zwei Dreiecke durch eine Diagonale, oder durch Parkettieren der Ebene mit beliebigen Vierecken, analog zum Vorgehen beim Dreieck.

Aufgaben zu Vierecken.

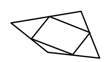
Ziel dieser Aufgaben kann sein, Begründen und Argumentieren lernen. Die Tatsachen selbst sind innerhalb des Schulstoffes nicht von Bedeutung und werden daher auch nicht in die Lehrpläne aufgenommen. Zur Beabeitung bieten sichdynamische Geometrieprogramme an

(1) Haben alle Vierecke einen Umkreis?
(2) Haben alle Vierecke einen Inkreis?



(3) Was kann man über Vierecke sagen, die einen Umkreis / einen Inkreis besitzen? → Sehnenvierecke, Tangentenvierecke. „Forschungsaufgabe“. Strategie: Umkehren der Fragestellung: Gehe aus von einem Kreis und zeichne dazu Vierecke, die diesen Kreis als Umkreis bzw. Inkreis besitzen. Läßt sich bei diesen Dreiecken etwas entdecken? Zeichne dazu die Radien zu den Eckpunkten bzw. zu den Berührpunkten ein und suche in den entstehenden Figuren gleiche Winkel bzw. gleiche Strecken.

(4) Verbinde in einem beliebigen Viereck die Seitenmitten benachbarter Seiten. Was kann man über das entstehende Mittenviereck sagen? Begründung?



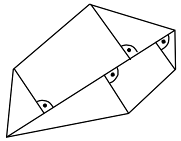
5.3.4 Flächeninhalt und Umfang von Polygonen (8.Schuljahr)

Polygon: Vieleck

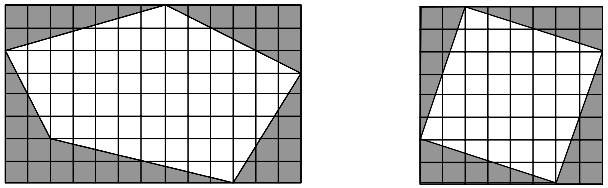
Flächeninhalt

Die Berechnung von Flächeninhalten regelmäßiger Polygone sowie beliebiger Polygone wird auf die Berechnung von Dreiecks- und Vierecksflächen zurückgeführt.

1.Strategie: Polygon in Dreiecke **zerlegen** und die benötigten Strecken ausmessen.
Eventuell so geschickt in Dreiecke zerlegen, dass man die entsprechenden Strecken berechnen kann. Anwendungen später, besonders bei der Körperberechnung (Oberfläche, Mantel), wenn als Hilfsmittel der Satz des Pythagoras (9.Schj.) oder die Trigonometrie (10.Schj.) zur Verfügung stehen.



2.Strategie: Polygon zu einem Rechteck **ergänzen** und die Differenzfläche bestimmen. Besonders geeignet, wenn das Polygon im Rechtecksgitter gegeben ist, etwa wenn die Koordinaten der Eckpunkte im kartesischen Koordinatensystem angegeben sind.



Anwendung später beim Ergänzungsbeweis zum Satz des Pythagoras (Figur links).

Umfang

Messen der Seitenlängen, später berechnen der Seitenlängen mit Satz des Pythagoras oder die Trigonometrie.
Schülerproblem: Verwechslung von Umfang und Flächeninhalt.
Hilfe: Übungen mit dem Geobrett, Puzzles oder im Quadratgitter, schon ab der Grundschule.

- Flächeninhalt gegeben (z.B. Puzzleteile), Umfang möglichst groß, möglichst klein, vorgegeben....
- Umfang gegeben (z.B. Schnur), Flächeninhalt möglichst groß, möglichst klein, vorgegeben....

Winkelsumme

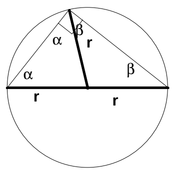
Rückführung auf geeignete Zerlegungen in Dreiecke, insbesondere auch zur Bestimmung der Winkel regelmäßiger Vielecke.

Winkelsummensatz: Die Winkelsumme im n-Eck beträgt $(n-2)\cdot 180°$.

5.3.5 Satz des Thales und Konstruktion von Kreistangenten (8.Schuljahr, nicht verpflichtend)

Satz des Thales

Verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers eines Kreises mit einem Punkt auf dem Kreisumfang, dann ist der dort entstehende Winkel ein rechter.



Zum Beweis verwendet man den Winkelsummensatz für Dreiecke und beachtet, dass sich im nebenstehenden Dreieck zwei gleichschenklige Dreiecke mit jeweils gleichen Basiswinkeln finden:
$2\alpha + 2\beta + 180° = 2\cdot 180° \Rightarrow \alpha + 2\beta = 90°$.

Aufgabe: Was läßt sich aussagen, wenn man im Satz des Thales „Durchmesser“ ersetzt durch „Sehne“?

Umkehrung des Satzes von Thales

Zeichnet man über einer Strecke rechtwinklige Dreiecke mit dieser Strecke als Hypotenuse, dann liegen die Scheitel der rechten Winkel alle auf einem Halbkreis über der Strecke.

Das Kleingedruckte, nicht für die SI geeignet: Meist unterscheidet man in der Formulierung diese beiden Aussagen nicht, sondern formuliert eine und meint dabei gleich auch noch die Gültigkeit der anderen. Die Äquivalenz der beiden ist streng genommen nicht offensichtlich. Formuliert man die beiden Sätze (etwas unpräzise) in der unten angegebenen Form, so mag der Unterschied deutlich werden:

Satz des Thales:	Jedes Dreieck im Halbkreis über d ist rechtwinklig.......Aber es könnte rechtwinklige Dreiecke über d geben, die nicht im Halbkreis liegen.
Umkehrung des Satzes von Thales:	Jedes rechtwinklige Dreieck über d liegt im Halbkreis.......Aber es könnte Dreiecke im Halbkreis geben, die nicht rechtwinklig sind.

Faßt man beide Aussagen zusammen, so gelangt man zu einer Formulierung mit dem Ortslinienbegriff:
Der Kreis über einer Strecke $\overline{AB}$ ist der geometrische Ort der Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke mit $\overline{AB}$ als Hypotenuse.
Diese Ortslinieneigenschaft benutzt man bei allen Konstruktionen mit Hilfe des “Thaleskreises”.

Experimenteller Zugang

Statt des oben angegebenen Beweises kann man den Satz experimentell finden lassen, indem man ein Geodreieck zwischen zwei Stiften (Büroklammern verbogen und durch Papier gesteckt; Nadeln) bewegt und die Scheitelpositionen des rechten Winkels markiert. Eventuell auch mit einem dynamischen Geometriesystem mit Hilfe des Ortslinienwerkzeugs durchführbar.

Anwendungen

Konstruktion der Kreistangenten
Von einem Punkt P außerhalb eines Kreises sollen die Tangenten an den Kreis k mit Mittelpunkt M konstruiert werden (d.h. die Berührpunkte sollen konstruiert werden ohne die Tangente “irgendwie an den Kreis dranzuschieben”).

Lösung: Verbinde P mit M und zeichne den Thaleskreis über der Strecke $\overline{PM}$. Die Konstruktion benutzt die Tatsache, dass die Tangenten senkrecht auf dem Berührradius stehen.

5.3.6 Volumen, Oberfläche und Schrägbild von Prismen (8.Schuljahr)

Mögliche Definitionen eines Prismas

1. Möglichkeit:	Ein Prisma entsteht durch Verschieben einer Vielecksfläche im Raum. Steht der Verschiebungspfeil senkrecht auf der Vielecksfläche, dann spricht man von einem senkrechten Prisma.
2. Möglichkeit:	Ein senkrechtes Prisma wird durch zwei parallele Vielecksflächen (die Grund- und die Deckfläche) sowie von rechteckigen Seitenflächen gebildet.

Viele Körper der Umwelt sind Prismen, werden oft nicht als solche erkannt, da die Grundfläche sehr klein oder sehr groß im Verhältnis zur Höhe ist, ungewöhnlich geformt ist oder das Prisma nicht auf seiner „Grundfläche“ steht: T-Träger, Profile, Kanthölzer, Fliesen jeglicher Art.

Volumen

Formel $V = G\cdot h$
Stufenfolge:

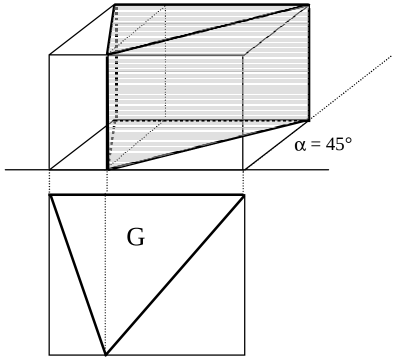
- rechtwinklige Dreiecksprismen sind halbe Quader
- jedes senkrechte Prisma ist zerlegbar in rechtwinklige Dreiecksprismen (Grundfläche zerlegen)
- wenn gewünscht, kann man die Gültigkeit der Volumenformel auch für nicht-senkrechte Prismen mit dem Satz des Cavalieri bzw. dessen Veranschaulichung zeigen („verrutschter Bücherstapel“)

Oberfläche

- Rückführung auf Polygone und spezielle Rechtecke
- Problem der Verwechslung von Oberfläche und Deckfläche (insbesondere wenn die Deckfläche nicht oben liegt)
- Zusammenhang von Oberfläche, Mantelfläche und Grundfläche $O = M+2G$

Schrägbild

Kavalierprojektion mit Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}$ und Winkel $\alpha=45°$, Rückführung auf das Zeichnen eines umgebenden Quaders.



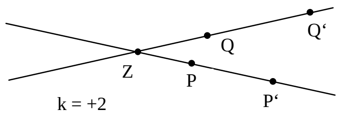
Ausbau des Verfahrens später für Schrägbilder von Pyramiden. Für Zylinder und Kegel verwendet man dagegen meist auch den Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}$ aber den Winkel $\alpha=90°$, damit die zu zeichnende Ellipse einfacher wird (Einpassen in ein Rechteck, nicht in ein beliebiges Parallelogramm).

5.3.7 Zentrische Streckung (9.Schuljahr)

Definition

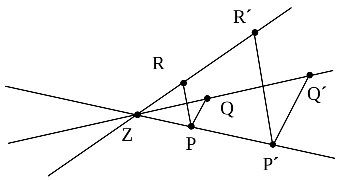
Eine Zentrische Streckung ist eine Abbildung, die durch ein Zentrum Z und einen Streckfaktor $k\neq 0$ durch folgende Vorschrift festgelegt ist:

1. Z ist Fixpunkt
2. Für $P\neq Z$ liegt der Bildpunkt P‘ auf der Geraden $\overline{ZP}$, und zwar
   für k>0 auf derselben Seite von Z wie P,
   für k<0 auf der anderen Seite von Z.
3. Es ist $|\overline{ZP'}| = |k|\cdot|\overline{ZP}|$



Eigenschaften der zentrischen Streckung

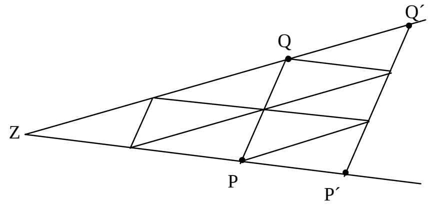
1. Jede Gerade ist parallel zu ihrer Bildgerade.
2. Die zentrische Streckung ist winkeltreu.
3. Für jede Strecke $\overline{PQ}$ ist $|\overline{P'Q'}| = k\cdot|\overline{PQ}|$.
4. Die zentrische Streckung ist längenverhältnistreu.



Beweise für die Eigenschaften:

Zu 1.: Für k=1 ist die Behauptung offensichtlich, also sei $k\neq 1$. Annahme g $\nparallel$ g´. Dann schneiden sich g und g´ in einem Punkt P. Dafür ist $|\overline{ZP}| = k\cdot|\overline{ZP}|$ da P=P´ , also k=1 $\Rightarrow$ Widerspruch.
Zu 2.: Klar nach 1. mit den Sätzen über Winkel an Parallelen (etwa $\measuredangle$ RPQ = $\measuredangle$ R´P´Q´)
Zu 3.: Es ist nach Definition der zentrischen Streckung klar, dass die Eigenschaft für Punkte P,Q gilt, die auf einer Geraden durch Z liegen. Für andere Punktepaare zeigen wir die Behauptung nur für rationale Streckfaktoren k, beispielhaft für $k=\frac{3}{2}$.

Die Strecke $\overline{ZP}$ wird in zwei gleiche Teile geteilt, $\overline{ZP'}$ ist so lang wie drei davon, dasselbe gilt für Q und Q´. Durch die Verbindungsgeraden entsprechender Teilungspunkte und durch Parallelen zu den Geraden ZP und ZQ durch die Teilungspunkte entstehen kongruente Dreiecke. Daraus ergibt sich eine Einteilung von $\overline{PQ}$ in 2 gleiche Teile und $\overline{P'Q'}$ in 3 ebenso große Teile, also $|\overline{P'Q'}| = \frac{3}{2}|\overline{PQ}|$.

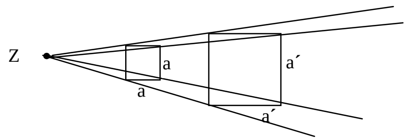


zu 4.: Aus 3. folgt $|\overline{P'Q'}| = k\cdot|\overline{PQ}|$ und $|\overline{P'R'}| = k\cdot|\overline{PR}|$ und daraus ergibt sich sofort $|\overline{P'Q'}| : |\overline{PQ}| = |\overline{P'R'}| : |\overline{PR}|$.

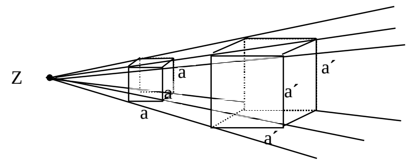
Änderung von Flächeninhalten bei zentrischer Streckung

Bei einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k verlängert sich jede Länge auf das k-fache (Vorsicht: nicht um das k-fache). Bei einem Dreieck verlängern sich also Grundseite und Höhe jeweils auf das k-fache, der Flächeninhalt auf das k^2-fache. Da sich jedes Polygon in Dreiecke zerlegen läßt und jede (vernünftige) krummlinig begrenzte Fläche sich durch Polygone annähern läßt, gilt der Sachverhalt allgemein.

Am einprägsamsten ist der Sachverhalt am Quadrat darzustellen:



Zentrische Streckung in der Ebene



Zentrische Streckung im Raum

Bei einer zentrischen zentrischen Streckung im Raum mit Streckfaktor k vergrößert sich der Rauminhalt eines Körpers auf das k^3-fache.

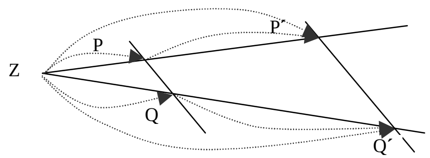
5.3.8 Strahlensätze (9.Schuljahr)

Werden zwei Strahlen mit Anfangspunkt Z von zwei parallelen Geraden in den Punkten P und Q bzw. P´ und Q´ geschnitten, dann gilt

1.Strahlensatz:

Die Längenverhältnisse entsprechender Streckenabschnitte auf den Strahlen sind gleich.

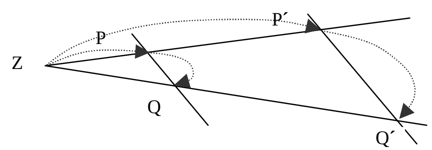
$$\frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{ZQ'}}{\overline{ZQ}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{PP'}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{ZQ}}$$



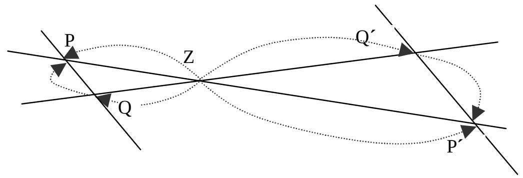
2.Strahlensatz:

Die Abschnitte auf den Parallelen haben dasselbe Längenverhältnis wie die zugehörigen **Scheitel**abschnitte auf den Strahlen.

$$\frac{\overline{Q'P'}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{ZQ'}}{\overline{ZQ}} = \frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}}$$



Die „Strahlensätze“ gelten auch, wenn keine Strahlen, sondern sich in Z schneidende Geraden vorliegen. Dann schneiden die Parallelen die Geraden auf verschiedenen Seiten von Z. Dies wird durch das nächste Bild dargestellt. Die zuvor notierten Beziehungen gelten auch in diesem Fall.



Beweis der Strahlensätze mit zentrischen Streckungen:

Die beiden Strahlensätze folgen unmittelbar aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung mit Zentrum Z und Faktor k. Offensichtlich gilt (Beweis ?)

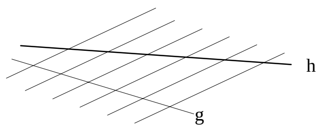
$$\frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{ZQ'}}{\overline{ZQ}} = k \quad , \qquad \frac{\overline{PP'}}{\overline{ZP}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{ZQ}} = k-1 \quad , \qquad \frac{\overline{Q'P'}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{ZQ'}}{\overline{ZQ}} = \frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}} = k$$

Man könnte die zentrische Streckung auch auslassen und unmittelbar mit den Strahlensätzen in den Themenkreis einsteigen. Dann muss man allerdings die Strahlensätze ohne Rückgriff auf den Begriff der zentrischen Streckung begründen.

Beweis der Strahlensätze ohne zentrische Streckungen:

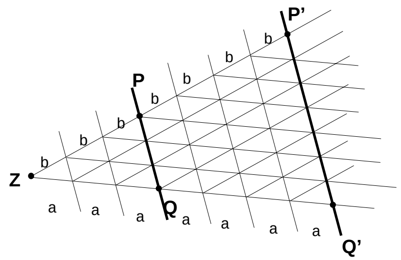
Als grundlegende Einsicht (ohne weitere Begründung) kann der folgende **Projektionssatz** dienen:

Projektionssatz:
Wenn eine Schar von Parallelen aus einer Geraden g gleich lange Strecken ausschneidet, dann auch aus jeder Geraden h.



Mit dem Projektionssatz kann man die Strahlensätze für rationale Streckenverhältnisse leicht begründen. Dies soll hier gezeigt werden, wenn $\frac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}} = \frac{7}{3}$.

Teilt man die Strecke $\overline{ZP'}$ in 7 gleiche Teile und zeichnet durch jeden Teilpunkt Parallelen zu den beiden Strahlen und zur Geraden $\overline{P'Q'}$, dann sieht man, dass sowohl auf dem anderen Strahl als auch auf den Strecken $\overline{P'Q'}$ und $\overline{PQ}$ gleiche Einteilungen entstehen, woraus man die beiden Strahlensätze unmittelbar ablesen kann (siehe nebenstehende Abbildung).



Aufgabe: Umkehrung der Strahlensätze?

Man kann versuchen, „Umkehrungen“ der Strahlensätze zu formulieren, d.h. Sätze der Art

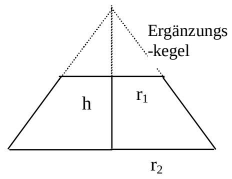
Schneiden zwei Geraden g und h zwei von einem Punkt Z ausgehende Strahlen in den Punkten P und Q bzw. P´ und Q´ und gilt für die Streckenverhältnisse ...., dann sind die Geraden g und h parallel.

Geben Sie für die beiden Strahlensätze jeweils die fehlenden Satzteile an und prüfen Sie, ob der entsprechende Satz gilt.

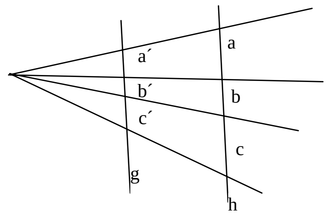
Anwendungen der Strahlensätze (Beispiele)

- Berechnung von unzugänglichen Längen durch Messung von zugänglichen Längen.
  Vergleich Körpergröße/Körperschatten und unbekannte Baumhöhe/meßbarer Baumschatten.

- Berechnungen an Körpern, etwa bei Berechnungen an Pyramiden- und Kegelstümpfen:
  Berechne die Höhe des Ergänzungskegels.



- Definition der Winkelfunktionen; z.B. sin 30° ist das Verhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse eines Winkels von 30° in einem rechtwinkligen Dreieck, unabhängig von der Größe der Hypotenuse.
- Was kann man in der folgenden Zeichnung über a, b, c, und a´, b´, c´ sagen, wenn g und h parallel sind?



5.3.9 Ähnliche Figuren (9.Schuljahr, Wahlgebiet)

Der Begriff der Ähnlichkeit präzisiert die intuitive Vorstellung von „hat gleiche Form wie“.

> **Definition:**
>
> Zwei Figuren sind ähnlich, wenn sie durch eine zentrische Streckung und eine anschließende Kongruenzabbildung ineinander überführt werden können.

Aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung ergibt sich sofort:

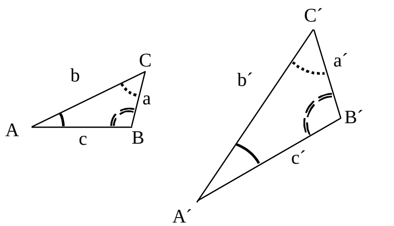
> **Eigenschaften von ähnlichen Figuren:**
>
> In ähnlichen Figuren
> - sind einander entsprechende Winkel gleich groß,
> - haben einander entsprechende Seiten das gleiche Längenverhältnis.

Diese Eigenschaften können auch als Definition von Ähnlichkeit benutzt werden (d.h. sie sind äquivalent zur oben gegebenen Definition von Ähnlichkeit). Tatsächlich bietet sich dieses Vorgehen für die Schule eher an, da mehr an die Anschauung als auf abstrakte Begriffe Bezug genommen wird.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

- Sind die Verhältnisse aller drei Seiten gleich, dann sind die Dreiecke ähnlich.

  $$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \quad \text{oder} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} \quad , \quad \frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$



- Sind zwei Winkel gleich, dann sind die Dreiecke ähnlich.

Aufgabe:
Aus welchen Kongruenzsätzen entstehen diese Ähnlichkeitssätze? Wie gewinnt man sie aus den entsprechenden Kongruenzsätzen?
Gibt es noch weitere Ähnlichkeitssätze? Wie lauten sie?

Beweis der Ähnlichkeitssätze ohne Verwendung der zentrischen Streckung:
Für rationale Streckenverhältnisse fast gleiche Figur wie für den Beweis der Strahlensätze ohne Verwendung der zentrischen Streckung.

Anwendungen der Ähnlichkeitssätze, Strahlensätze und zentrischen Streckung

Alle drei Methoden haben grundsätzlich die gleichen Anwendungsgebiete. Strahlensätze[16] oder zentrische Streckung sind etwas fehleranfälliger, da dort darauf geachtet werden muss, die Streckenabschnitte vom Zentrum aus zu rechnen, wenn Abschnitte auf den schneidenden Parallelen beteiligt sind (2.Strahlensatz). Ein weiteres Problem stellt die Verwechslung von „Verlängerung **auf** das k-fache“ und „Verlängerung **um** das k-fache“ , d.h. bei Streckfaktor $\frac{3}{2}$ nur Verlängerung einer Strecke **um** $\frac{1}{2}$.

Zunächst arbeitet man nur in der Ebene, bei der Körperberechnung muss aber die zentrische Streckung im Raum durchgeführt werden bzw. in räumlichen Körpern ebene zentrische Streckungen identifiziert werden (Beispiel Ergänzungspyramide beim Pyramidenstumpf).

DIN-Formate unseres Papiers: Alle DIN-A-Formate sind zueinander ähnlich, d.h. wenn man einen DIN-A3-Bogen halbiert ist das entstehende Rechteck zum Ausgangsbogen ähnlich.

Aufgabe:

Zeigen Sie, dass aus dieser Eigenschaft folgt, dass das Verhältnis von Länge zu Breite bei einem DIN-Bogen $\sqrt{2}$.
Daraus erklärt sich das „krumme“ Maß 29,7 cm auf 21 cm bei einem DIN-A-4 Blatt.

[16] In US-amerikanischen Lehrbüchern gibt es keine Strahlensätze, man arbeitet nur mit zentrischen Streckungen und Ähnlichkeit.

5.3.10 Satzgruppe des Pythagoras (9.Schuljahr)

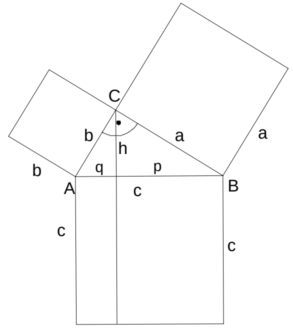
Zu kaum einem Satz gibt es so viele verschiedene Beweise und Veranschaulichungen wie zum Satz des Pythagoras. Hier werden einige exemplarisch angegeben.

Zur Satzgruppe des Pythagoras gehören die folgenden drei Sätze (hier nur mit Variablen in Bezug auf die Skizze formuliert):

Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

Kathetensatz (Satz des Euklid) $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$

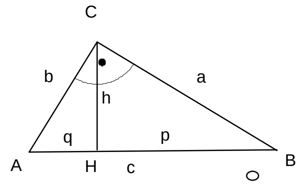
Höhensatz $h^2 = p \cdot q$



Beweis aller drei Sätze mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

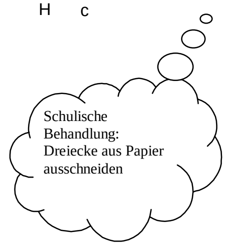
Im nebenstehenden Dreieck identifiziert man leicht drei zueinander ähnliche Dreiecke:

Δ ABC ~ Δ CBH ~ Δ ACH

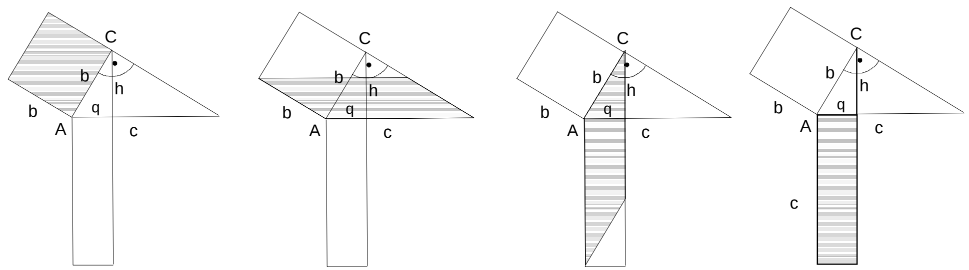


Mit diesen Dreiecken kann man viele Verhältnisgleichungen für entsprechende Seiten aufstellen. Sucht man nur diejenigen heraus, in denen nur 3 verschiedene Stücke vorkommen, so erhält man durch Umformen leicht den Kathetensatz und den Höhensatz. Der Satz des Pythagoras folgt unmittelbar aus den beiden Formen des Kathetensatzes durch Addition..

Kathetensatz:	c:a = a:p	$\Rightarrow$	$a^2 = c \cdot p$
	c:b = b:q	$\Rightarrow$	$b^2 = c \cdot q$
Höhensatz:	h:p = q:h	$\Rightarrow$	$h^2 = p \cdot q$
Pythagoras:	$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c\,(p+q) = c^2$		



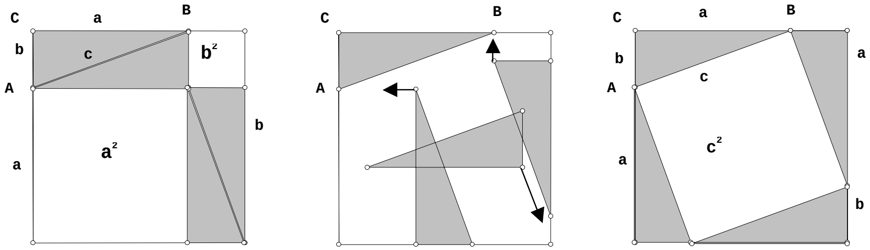
Kathetensatz mit Hilfe einer Scherung



Ein Ergänzungsbeweis.

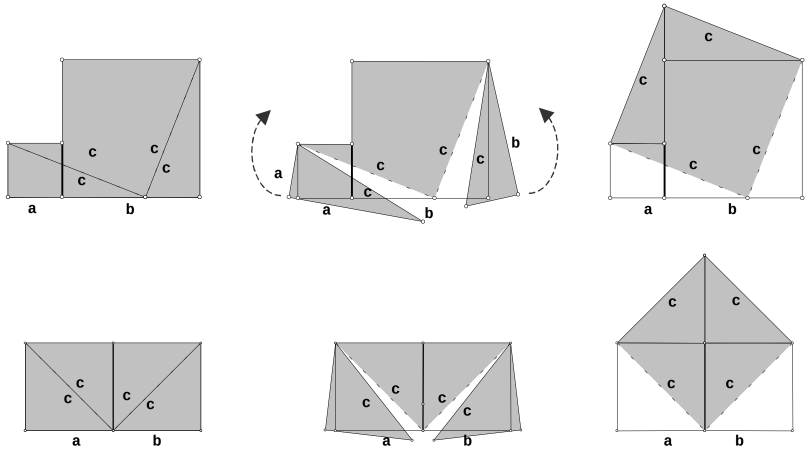
Die Konstruktion kann mit Papier oder Folien von Schülern nachvollzogen werden.
Die letzte Konfiguration alleine kann benutzt werden, um den Satz über das Problem einer Flächenberechnung algebraisch herzuleiten:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}ab = a^2+2ab+b^2-2ab = a^2+b^2$$



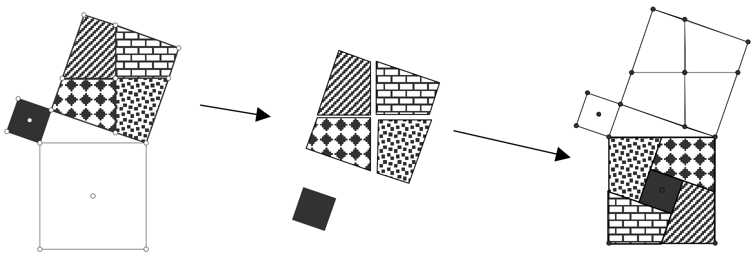
Ein Zerlegungsbeweis.

Die Konstruktion kann wieder mit Papier oder Folien von Schülern nachvollzogen werden.
Sind die beiden Ausgangsquadrate gleich groß (d.h. a=b), dann ist diese Figur gerade die viel einfachere Figur zur Verdopplung eines Quadrates aus Platos Dialog „Menon“, mit deren Hilfe eventuell die Wurzel aus 2 eingeführt werden kann.



Noch ein Zerlegungsbeweis: Schaufelradbeweis

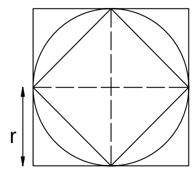
Auch diese Konstruktion kann mit Papier von Schülern nachvollzogen werden, ist aber ohne Angabe der Schnittlinien nicht ganz einfach.



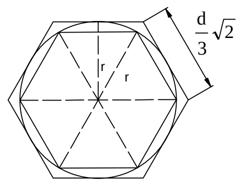
5.3.11 Der Kreis (9.Schuljahr)

Wesentlicher Punkt ist die Einführung, Abschätzung und eventuell auch näherungsweise Berechnung der Kreiszahl π. Prinzipiell kann dies sowohl über den Kreisumfang als auch über den Flächeninhalt des Kreises geschehen. Meist wählt man den Zugang über den Kreisumfang, da dieser Zugang begrifflich einfacher scheint: Es ist eher einzusehen, dass für alle Kreise das Verhältnis Umfang/Durchmesser eine Konstante ist als das Verhältnis Flächeninhalt/Durchmesser^2. Beides gilt, da alle Kreise zueinander ähnlich sind.

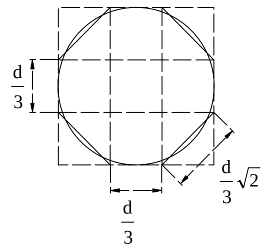
5.3.11.1 Abschätzungen



$$4\sqrt{2}\,r < U_O < 8\,r$$
$$2{,}8\,d < U_O < 4\,d$$
$$2\,r^2 < A_O < 4\,r^2$$



$$6\,r < U_O < 4\sqrt{3}\,r$$
$$3\,d < U_O < 3{,}47\,d$$
$$6\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 < A_O < 2\sqrt{3}\,r^2$$



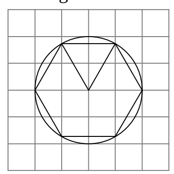
$$U_O \approx 4\frac{d}{3}(1+\sqrt{2}) \approx 3{,}22\,d$$
$$A_O \approx 7\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}4r^2 = 3{,}11\,r^2$$

Einige der Abschätzungen benötigen den Satz des Pythagoras und Rechnen mit Wurzeln.

Abschätzungen mit Hilfe des Karopapiers

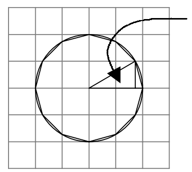
Die oben angegebenen Abschätzungen sind zwar recht genau, benötigen aber den Satz des Pythagoras. Gröbere aber einfachere Abschätzungen erhält man, wenn man Kreise im Karopapier zeichnet.
Kreise mit dem Durchmesser 2 cm kann man leicht mit Hilfe einer alten 2 Pf Münze zeichnen, die einen Durchmesser von 1,92 cm hat, mit der Dicke des Bleistiftstrichs ziemlich genau 2 cm (neue 2 Cent Münze hat nur Durchmesser von 1,875 cm).

Umfang



außen: Quadrat
innen: Sechseck
$3d < U_O < 4d$

Flächeninhalt



12-Eck-Stück:
Höhe: $\frac{r}{2}$
Grundseite: r
Flächeninhalt: $\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot r = \frac{r^2}{4}$

außen: Quadrat
innen: regelmäßiges 12-Eck
$12\cdot\frac{r^2}{4} = 3\,r^2 < A_O < 4\,r^2$

Da das 6-Eck bzw. das 12-Eck jeweils den Kreis besser annähert als das Quadrat, liegt es nahe, zu vermuten dass die gesuchte Konstante π näher bei 3 als bei 4 liegt und zudem in beiden Fällen sogar die selbe sein könnte.

Grundlage der Konstruktion: Man erhält die Ecken des regelmäßigen 12-Ecks als Schnittpunkte des Kreises mit den Linien des Karopapiers. Warum?

5.3.11.2 Experimentelle Bestimmung von π

Umfang:

Für verschiedene Kreise Umfang U und Durchmesser d messen, in Tabelle eintragen und das Verhältnis $\frac{U}{d}$ bilden. Es zeigt sich, dass $\frac{U}{d}$ konstant ist (U proportional zu d). Man nennt dieses Verhältnis π.

Flächeninhalt:

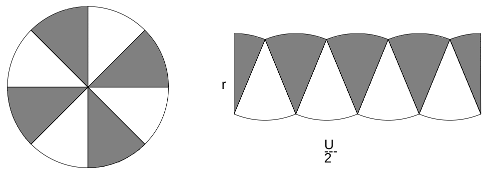
Für verschiedene Kreise auf Karopapier (auch mm-Papier) Flächeninhalt durch Auszählen von Quadraten näherungsweise bestimmen (oder auch näherungsweise bestimmen lassen wie in der letzten Abschätzung oben, die für den Flächeninhalt sehr einfach ist). In eine Tabelle eintragen und Verhältnis $\frac{A}{r^2}$ bestimmen lassen. Eine Begründung dafür, gerade dieses Verhältnis zu bilden, kann die Frage sein, womit man die Quadratfläche über dem Radius multiplizieren muss, um die Kreisfläche zu erhalten; dies kann man zunächst schätzen lassen. Es ist wiederum intuitiv klar, das dieses Verhältnis konstant ist. Es ist dagegen nicht selbstverständlich, dass dieses Verhältnis wieder dieselbe Zahl π ergibt wie beim Kreisumfang.
Als weitere Möglichkeit, den Flächeninhalt des Kreises (sogar beliebiger Flächen) experimentell zu bestimmen, bietet es sich an, die Flächenstücke aus Pappe auszuschneiden und zu wiegen und mit dem Gewicht einer Quadratfläche aus dem gleichen Material zu vergleichen.

Tiefer liegender Sachhintergrund:

Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Damit gilt $\frac{U}{d}$ konstant , $\frac{A}{r^2}$ konstant .

Genauso ist aber auch $\frac{A}{d^2}$ konstant. Es ist also keineswegs klar, dass $\frac{A}{r^2} = \pi$ ist.

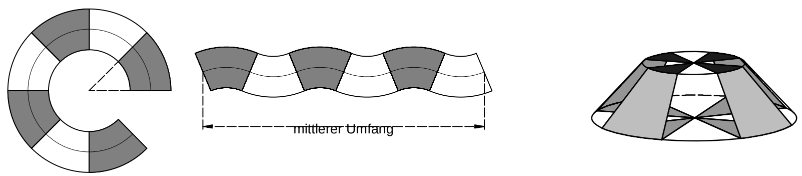
Um zu zeigen, dass $A = \pi\, r^2$ ist, oder um die Berechnung des Flächeninhaltes direkt auf die Berechnung des Umfangs zurückführen, stellt man einen Zusammenhang von Umfang eines Kreises mit seinem Flächeninhalt her („Käseeckenbeweis“):



Eine immer feinere Unterteilung des Kreises gibt den Zusammenhang $A = \frac{1}{2}\, U \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi\, r^2$.

Dabei ist π die Konstante aus der Umfangsberechnung.

Der „Käseeckenbeweis“ kann auch an anderen Stellen wieder eingesetzt werden, etwa um eine Formel für den Flächeninhalt des Mantels eines Kegels oder eines Kegelstumpfes ohne Umwege über andere Formeln herzuleiten. Statt eines Vollkreises zerschneidet man dort nur einen Kreisausschnitt bzw. einen Ausschnitt eines Kreisringes.



Für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes erhält man so die Formel

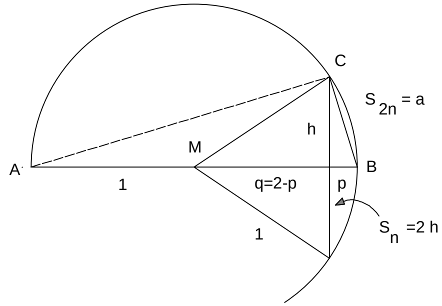
$$A = \text{mittlerer Umfang} \cdot \text{Seitenlinie} = \frac{1}{2}\,(2\, r_{Boden}\pi + 2\, r_{Deckel}\pi)\, s = (r_{Boden} + r_{Deckel}) \cdot s \cdot \pi$$

5.3.11.3 Bestimmung von π durch Näherungsverfahren

Die näherungsweise Berechnung von π kann sowohl über die Berechnung des Umfangs als auch des Flächeninhalts geschehen.

Berechnung des Umfangs.

Verfahren:
Der Radius des Kreises soll 1 Längeneinheit (LE) betragen.
Man berechnet, wie sich die Seitenlänge S_{2n} des einbeschriebenen regelmäßigen 2n-Ecks aus der Seitenlänge S_n des n-Ecks ergibt. Die Seitenlänge des einbeschriebenen 6-Ecks ist 1 LE. Damit kann man die Seitenlänge des 12-, 24, 48-Ecks berechnen. Diese Formeln können mit dem Taschenrechner oder mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms (z.B. WORKS→ ITG) ausgewertet werden, um immer genauere Werte für π zu erhalten.



Es ist dann $U_n = n \cdot S_n$, $\pi \approx \frac{U_n}{2} = \frac{n}{2} S_n$

ΔABC ist rechtwinklig (Thalessatz)

Höhensatz für ΔABC: $h^2 = (2-p)p$ (1)

Kathetensatz für ΔABC: $a^2 = 2p$ (2)

(1) nach p (<1) aufgelöst: $p = 1 - \sqrt{1-h^2}$ (3)

(3) in (2) eingesetzt: $a = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-h^2}}$
$= \sqrt{2 - \sqrt{4-4h^2}}$

Damit ist

$$\boxed{S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - {S_n}^2}} = \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^{\,2}}}}}$$

Verwendet man in dieser Formel den 1.Term, dann erhält man zunächst immer bessere Annäherungen an π, ab dem 25. Schritt werden die Näherungen aber wieder schlechter und nach Schritt 27 liefert Excel sogar den Wert 0 für π. Der Grund liegt in einer „Subtraktionskatastrophe“ beim Runden. Der äquivalente (nachrechnen!) 2.Term ist dagegen „stabil“.

Die Tabelle:

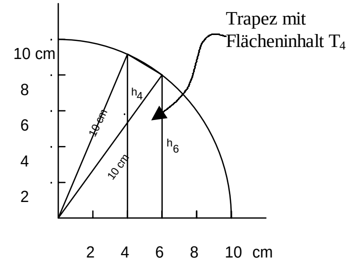
	A	B	C	D
1	n	Sn	Un	Un/2
2	6	1,000000	6,000000	3,000000
3	12	0,517638	6,211657	3,105829
4	24	0,261052	6,265257	3,132629
5	48	0,130806	6,278700	3,139350
6	96	0,065438	6,282064	3,141032
7	192	0,032723	6,282905	3,141452
8	384	0,016362	6,283115	3,141558
9	768	0,008181	6,283168	3,141584
10	1536	0,004091	6,283181	3,141590
11	3072	0,002045	6,283184	3,141592

Die eingegebenen Formeln (1.Term):

	A	B	C	D
1	n	Sn	Un	Un/2
2	6	1	=(A2*B2)	=(C2/2)
3	=(A2*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B2*B2)))	=(A3*B3)	=(C3/2)
4	=(A3*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B3*B3)))	=(A4*B4)	=(C4/2)
5	=(A4*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B4*B4)))	=(A5*B5)	=(C5/2)
6	=(A5*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B5*B5)))	=(A6*B6)	=(C6/2)
7	=(A6*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B6*B6)))	=(A7*B7)	=(C7/2)
8	=(A7*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B7*B7)))	=(A8*B8)	=(C8/2)
9	=(A8*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B8*B8)))	=(A9*B9)	=(C9/2)
10	=(A9*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B9*B9)))	=(A10*B10)	=(C10/2)
11	=(A10*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B10*B10)))	=(A11*B11)	=(C11/2)

Berechnung des Flächeninhalts.

Verfahren: Man berechnet die Kreisfläche näherungsweise mit Trapezen. Für jede Näherung muss die Berechnung neu durchgeführt werden.



$h_4 = \sqrt{100-16}$, $h_6 = \sqrt{100-36}$

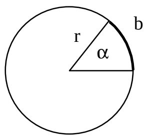
$T_4 = \frac{h_4 + h_6}{2} \cdot 2 = h_4 + h_6$

$A_{Viertelkreis} = T_0 + T_2 + T_4 + T_6 + T_8$

In Gruppenarbeit berechnen lassen.
Fehlerabschätzung ist mit dieser Methode möglich, wenn man von außen mit Rechtecken abschätzt.

5.3.11.4 Kreisteile

Kreisbogen



Kreisbogen b zum Winkel α

Inhaltliche Herleitung der Formel:
Welchen Teil des gesamten Kreisumfangs von 2πr nimmt der Bogen zum Winkel α ein? Für Winkel α=90°, 45°, 60°, 270° lässt sich das unmittelbar einsehen, der Anteil ist genau der Anteil des Winkels α am Winkel 360°. Für α=60° etwa erhält man b = $\frac{1}{6}$ 2πr. Allgemein bestimmt man diesen Anteil als $\frac{\alpha}{360°}$. Damit erhält man die Formel für die Bogenlänge

$$b = \frac{\alpha}{360°} 2\pi r = \frac{r\pi\alpha}{180°}$$

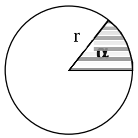
Andere Begründung: Zum Winkel 1° gehört der Bogen der Länge

$$b_{1°} = \frac{1}{360°} 2\pi r \text{ , zu } \alpha \text{ also } b_{\alpha} = \frac{\alpha}{360°} 2\pi r$$

Formale Herleitung der Formel:

$$\frac{b}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360°}$$ da offensichtlich b proportional zu α ist.

Kreisausschnitt (Sektor)



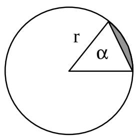
Kreisausschnitt zum Winkel α

Herleitungen wie beim Kreisbogen.

$$\frac{A_{Ausschnitt}}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{360°} \quad \text{oder mit dem Bogen } b_\alpha: \quad \frac{A_{Ausschnitt}}{b_\alpha} = \frac{\pi r^2}{2r\pi}$$

$$A_{Ausschnitt} = \frac{\alpha}{360°} \pi r^2 = \frac{1}{2} r \cdot b_\alpha$$ (erinnert an die Dreiecksfläche)

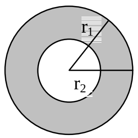
Kreisabschnitt



$$A_{Abschnitt} = A_{Ausschnitt} - A_{Dreieck}$$
$$= A_{Ausschnitt} - \frac{\sin\alpha}{2} r^2$$

Die letzte Formel ergibt sich erst mit Hilfe der Trigonometrie (10.Schuljahr).

Kreisring



Dicke des Kreisrings: $d = r_1 - r_2$

Mittlerer Radius des Kreisrings: $r_{mittel} = \frac{r_1 + r_2}{2}$

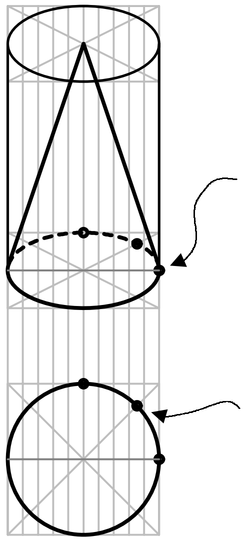
Mittlerer Umfang des Kreisrings: $U_{mittel} = 2\pi r_{mittel}$

$$A_{Kreisring} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi (r_1^2 - r_2^2) = \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$
$$= 2\pi \frac{(r_1 + r_2)}{2} \cdot d = 2\pi \ r_{mittel} \ d$$
$$= U_{mittel} \cdot d$$

Diese Formel kann man mit einem modifizierten „Käseeckenbeweis“ auch unmittelbar einsehen (siehe oben).

5.3.12 Schrägbilder von Zylinder und Kegel (9. bzw. 10.Schuljahr)

Problem: Im Schrägbild wird der Grundkreis von Zylinder und Kegel zur Ellipse.
Um dieses Problem möglichst klein zu halten, weicht man von der sonst üblichen Art der Darstellung in der Kavalierperspektive mit α=45° und k= $\frac{1}{2}$ ab und wählt statt dessen den Winkel α=90°. Das entspricht einer Sicht genau von vorne auf den Körper.
Die Ellipse ist dann ein senkrecht-affines Bild des Grundkreises.

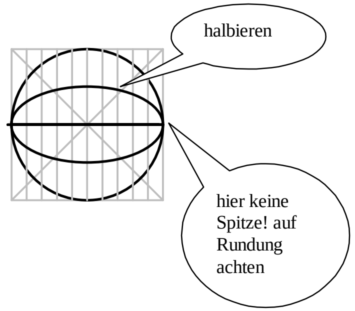


Kavalierprojektion mit α=90°, k= $\frac{1}{2}$

Kegel: Hier werden die **Tangenten** von der Spitze an die Ellipse gezeichnet, nicht die Verbindung zu den Scheiteln der Ellipse!

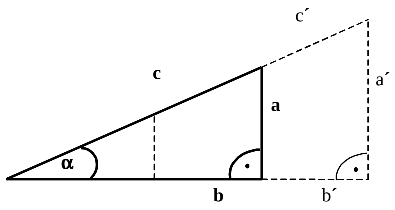
Markante Punkte übertragen. Verhältnis von halber Diagonale des Quadrates zu Radius des Kreises ist $\sqrt{2}/1 \approx 1{,}4$

...oder Ellipse durch Halbieren aller senkrechten Sehnen zeichnen.



5.3.13 Trigonometrie (10.Schuljahr)

5.3.13.1 Definition der Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck: Winkel zwischen 0° und 90°.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

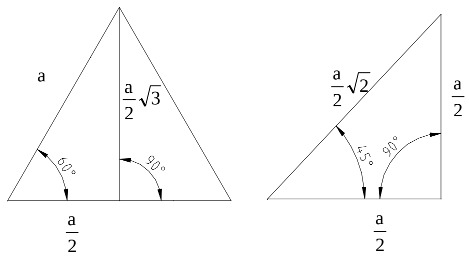
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Um zu sehen, dass diese Definitionen gerechtfertigt sind, d.h. dass die definierten Werte sin α, cos α, tan α nur von α und nicht vom speziellen rechtwinkligen Dreieck abhängen, zieht man die Strahlensätze oder die Ähnlichkeitssätze heran.

- Man erhält aus diesen Definitionen unmittelbar die exakten Werte der Winkelfunktionen für α =0°, 30°, 45°, 60°, 90°, indem man den Satz des Pythagoras auf das gleichschenklige Dreieck mit den Basiswinkeln 45° bzw. das halbe gleichseitige Dreieck mit den Winkeln 30°, 60°, 90° anwendet (Herleitung?).

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	undefiniert (∞)

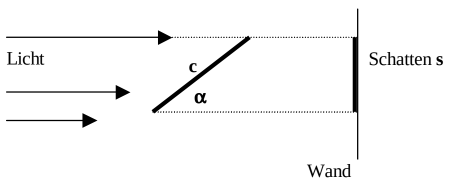


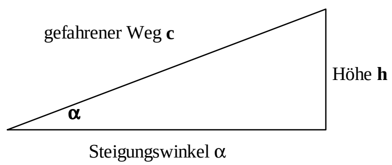
- Man liest die folgenden Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen für verschiedene Winkel ab (Zusatzstoff im LP):

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Andere Zugänge zum Sinus: Projektion oder Steigung





Schatten s ~ c
s = k·c

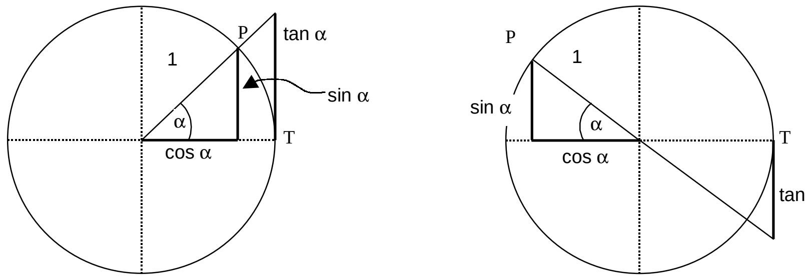
Die Proportionalitätskonstante k heißt **sin α.**
k eventuell in % angeben. Für welches α ist k=50% ?
Die Schattenlänge s ist sin α mal die wirkliche Länge c.

Höhe h ~ c
h = k·c
h = sin α · c

sin α gibt an, wieviel % des zurückgelegten Weges man in der Höhe gewinnt.
Was bedeuten in diesem Zusammenhang cos α , tan α ?

5.3.13.2 Definition der Winkelfunktionen sin, cos, tan am Einheitskreis: Winkel über 90°.

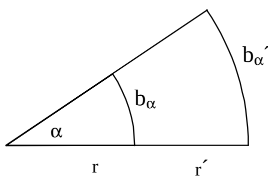
Die Definitionen der Winkelfunktionen am Einheitskreis erweitern die zuvor gegebenen Definitionen am rechtwinkligen Dreieck auf alle Winkel. Für Winkel über 360°oder negative Winkel läßt man den Punkt Hat der Radius des Kreises die Länge 1 Längeneinheit (Einheitskreis), dann geben die *Maßzahlen* der entsprechenden Strecken die Winkelfunktionen an.
Ist der zugrunde gelegte Kreis nicht der Einheitskreis, dann muss in der Definition der Winkelfunktionen das *Verhältnis* der entsprechenden Strecken und dem Radius genommen werden.



Winkel α unter 90° Winkel α zwischen 90° und 180°

sin α : Ordinate (y-Wert) des zu α gehörenden Punktes auf dem Einheitskreis.
cos α : Abszisse (x-Wert) des zu α gehörenden Punktes auf dem Einheitskreis.
tan α : Länge des Abschnitts der Kreistangente am Punkt T(1,0) bis zum „freien" Schenkel des Winkels α. Für Winkel über 90° hinaus muss dieser Schenkel „rückwärts" verlängert werden.

5.3.13.3 Bogenmaß eines Winkels (Zusatzstoff)



Für jeden Winkel α gilt: $\frac{b_\alpha'}{r'} = \frac{b_\alpha}{r}$ (Ähnlichkeit der Kreisausschnitte).
Dieses Verhältnis heißt *Bogenmaß des Winkels α.*
Ist r=1 LE, dann gilt insbesondere:
Das *Bogenmaß von α* ist die Maßzahl des zu α gehörenden Bogens b_α im Einheitskreis.

Bezeichnet man das Bogenmaß von α mit x_α dann erhält man aus $b_\alpha = 2\pi r\frac{\alpha}{360°}$ folgende Umrechnung von Gradmaß ins Bogenmaß:

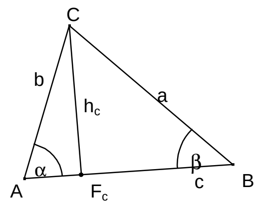
$$x_\alpha = \frac{b_\alpha}{r} = \frac{\pi}{180°}\cdot\alpha$$

5.3.13.4 Sinussatz (nicht mehr im LP seit 1994)

Aus der Definition der Sinusfunktion (insbesondere mit der Projektionsdefinition) ergibt sich unmittelbar

$$h_c = a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

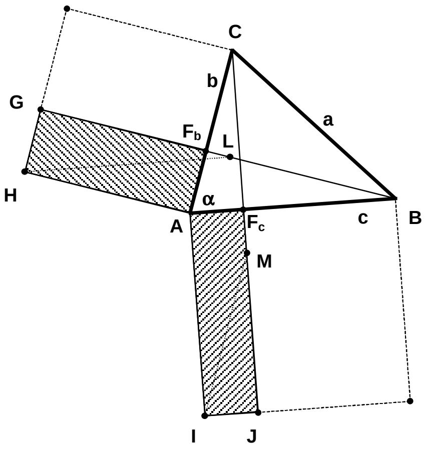
$$h_a = c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma \quad\Rightarrow\quad \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$



Zusammengefaßt erhält man den Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

5.3.13.5 **Cosinussatz** (nicht mehr im LP seit 1994)



Der Scherungsbeweis für den Kathetensatz läßt sich unmittelbar auf nicht-rechtwinklige Dreiecke verallgemeinern. In der nebenstehenden Zeichnung ergibt sich mit Scherung, anschließender Drehung und nochmaliger Scherung, dass die schraffierten Rechtecke AF_bGH und AF_cJI den gleichen Flächeninhalt besitzen. Auch rechnerisch läßt sich dies leicht verifizieren (Projektionen jeweils von c auf b und von b auf c):

$\overline{AF_b} = c \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad$ Rechteck $AF_bGH = b \cdot c \cdot \cos\alpha$

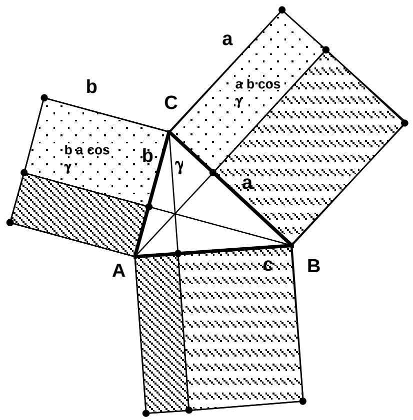
$\overline{AF_c} = b \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad$ Rechteck $AF_cJI = c \cdot b \cdot \cos\alpha$

Analog erhält man an den Ecken B und C des Dreiecks die Gleichheit entsprechend benachbart liegender Rechtecke. Die untenstehende Abbildung zeigt die Situation.

Diese Zeichnung zeigt, wie der Satz des Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke zu verallgemeinern ist:

Den Flächeninhalt des Quadrates über der Seite c erhält man aus den Flächeninhalten der Quadrate über den Seiten b und a indem man die beiden gepunkteten Rechtecke mit jeweils dem Flächeninhalt $a\cdot b\cdot\cos\gamma$ abzieht. Als Formel ausgedrückt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\cdot b\cdot\cos\gamma$$



Wenn γ=90° ist erhält man daraus sofort den Satz des Pythagoras.

Analog ergibt sich für die anderen Winkel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\cdot c\cdot\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\cdot c\cdot\cos\beta$$

Bemerkung:

Die soeben gegebenen Beweise werden wesentlich komplizierter, wenn das Dreieck stumpfwinklig ist. Für γ>90° verlaufen dann die entsprechenden Höhen außerhalb des Dreiecks, cos γ wird negativ und die gepunkteten "Korrekturflächen" erhalten negative Werte, vergrößern also damit den Ausdruck auf der rechten Seite der Formel.

Sowohl der Cosinussatz als auch der Sinussatz sind seit 1994 nicht mehr im Lehrplan der Realschule in Baden-Württemberg enthalten. Die Sätze können dazu benutzt werden, um unmittelbar die mit Hilfe der Kongruenzsätze *konstruierten* Dreiecke zu *berechnen*. Selbstverständlich können solche Berechnungen auch mittelbar mit Hilfe geeigneter Hilfslinien durchgeführt werden, wie z.B. aus dem Beweis des Sinussatzes hervorgeht. Aus diesem Grund kann auf die Sätze verzichtet werden, ohne wesentliche Inhalte zu verlieren. Die exemplarische Behandlung von Dreiecksberechnungen mit Hilfe von Winkelfunktionen an ausgewählten Beispielen ist eventuell sogar dem tieferen Verständnis zuträglicher als Berechnungen mit den „Rezepten" der beiden genannten Sätze.

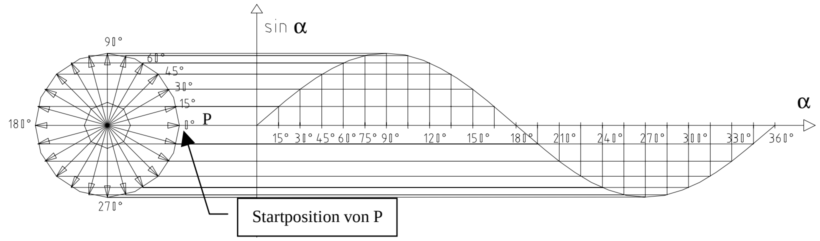
Aufgabe: Untersuchen Sie, zur Berechnung welcher Kongruenzsätze jeweils der Sinussatz und der Cosinussatz herangezogen werden können.

5.3.13.6 Die Funktionen sin, cos und tan

Trägt man die Werte der Winkelfunktionen über dem zugehörigen Winkel α auf, so erhält man die Schaubilder der Winkelfunktionen. Positiv werden dabei wie üblich die Winkel im Gegenuhrzeigersinn angesehen.
Man kann sich die Entstehung der Graphen dynamisch vorstellen, indem man geeignete Projektionen eines auf dem Einheitskreis umlaufenden Punktes P auf die y-Achse über den zugehörigen Winkeln abträgt.
Nach Lehrplan sind verbindlich nur die in der Praxis sehr bedeutsamen Funktionen mit den Gleichungen y=sin α, y=cos α und y=a·sin α zu behandeln (→ Wechselstrom, Schwingungen und Wellen) , die Tangens-Funktion ist dagegen Zusatzstzoff.

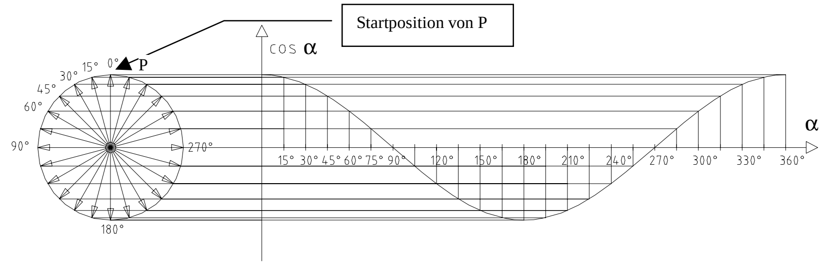
Sinusfunktion:

Man läßt den Punkt P mit Winkel α=0° von der unten gezeigten Anfangsposition „3 Uhr" starten und trägt die Projektion der Ordinate (y-Wert) des umlaufenden Punktes auf die y-Achse über α auf. Man sieht sofort, dass sich die Werte der Sinusfunktion nach jeweils 360° wiederholen, d.h. die Sinusfunktion ist periodisch mit der Periode von 360°. Für negative Winkel setzt sich der Graph entsprechend fort.
Läuft der Punkt statt auf dem Einheitskreis auf einem Kreis mit Radius a um, dann vergrößern sich alle Funktionswerte um den Faktor a und man erhält das Schaubild der Funktion mit der Funktionsgleichung y=a·sin α. a heißt in diesem Fall die Amplitude des Funktionsgraphen.



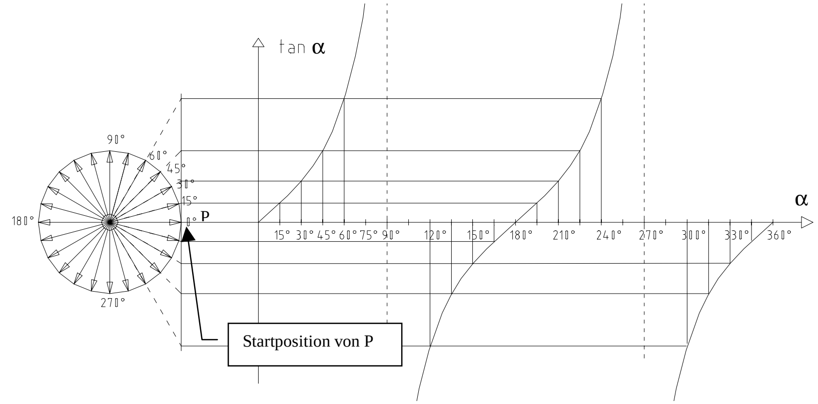
Cosinusfunktion:

Bei der Cosinusfunktion verfährt man genauso wie bei der Sinusfunktion mit dem Unterschied, dass jetzt die Startposition bei „12-Uhr" liegt. Die Periode beträgt wiederum 360°, der Graph ist gegenüber der Sinusfunktion um 90° nach links verschoben.



Tangens-Funktion:

Hier startet der Punkt P wieder an der Position „3 Uhr". Jetzt schneidet man die vom Mittelpunkt des Kreises durch P verlaufende Gerade g mit der am „3-Uhr-Punkt" an den Kreis gezeichneten Tangente und trägt diesen *Tangentenabschnitt* über dem Winkel α ab (→ Name *Tangens*). Man entnimmt dieser Konstruktion, dass sich die Funktionswerte bereits nach 180° wiederholen, die Periode der Tangensfunktion beträgt also 180°. Schneidet die Gerade g die Tangente nicht, dann ist die Tangensfunktion für diesen Winkel nicht definiert. Das ist für α=90°, α=90° usw. der Fall.

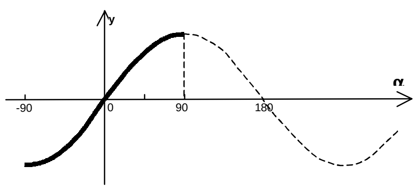


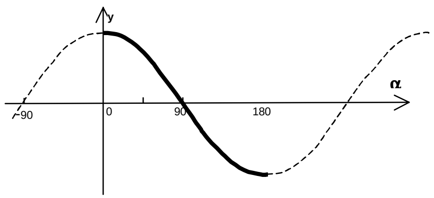
5.3.13.7 Winkelfunktionen auf Taschenrechner und Computer

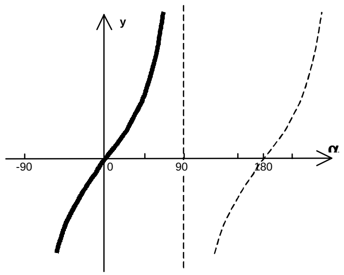
Grad- oder Bogenmaß
Man erhält zwei verschiedene Sinusfunktionen, je nachdem in welcher Einheit der Winkel α gemessen wird (welcher Wert der Zahl 30 zugeordnet wird hängt davon ab, ob man 30 ° oder 30 rad meint). Beide Funktionen sind auf Taschenrechnern im Allgemeinen verfügbar, man muss bei Anwendungen den TR mit der Taste DRG entsprechend einstellen. Auch in Anwendungsprogrammen auf dem Computer wie z.B. MS Excel oder MS Works stehen Winkelfunktionen zur Verfügung. Dort ist die Standardvorgabe die Angabe aller Winkel im Bogenmaß, will man die Angabe im Gradmaß, muss man die Winkel umrechnen.

Umkehrfunktionen
Offenbar sind die Winkelfunktionen allesamt nicht umkehrbar, da mehreren verschiedenen Winkeln z.B. der gleiche Sinuswert zugeordnet ist. Dennoch stehen die „Umkehrfunktionen“ INV-sin, INV-cos und INV-tan (oder arcsin, arccos, arctan oder $\sin^{-1}$ usw.) zur Verfügung. Diese Funktionen kehren jeweils nicht die gesamte Winkelfunktion um, sondern lediglich eine Einschränkung der Funktion auf einen geeigneten Definitionsbereich. Daher liefert etwa bei gegebenem Sinuswert y=0,5 die Funktion INV-sin nur den Wert α=30° (bei DEG-Einstellung des TR) zurück, die übrigen möglichen Werte für α muss man durch weitere Überlegungen selbst berechnen; in diesem Beispiel entnimmt man dem Schaubild der Sinusfunktion den weiteren Wert α=180°-30°=150° , und alle übrigen Werte erhält man durch Addition aller Vielfachen der Periode von 360°.

In den folgenden Schaubildern sind jeweils Funktionsgraphen fett markiert, die von den Umkehrfunktionen auf dem TR umgekehrt werden.







Die eben dargestellten Zusammenhänge können und sollen in der Realschule selbstverständlich nicht thematisiert werden. Die „Umkehrfunktionen“ der Winkelfunktionen auf dem Taschenrechner spielen nur für Winkel zwischen 0° und 180° im Zusammenhang mit geometrischen Berechnungen eine Rolle. Der TR wird intuitiv benutzt, um einen Winkel α zu bestimmen, wenn man den Sinuswert kennt (etwa als Verhältnis zweier Streckenlängen in einer geometrischen Figur). Man beschränkt sich dabei zunächst auf Winkel zwischen 0° und 90° und bestimmt größere Winkel gegebenenfalls durch Zusammensetzen.

5.3.14 Räumliche Geometrie

Im 4.Schuljahr wird der Rauminhalt als Größe mit den Einheiten Liter (l) und Milliliter (ml) erstmals eingeführt. Rauminhalte werden dabei durch Füllen mit Flüssigkeiten verglichen. Dieser so gebildete Begriff bleibt auch in der Sekundarstufe I erhalten, das experimentelle Vergleichen von Rauminhalten durch Umfüllen ist auch auf dieser Stufe noch ein akzeptiertes Verfahren. Im 6. Schuljahr wird dann das Volumen von Würfeln als Maßeinheit cm^3, dm^3, m^3 eingeführt. Hinzu treten jetzt Berechnungen durch Zerlegen räumlicher Körper in einfachere, deren Rauminhalt schon bekannt ist sowie Abschätzungen des Rauminhalts eines Körpers mit Hilfe bekannter Körper, die in ersterem enthalten sind oder ihn umfassen.
Selbstverständlich können nur die beiden letztgenannten Verfahren in der strengen Mathematik Bestand haben. Durch Umfüllen kann man zwar experimentell überprüfen, dass etwa das Volumen eines Kegels ein Drittel des Volumens eines gleich hohen Zylinders mit derselben Grundfläche beträgt, ein mathematischer Beweis läßt sich daraus aber nicht machen. Bei der Behandlung der Kugel und der Pyramide weicht das schulische Vorgehen sehr stark von dem strengen mathematischen Vorgehen ab, das Experiment und Plausibilitätsbetrachtungen stehen im Vordergrund. Beim Kegel dagegen nähert man sich wieder der strengen Behandlung, indem der Kegel als Grenzkörper einer Folge von Pyramiden aufgefaßt wird, analog zum Kreis als Grenzfigur von regelmäßigen n-Ecken („Unendlich-Eck“).

5.3.14.1 Strenge Begriffsbildungen und Methoden

- Rauminhalt von Würfeln als Maßeinheit

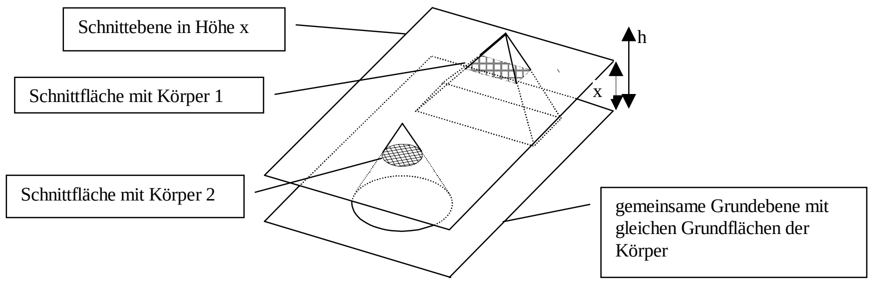
- Zerlegung von Körpern in Würfel

- Zerlegen von Körpern bekannten Rauminhalts in kongruente Körper (z.B. Zerlegung eines Quaders in 2 kongruente Dreiecksprismen oder Zerlegung eines Würfels in 6 kongruente Pyramiden)

- **Rauminhalt** von beliebigen Körpern **als Grenzwert** von geeigneten, aus Würfeln zusammengesetzten Körpern.
  Dabei werden die zu messenden Körper von innen und von außen durch solche einfachen, aus Würfeln zusammengesetzten Körpern angenähert → Rauminhalt durch Intervallschachtelung definiert. So wird in exakter Weise das Volumen von Körpern definiert, deren Volumen nicht durch simple Zerlegungen auf einfacherer Körper zurückgeführt werden kann.

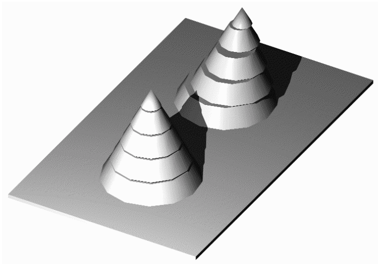
Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Volumenberechnung ist der sogenannte Satz von Cavalieri.

Satz von Cavalieri
Zwei Körper, die zwischen zwei parallelen Ebenen liegen und deren Querschnittsflächen in jeder zu diesen Ebenen parallelen Ebene den gleichen Flächeninhalt haben, haben gleiches Volumen.



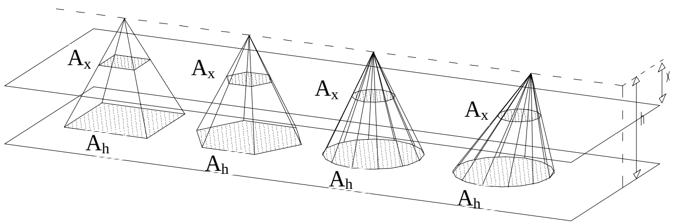
Zur Beweis*idee* des Satzes:
Denkt man sich statt einer Schnitt-Ebene eine dünne Schnitt-Schicht einer Dicke d, dann schneidet diese Schicht aus dem Kegel einen flachen Zylinderstumpf (für kleines d näherungsweise ein Zylinder) und aus der Pyramide einen flachen Pyramidenstumpf (für kleines d näherungsweise ein Quader) aus. Diese Schnitt-Körper haben näherungsweise den gleichen Rauminhalt (warum ?). Die beiden Ausgangskörper kann man sich jeweils als Summe solcher dünnen Schnittkörper vorstellen.
Diese kurze Skizze stellt nur eine Plausibilitätsbetrachtung dar, die so in der SI ebenfalls mit Hilfe geeigneter Veranschaulichungsmittel (Modelle, verschobene Bücherstapel) nachvollzogen werden kann. Ein mathematisch exakter Beweis muss auf die Definition des Volumens als Grenzwert zurückgreifen.

Das folgende Bild möge die Idee nochmals an einem einfachen Beispiel verdeutlichen: Eine Kegel wird parallel zur Grundfläche in Scheiben geschnittenen und die Scheiben dann zu einem „irgendwie schiefen“ Körper verschoben. Dabei ändert sich das Volumen offensichtlich nicht, und die Schnittflächen des Kegels und des schiefen Körpers haben in jeder Höhe den gleichen Flächeninhalt.



Anwendung des Satzes von Cavalieri:

- **Pyramiden und Kegel mit gleich großen Grundflächen und gleicher Höhe haben gleichen Rauminhalt.**



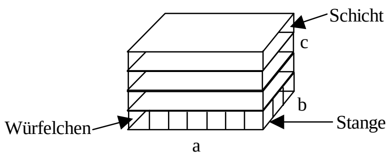
Die Grundfläche einer Pyramide oder eines Kegels sei A_h , die Schnittfläche mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene im Abstand x von der Spitze sei A_x. A_x entsteht aus A_h durch zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{x}{h}$.

Nach dem Satz über den Flächeninhalt bei einer zentrischen Streckung folgt $\frac{A_x}{A_h} = \frac{x^2}{h^2}$ und damit $A_x = \frac{x^2}{h^2} \cdot A_h$. Sind alle Flächen A_h gleich groß, dann auch alle Flächen A_x und die Voraussetzung des Satzes von Cavalieri ist erfüllt.

5.3.14.2 Herleitung der Formeln für den Rauminhalt und die Oberfläche für bestimmte Körper

Quader (5.Schuljahr)

Die Formel V=a·b·c für das Volumen des Quaders mit den Kantenlängen a, b c erhält man durch Ausfüllen des Quaders mit geeigneten Würfelchen. Im 5. Schuljahr kommen als Maßzahlen von Kantenlängen nur natürliche Zahlen vor. Damit gibt es immer geeignete Würfelchen. Die Würfelchen werden dann systematisch gezählt: „a Würfelchen in einer *Stange*, b Stangen in einer *Schicht*, c Schichten im Quader, also a·b·c Würfelchen im Quader.

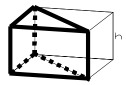


Trotz dieses so einfach erscheinenden Vorgehens gibt es streng mathematisch ein schwieriges Problem: Für nicht kommensurable Kantenlängen, wenn etwa die Grundfläche ein Quadrat mit a=b=1 cm ist und c die Länge der Diagonale dieses Quadrates, gibt es keine geeigneten Würfelchen gleicher Größe, mit denen sich der Quader ausfüllen läßt. Schon hier zeigt sich, wie schwierig es ist, den Volumenbegriff exakt zu fassen. Probleme dieser Art spielen aber im allgemeinen für die Schule keinerlei Rolle und sollen auch nicht thematisiert werden. Auch bei den folgenden Herleitungen sollen derartige Fragen nicht weiter beachtet werden.

Prisma (8.Schuljahr)

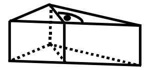
Man beginnt damit, einen Quader in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecksprismen zu zerlegen und erhält dafür die Berechnungsformel

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} V_{Quader} = \frac{1}{2} G_{Quader} \cdot h = G_{Prisma} \cdot h$$

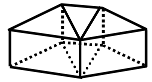


Eigentlich müsste man natürlich von einem beliebigen rechtwinkligen Dreiecksprisma *ausgehen* und zeigen, dass sich zwei solche Dreiecksprismen zu einem Quader zusammenfügen lassen. Solche Genauigkeit ist für die Realschule aber nicht nötig. Weiter sieht man

- jedes Dreiecksprisma lässt sich in zwei rechtwinklige Dreiecksprismen zerlegen,



- jedes beliebige Prisma lässt sich in mehrere Dreiecksprismen zerlegen, indem man die Grundfläche in geeignete Dreiecke zerlegt.



Dies ergibt wie oben den Nachweis für die allgemeine Gültigkeit der Volumenformel

$$V_{Prisma} = G_{Prisma} \cdot h$$

Zylinder (9.Schuljahr)

Nähert man den Grundkreis eines Zylinders durch Vielecke an, so erhält man eine Annäherung des Zylinders durch Prismen und damit ergibt sich durch Grenzübergang die entsprechende Volumenformel $V_{Zylinder} = G_{Zylinder} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$. Für den rechteckigen Zylindermantel ergibt sich $M = U_{Grundkreis} \cdot h = 2\pi r h$

Pyramide und Kegel (10.Schuljahr)

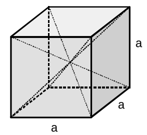
Volumen der Pyramide

Die Formel $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ für das Volumen von Pyramide und Kegel erhält man zunächst für einfache Spezialfälle. Der Nachweis hierfür kann in der Schule leicht geführt werden.

<u>**Spezialfälle**</u>:

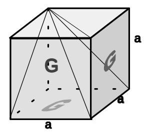
Zerlegen eines Würfels in 6 kongruente quadratische Pyramiden

$$V_{Pyr} = \frac{1}{6} V_{Würfel} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} a^2 = \frac{1}{3} \cdot h_{Pyr} \cdot G_{Pyr}$$



Zerlegen eines Würfels in 3 kongruente quadratische Pyramiden

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} V_{Würfel} = \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} a \cdot a^2 = \frac{1}{3} \cdot h_{Pyr} \cdot G_{Pyr}$$

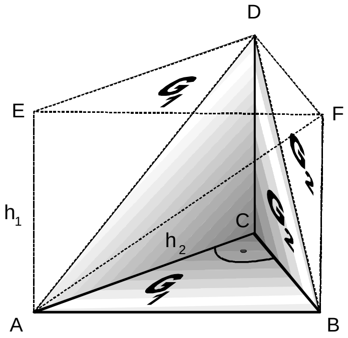


Für diese beiden Zerlegung können von Schülern leicht Papiermodelle hergestellt werden. Durch weiteres Zerlegen der quadratischen Pyramiden in kongruente Dreieckspyramiden kann man auch für diese Spezialfälle die Gültigkeit der Volumenformel bestätigen. Umfüllversuche mit beliebigen Pyramiden (bzw. Kegeln) und den zugehörigen Prismen (bzw. Zylindern) sollten in der Realschule als Begründung für die allgemeine Gültigkeit der Formel ausreichen.

<u>**Allgemeiner Fall**</u>:

Wegen der Folgerung aus dem Satz des Cavalieri (Seite 82) genügt es, die Gültigkeit der Volumenformel für Dreieckspyramiden mit beliebiger Höhe, rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche und Spitze über dem Scheitel des rechten Winkels der Grundfläche nachzuweisen (warum?).

Man geht aus von der schraffierten Dreieckspyramide ABCD, deren Grundfläche ABC bei C einen rechten Winkel aufweist. Der Punkt D soll senkrecht über C liegen.
Man ergänzt die Pyramide ABCD durch zwei weitere Pyramiden DEFA und BDFA zu einem senkrechten Dreiecksprisma ABCDEF (s.Skizze).



Behauptung:
Alle drei Dreieckspyramiden haben das gleiche Volumen.
Beweis:
ABCD und DEFA haben die zueinander kongruenten Grundflächen G_1 und die gleiche Höhe h_1 und damit nach dem Satz von Cavalieri das gleiche Volumen.
Ebenso haben ABCD und BDFA die zueinander kongruenten Grundflächen G_2 und die gleiche Höhe h_2 .

Daraus erhält man

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}V_{Prisma} = \frac{1}{3}\cdot h_1 \cdot G_1 = \frac{1}{3}\cdot h_{Pyr} \cdot G_{Pyr}$$

Bemerkung 1:
Der eben geführte Beweis läßt sich auch für ganz beliebige Dreieckspyramiden führen, die vorkommenden Höhen der Teilpyramiden fallen dann aber nicht mehr mit Kanten im (schrägen) Prisma zusammen. Machen Sie eine Skizze für diesen Fall und führen sie den Beweis durch. Für diesen Beweis stehen fertige Demonstrationsmodelle zur Verfügung (math. Sammlung der PH).

Bemerkung 2:
Man kann die allgemeine Volumenformel auch auf andere Weise aus den Spezialfällen zu gewinnen. Man benutzt dazu den folgenden Satz:
Wird ein Körper in *eine* Raumrichtung (z.B. Richtung einer Koordinatenachse) mit dem Faktor k gestreckt oder gestaucht, dann verändert sich auch sein Volumen mit dem Faktor k.
So kann man jede beliebige Dreieckspyramide aus einer speziellen Dreieckspyramide mit rechtwinkliger Grundfläche erhalten, indem man die Grundfläche schert (Flächeninhalt bleibt gleich) und die Höhe mit Faktor k streckt (Volumen wird mit k multipliziert).

Da man einen Kegel als Grenzkörper von Vieleckspyramiden auffassen kann, deren Grundflächen den Grundkreis annähern und die die gleiche Höhe wie der Kegel haben, folgt die Gültigkeit der Volumenformel auch für Kegel.

Mantel und Oberfläche der Pyramide

Der Mantel einer Pyramide ist die Summe der Flächeninhalte ihrer dreieckigen Seitenflächen. Für regelmäßige Pyramiden kann man die Formel für die Berechnung des Mantels vereinfachen.

Allgemein:

$$M = \frac{1}{2}a_1 h_{a_1} + \frac{1}{2}a_2 h_{a_2} + ... + \frac{1}{2}a_n h_{a_n}$$

Regelmäßige Pyramide:

$$M = \frac{1}{2}a\cdot h_s + \frac{1}{2}a\cdot h_s + ... + \frac{1}{2}a\cdot h_s$$

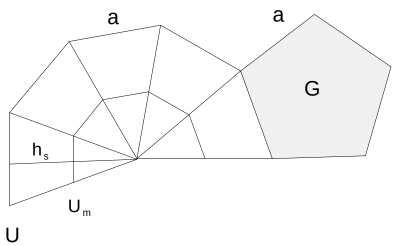
$$= \frac{1}{2}h_s(a+a+...+a) = \frac{1}{2}h_s\cdot U$$

$$= h_s \cdot U_m$$

$$M = \frac{1}{2}h_s \cdot U$$

$$= h_s \cdot U_m$$

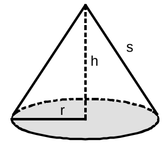
$$O = M + G$$

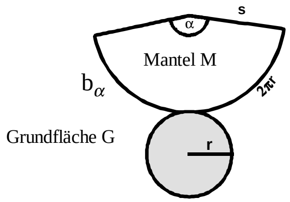


Dabei ist
U der Umfang der Grundfläche
U_m der mittlere Umfang der Pyramide
h_s die Seitenhöhe der Pyramide.

Mantel und Oberfläche des Kegels

$G = \pi \cdot r^2$	Kreisfläche
$M = \pi \cdot r \cdot s$	Kreisausschnitt mit Radius s $\frac{A_{Aus}}{b_\alpha} = \frac{\pi \cdot s^2}{2\pi s} \Rightarrow A_{Aus} = \frac{1}{2}s\cdot b_\alpha$. Mit $b_\alpha = 2r\pi$ folgt $A_{Aus} = \pi \cdot r \cdot s$
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$	
$h = \sqrt{s^2 - r^2}$	
$V = \frac{1}{3}G\cdot h$	Zurückgeführt auf das Pyramidenvolumen für regelmäßige n-Eck-Pyramiden
$\alpha = \frac{r}{s}\cdot 360°$	$\frac{\alpha}{360°} = \frac{b_\alpha}{2\pi s} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$





Pyramidenstumpf und Kegelstumpf

Volumen des Pyramidenstumpfes

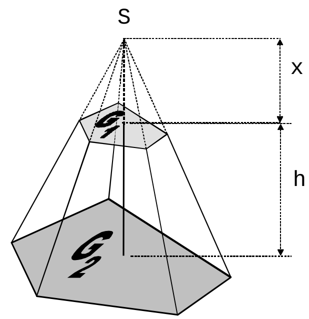
G_2 ist Bild von G_1 unter der zentrischen Streckung mit Zentrum S und Faktor $k = \frac{x+h}{x}$. Durch Umstellen ergibt sich

$x = \frac{h}{k-1}$. Für die Abbildung von Flächen durch zentrische Streckungen gilt

$$k^2 = \frac{G_2}{G_1} \quad \text{und damit} \quad k = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}} .$$

Damit ist

$$x = \frac{h}{\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}} - 1} = h\cdot\frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} .$$



$$V_{Stumpf} = \frac{1}{3}G_2(x+h) - \frac{1}{3}G_1\cdot x = \frac{1}{3}(G_2 - G_1)x + \frac{1}{3}G_2\cdot h$$

$$= \frac{1}{3}h\left(\frac{(G_2 - G_1)\sqrt{G1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + G_2\right) = \frac{1}{3}h\left(\left(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}\right)\sqrt{G_1} + G_2\right)$$

Daraus erhält man schließlich

$$\boxed{V_{Pyramidenstumpf} = \frac{1}{3}h\left(G_1 + \sqrt{G_1}\sqrt{G_2} + G_2\right)}$$

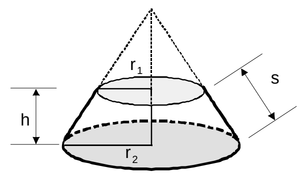
Volumen des Kegelstumpfes

Faßt man den Kegelstumpf wieder als Grenzkörper von Pyramidenstümpfen auf, dann erhält man mit

$$G_1 = \pi r_1^2 \quad \text{und} \quad G_2 = \pi r_2^2$$

aus der entsprechenden Formel für Pyramidenstümpfe

$$\boxed{V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2\right)}$$



Mantel und Oberfläche des Pyramidenstumpfes

Für einen beliebigen Pyramidenstumpf besteht der Mantel aus Trapezen, deren Flächeninhalte zu summieren sind. Ist der Pyramidenstumpf regelmäßig mit den Seitenlängen a_2 und a_1 für Grund- und Deckfläche und den Seitenhöhen h_s, dann hat jedes Trapez den Flächeninhalt

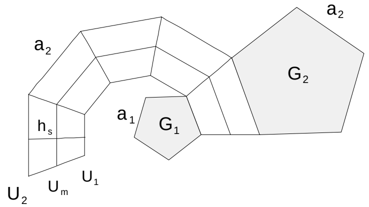
$$A_{Trapez} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \cdot h_s$$

Summiert man alle Trapeze auf, dann erhält man

$$M_{Pyramidenstumpf} = \frac{1}{2} h_s (U_1 + U_2) = h_s U_m \,.$$

Für die Oberfläche ergibt sich

$$O_{Pyramidenstumpf} = M_{Pyramidenstumpf} + G_1 + G_2$$



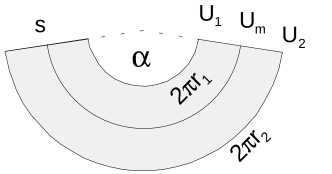
Mantel und Oberfläche des Kegelstumpfes

Aus der Flächenformel für den Mantel eines Pyramidenstumpfes erhält man die schon früher mit dem „Käseeckenbeweis" gewonnene Flächenformel für den Mantel des Kegelstumpfes, wenn der Kegelstumpf als Grenzkörper von regelmäßigen Pyramidenstümpfen betrachtet wird. Der äußere Umfang U_2 (Grundflächenumfang) wird zu $2\pi r_2$, der innere Umfang U_1 (Deckflächenumfang) zu $2\pi r_1$ und der mittlere Umfang U_m zu $\frac{1}{2}(U_1 + U_2) = \pi(r_1 + r_2)$. Die Seitenhöhe h_s wird zur Seitenlinie s.

So ergibt sich

$$M_{Kegelstumpf} = \pi \cdot s(r_1 + r_2) \,.$$

$$O_{Kegelstumpf} = M_{Kegelstumpf} + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$



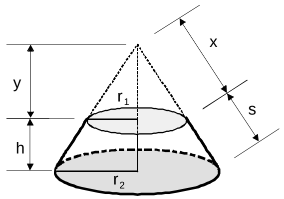
Direkte Herleitung der Formeln für Volumen und Mantel des Kegelstumpfes

Man kann die Berechnungsformeln für Kegelstümpfe auch ohne Umweg über Pyramidenstümpfe und Grenzprozesse herleiten.

Gemäß nebenstehender Skizze erhält man mit Hilfe der Strahlensätze

$$\frac{y+h}{y} = \frac{r_2}{r_1} \;\Rightarrow\; y + h = \frac{r_2}{r_1} y \;\Rightarrow\; y = \frac{h \cdot r_1}{r_2 - r_1} \;\Rightarrow\; h + y = \frac{h \cdot r_2}{r_2 - r_1} \,.$$

Das Volumen des Kegelstumpfes ist die Differenz des Volumens zweier Kegel mit den Höhen y+h und y und den Grundkreisradien r_2 und r_1.
Man erhält



$$V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi\left(r_2^2(h+y) - r_1^2 y\right) = \frac{1}{3}\pi h \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} = \frac{1}{3}\pi h (r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)$$

Ebenso erhält man mit Hilfe der Strahlensätze

$$\frac{x+s}{x} = \frac{r_2}{r_1} \;\Rightarrow\; x + s = \frac{r_2}{r_1} x \;\Rightarrow\; x = \frac{s \cdot r_1}{r_2 - r_1} \;\Rightarrow\; s + x = \frac{s \cdot r_2}{r_2 - r_1} \,.$$

Der Mantel des Kegelstumpfes ist ein Ausschnitt eines Kreisringes, dessen Flächeninhalt sich als Differenz des Inhalts der Mäntel zweier Kegel mit den Seitenlinien x+s und x und den Grundkreisradien r_2 und r_1 ergibt.
Man erhält

$$M_{Kegelstumpf} = \pi r_2 (s + x) - \pi r_1 x = \pi \cdot s\left(\frac{r_2^2}{r_2 - r_1} - \frac{r_1^2}{r_2 - r_1}\right) = \pi \cdot s(r_2 + r_1) \,.$$

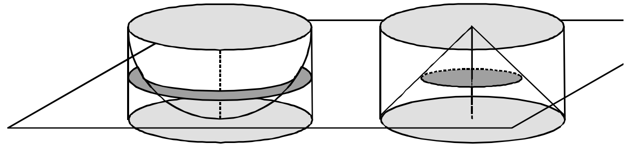
Kugel (9.Schuljahr)

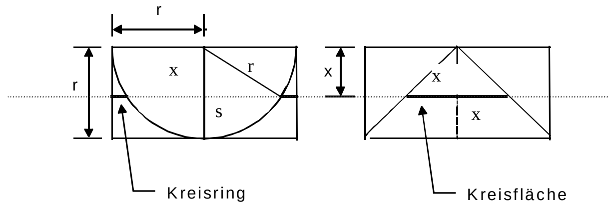
Volumen

Einem Zylinder Z mit Grundkreisradius r und Höhe r werden eine Halbkugel H und ein Kegel K einbeschrieben (Skizze).
Man zeigt:

Der Kegel K und der Restkörper R, der entsteht, wenn man aus dem Zylinder die Halbkugel herausschneidet, haben das gleiche Volumen.

Wegen des Satzes von Cavalieri genügt es zu zeigen, dass die beiden Körper K und R in jeder zur Grundebene parallelen Ebene Schnittfiguren mit gleichem Flächeninhalt haben.





Damit erhält man

$$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel}$$
$$= \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

Schnittfigur mit R: Kreisring

$$A_{Kreisring} = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot s^2$$
$$= \pi \cdot r^2 - \pi(r^2 - x^2)$$
$$= \pi \cdot x^2$$

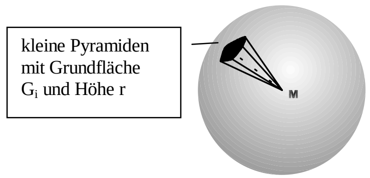
Schnittfigur mit K: Kreisfläche

$$A_{Kreifläche} = \pi \cdot x^2$$

$$\boxed{V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Oberfläche

Man kann eine Kugel annähern durch die Summe vieler kleiner Pyramiden mit Spitze im Kugelmittelpunkt und Grundfläche an der Kugeloberfläche. Die Oberfläche der Kugel ist dann näherungsweise gleich der Summe der Grundflächen der Pyramiden und das Volumen der Kugel gleich der Summe der Pyramidenvolumen.



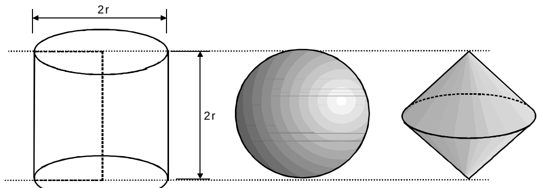
$$V_{Kugel} = \frac{1}{3} G_1 \cdot r + \frac{1}{3} G_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{3} G_n \cdot r = \frac{1}{3} r \cdot (G_1 + G_2 + \ldots + G_n) = \frac{1}{3} r \cdot O_{Kugel} \quad \Rightarrow \quad O_{Kugel} = \frac{3}{r} \cdot V_{Kugel} = 4\pi r^2$$

$$\boxed{O_{Kugel} = 4\pi r^2}$$

Abschätzungen und Vergleiche mit anderen Körpern

Volumen

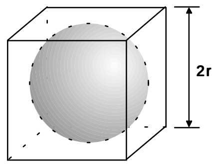
Tauchversuche (oder Umfüllversuche) können den nebenstehenden Zusammenhang zeigen.
Die exakte Begründung hierfür findet sich weiter oben bei der Herleitung der Volumenformel für die Kugel.
Kennt man die Volumenformel für die Kugel (9.Schuljahr) und den Kegel (10.Schuljahr) schon, kann man diesen Zusammenhang nachprüfen. Der Vergleich kann zur Festigung der Vorstellung nützlich sein.



1 Einheit $\frac{2}{3}$ Einheiten $\frac{1}{3}$ Einheit

Vergleich mit dem Volumen eines umbeschriebenen Würfels

$V_{\text{Würfel}} = 8r^3$ $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4r^3$



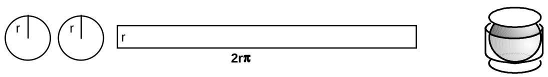
$\Rightarrow$ Das Kugelvolumen ist ungefähr die Hälfte des Volumens des umfassenden Würfels

Oberfläche

Beklebeversuche, Abschätzungen

Man schneidet aus Papier geeignete Kreise und Rechtecke aus und versucht, damit eine Kugel (Tennisball, Ball) zu bekleben.

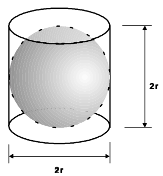
- Zwei Kreise und ein Rechteck
  (Flächeninhalt $O_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$)



- Zylindermantel für einen umfassenden Zylinder
  Man vergleicht die Fläche eines geeigneten Zylindermantels mit der Oberfläche der Kugel.

  Fläche des Zylindermantels: $A_{\text{Zylindermantel}} = 2r\pi \cdot 2r = 4\pi r^2$

  Oberfläche der Kugel: $O_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$

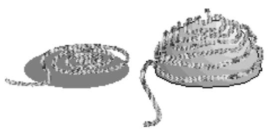


$\Rightarrow$ Die Oberfläche der Kugel ist genauso groß wie der Mantel des umfassenden Zylinders.

Man erhält diesen Zusammenhang auch rechnerisch, wenn die Berechnungsformeln schon bekannt sind. Auch dann ist der Zusammenhang hilfreich zum Erinnern der Formel.

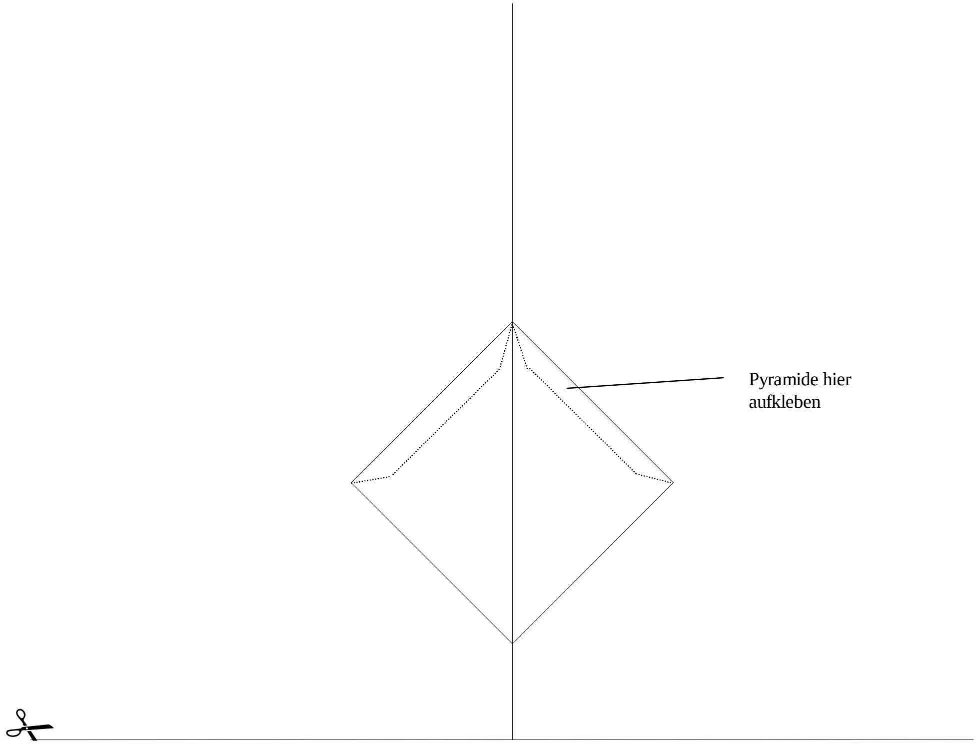
- Orangenversuch
  Man schneidet eine Orange am Äquator durch, legt eine Orangenhälfte mit der Schnittfläche auf ein Papier und zeichnet durch Umfahren mit einem Stift mehrere Äquatorkreisflächen (mindestens 3). Nun schält man die Orangenhälfte, zerteilt die Schale in kleine Stücke und legt damit die Kreisflächen aus. Vorher schätzen lassen, wieviele Kreisflächen man abdecken kann.

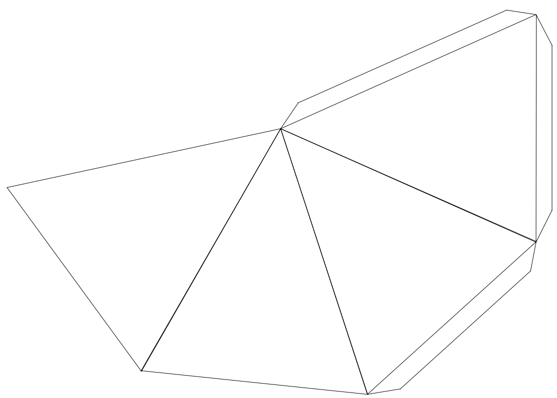
- Schnurversuch
  Man schneidet einen Tennisball in der Mitte durch und markiert auf einem Stück Pappe die Größe der Schnittfläche. Nun bedeckt man mit einer (nicht zu dünnen) Schnur einmal spiralenförmig die markierte Kreisfläche und einmal die Oberfläche des durchgeschnittenen Tennisballs und mißt jedesmal die Länge der dazu benötigten Schnur. Man braucht für die Halbkugel eine doppelt so lange Schnur wie für die Kreisfläche. Daraus ergibt sich die Oberfläche der Halbkugel zu $2\pi r^2$.



5.3.14.3 Einige Modelle

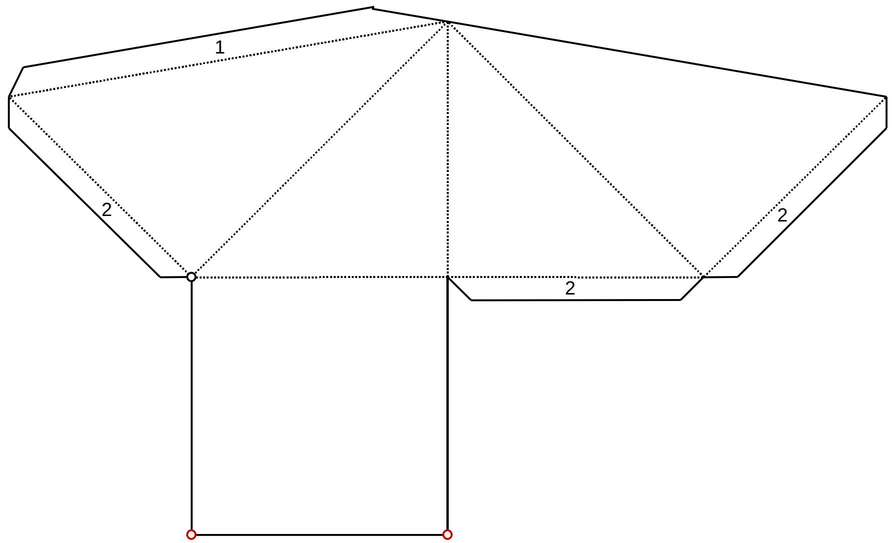
Popup-Modell für eine quadratische Pyramide

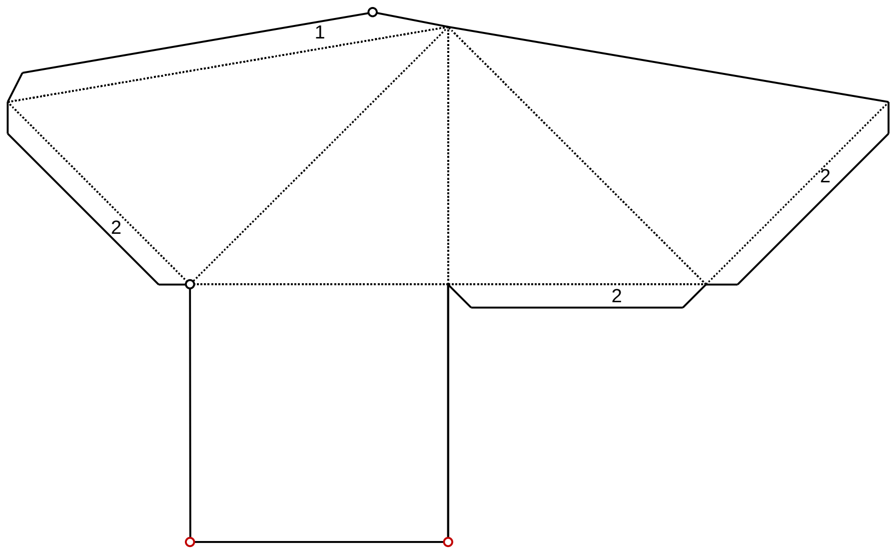




Rechtwinklige Dreieckspyramiden zur Bestimmung des Pyramidenvolumens.

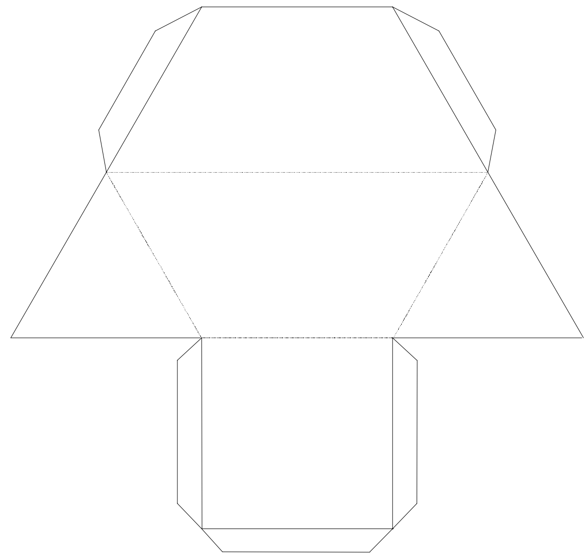
3 Pyramiden geben einen Würfel, 4 Pyramiden ergeben eine quadratische Pyramide.
24 Pyramiden ergeben wieder einen Würfel.
Zuerst Lasche 1 kleben, dann Laschen 2.

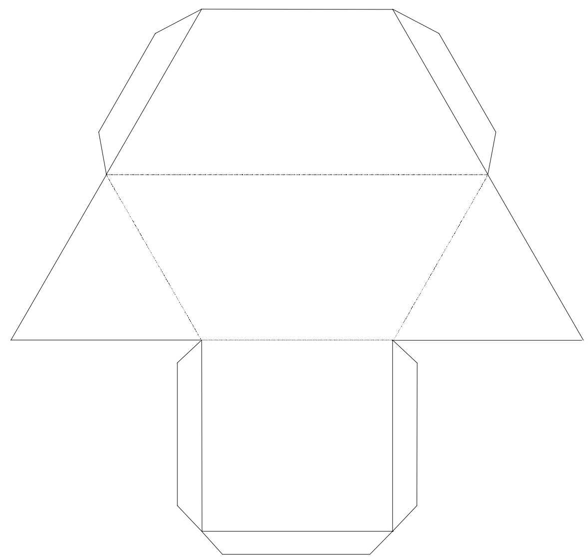




Tetraederpuzzle

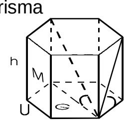
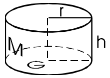
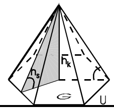
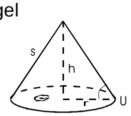
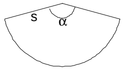
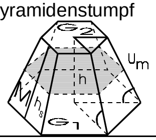
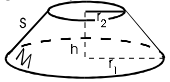
Ausschneiden, an den gestrichelten Linien falten und zu zwei Körpern zusammenkleben.
Aus den Körpern soll ein regelmäßiges Tetraeder zusammengesetzt werden.





5.4 Geometrie: Aufgaben und Formelsammlung

Körperberechnung: Aufgabentypen. Gesuchte Größen: Strecken, Winkel, Flächen, Volumina.
Formeln (Für die Abschlussprüfung in der Formelsammlung enthalten)

Körper	Strecken	Winkel	Flächen	Volumen
Prisma 	h, Kanten, Diagonalen (z.B. bei gegebenem Volumen)	Seitendiagonale/ Kante Raumdiagonale/ Grundfläche	$O = 2\cdot G + M$ $M = U\cdot h$	$V = G\cdot h$
Zylinder 	r, h		$O = 2\cdot G + M$ $= 2\pi\cdot r^2 + 2\pi\cdot r\cdot h$ $M = U\cdot h = 2\pi\cdot r\cdot h$	$V = G\cdot h = \pi\cdot r^2\cdot h$
Spitze Körper				
Pyramide 	Seitenhöhe h_s Körperhöhe h_k	Seitenhöhe/ Grundfläche Seitenkante/ Grundfläche	$O = G + M$ $M = \frac{1}{2}U\cdot h_s$ (für regelmäßige Pyramide)	$V = \frac{1}{3}G\cdot h$
Kegel 	Seitenlinie s Grundkreisradius r 	Seitenlinie/ Grundfläche Öffnungswinkel des Mantels $\alpha = \frac{r}{s}360°$	$O = G + M$ $G = \pi\cdot r^2$ $M = \pi\cdot r\cdot s$	$V = \frac{1}{3}G\cdot h$ $= \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$
Stumpfe Körper				
Pyramidenstumpf 	Seitenhöhe Körperhöhe	wie Pyramide	$O = G_1 + G_2 + M$ $M = U_m\cdot h_s$ (für regelm. Pyramidenstumpf)	$V = \frac{1}{3}h(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$
Kegelstumpf 	Seitenlinie s Kreisradien r_1, r_2	wie Kegel	$O = \pi\cdot r_1^2 + \pi\cdot r_2^2 + M$ $M = \pi\cdot s\cdot(r_1 + r_2)$ $= U_m\cdot s$	$V = \frac{1}{3}h\cdot\pi(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2)$
Kugel	r		$O = 4\pi\cdot r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$

6 Abschlussprüfung 1996: Aufgaben und Lehrerblätter (mit Bewertungsschlüssel)

MINISTERIUM FÜR KULTUS UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG

Abschlußprüfung an Realschulen   Schülerblatt   Blatt 1-2
Fach: Mathematik   Haupttermin 1996   Pflichtbereich (Aufgaben 1 bis 8)

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (nicht programmierbar), die an der Schule im Unterricht eingeführt sind, sowie Parabelschablone und Zeichengeräte

Hinweis: Im Pflichtbereich (17 P) sind alle Aufgaben zu bearbeiten

Aufgabe 1: 2 P

Gegeben ist ein Kegel:

Mantelfläche $M = 146\ cm^2$
Mantellinie $s = 9{,}3cm$

Berechnen Sie den Radius und das Volumen des Kegels.

Wie groß ist der Radius einer Kugel mit dem gleichen Volumen?

Aufgabe 2: 2 P

Ein Körper besteht aus einem quadratischen Prisma und einer aufgesetzten quadratischen Pyramide. Die Deckfläche des Prismas ist gleichzeitig die Grundfläche der Pyramide

Die Maße sind:

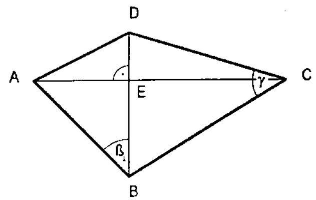
Grundkante $a = 4{,}8cm$
Höhe des Prismas $h_1 = 3{,}7cm$
Höhe der Pyramide $h_2 = 5{,}1\ cm$

Zeichnen Sie das Schrägbild ($\alpha = 45°$; $k = \frac{1}{2}$) des Körpers maßgerecht.
Berechnen Sie die Mantelfläche der aufgesetzten Pyramide.

Aufgabe 3: 2,5 P

Gegeben ist das Viereck ABCD.

Es gilt: $\overline{AB} = 4{,}2\ cm$
$\overline{BC} = 7{,}4\ cm$
$ß_1 = 40{,}3°$
$\overline{DE}$ ist halb so lang wie $\overline{BE}$.



Berechnen Sie die Länge BD sowie den Winkel γ.

Abschlußprüfung an Realschulen — Blatt 2
Fach: Mathematik — Haupttermin 1996 — Pflichtbereich

Aufgabe 4: (2 P)

Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion mit der Gleichung $y = \cos\alpha$ für $0° \leq \alpha \leq 180°$ in ein Koordinatensystem (α-Achse: $15° \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$; y-Achse: $1\ \text{LE} \mathrel{\hat{=}} 5\text{cm}$).

Entnehmen Sie dem Schaubild die Winkel α (deutliche Kennzeichnung), für die gilt:

$\cos\alpha = 0{,}5$ bzw. $\cos\alpha = -0{,}5$

Aufgabe 5: (1,5 P)

Der Punkt S(-2,5 | 3) ist Scheitelpunkt einer nach oben geöffneten Normalparabel. Geben Sie die Gleichung der Parabel in der Form $y = x^2 + px + q$ an.

Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt P(1,5 | 18,5) auf der Parabel liegt.

Aufgabe 6: (2,5 P)

Lösen Sie die Gleichung:

$$(x-2)(x+3) - 2(x-1)^2 = 2(2-x)$$

Aufgabe 7: (2,5 P)

Frau Berner legt einen Betrag für vier Jahre bei der Bank an:

Zinssatz im 1. Jahr:	3,75%
Zinssatz im 2. Jahr:	4,50%
Zinssatz im 3. Jahr:	5,50%
Zinssatz im 4. Jahr:	6,25%

Zinsen werden mitverzinst.

Nach Ablauf von vier Jahren ist der Betrag auf 34 636,23 DM angewachsen.
Wie hoch ist der ursprünglich eingezahlte Betrag?
Um wieviel Prozent ist das Kapital insgesamt angewachsen?
Welcher Zinsbetrag wird für das dritte Jahr gutgeschrieben?

Aufgabe 8: (2 P)

Ein Mountainbike kostet einschließlich 15% Mehrwertsteuer 1 099,00 DM.
Wie hoch ist der Betrag der Mehrwertsteuer?

Der Preis eines Rennrades wurde zweimal herabgesetzt, zuerst um 20% und dann um 120,00 DM. Dadurch verringerte sich der Preis des Rades um insgesamt 488,00 DM.
Berechnen Sie den ursprünglichen Preis.

Abschlußprüfung an Realschulen — Blatt 1-3
Fach: Mathematik — Haupttermin 1996 — Wahlbereich

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (nicht programmierbar), die an der Schule im Unterricht eingeführt sind, sowie Parabelschablone und Zeichengeräte

Hinweis: Im Wahlbereich (16 P) sind zwei der drei Aufgaben zu bearbeiten

Aufgabe 1:

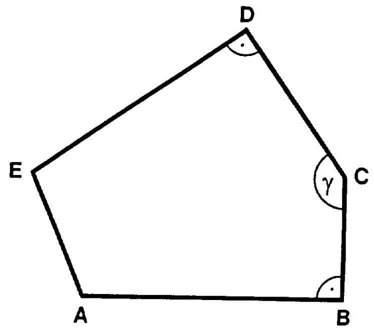
a) Das Fünfeck ABCDE setzt sich zusammen aus dem rechtwinkligen Trapez ABCE und dem rechtwinkligen Dreieck ECD. (4,5 P)

Es gilt:

$\overline{CD} = 6{,}7$ cm
$\gamma = 147{,}0°$
$A_{ges} = 86{,}0\ \text{cm}^2$ (Fläche des Fünfecks)

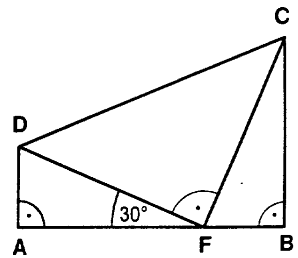
Der Abstand von Punkt D zu $\overline{AB}$ beträgt 10,5 cm.

Berechnen Sie die Länge $\overline{AE}$.



b) Im Viereck ABCD sind die Längen $\overline{AF} = 3e\sqrt{2}$ und $\overline{CD} = 6e$ gegeben. (3,5 P)

Berechnen Sie die Länge von $\overline{BC}$ in Abhängigkeit von e.



Abschlußprüfung an Realschulen — Blatt 2
Fach: Mathematik — Haupttermin 1996 — Wahlbereich

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (nicht programmierbar), die an der Schule im Unterricht eingeführt sind, sowie Parabelschablone und Zeichengeräte

Hinweis: Im Wahlbereich (16 P) sind zwei der drei Aufgaben zu bearbeiten

Aufgabe 2:

a) Eine nach oben geöffnete Normalparabel geht durch die Punkte A(1|3,25) und B(-5|-2,75). — 4,5 P

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel.

Zeichnen Sie die Parabel in ein Koordinatensystem.

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse bzw. der y-Achse.

b) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung. — 3,5 P

$$\frac{2x+1}{x-3}+\frac{3-x}{x^2-6x+9}=\frac{x+1}{2x-6}$$

Abschlußprüfung an Realschulen — Blatt 3
Fach: Mathematik — Haupttermin 1996 — Wahlbereich

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (nicht programmierbar), die an der Schule im Unterricht eingeführt sind, sowie Parabelschablone und Zeichengeräte

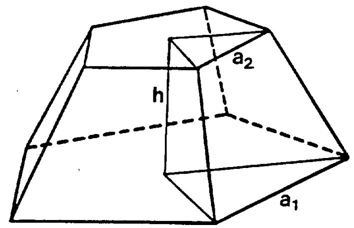
Hinweis: Im Wahlbereich (16 P) sind zwei der drei Aufgaben zu bearbeiten

Aufgabe 3:

Ein regelmäßiger fünfseitiger Pyramidenstumpf hat die Maße: — 4 P

a_1 = 9,4cm
a_2 = 6,2cm
h = 8,7 cm

Berechnen Sie die Oberfläche des Stumpfes.

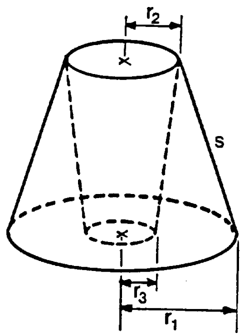


b) Aus einem Kegelstumpf wurde ein zweiter Kegelstumpf mit gleicher Höhe herausgearbeitet. — 4 P

Es gilt.
r_1 = 4e
r_2 = 2e
s = $2e\sqrt{5}$

Das Volumen des herausgearbeiteten Kegelstumpfs beträgt 25% des Volumens des ursprünglichen Kegelstumpfs.

Berechnen Sie den Radius r_3 in Abhängigkeit von e.



MINISTERIUM FÜR KULTUS UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG Abschlußprüfung an Realschulen **Lehrerblatt**		
Fach: Mathematik	Haupttermin 1996	Seiten 1-3
Nur für die Hand des Fachlehrers und den Dienstgebrauch bestimmt!		

Hinweise und Punkteverteilung

Die schriftliche Prüfung besteht aus dem Pflichtbereich und dem Wahlbereich.
Die Aufgaben werden nicht vorgelesen. Die Prüfungszeit beträgt durchgehend 180 Minuten.

Im Pflichtbereich sind alle Aufgaben zu bearbeiten. Im Wahlbereich sind zwei der drei Aufgaben zu bearbeiten. Bearbeiten die Schüler mehr als zwei Aufgaben im Wahlbereich, so werden die beiden besten Lösungen gewertet.

Der Lösungsgang einer Aufgabe muss nachprüfbar sein.
Bei Berechnungen mit Größen sind die Ergebnisse sinnvoll zu runden.

Es können ganze und halbe Punkte vergeben werden; Punktsummen dürfen nicht gerundet werden.

Umrechnungstabelle:

erreichte Punkte		Note	erreichte Punkte		Note	erreichte Punkte		Note
33,0	**-**	**1,0**	**21,5**	**-**	**2,7**	**10,0**	**-**	**4,4**
32,5	**-**	**1,0**	**21,0**	**-**	**2,8**	**9,5**	**-**	**4,5**
32,0	**-**	**1,1**	**20,5**	**-**	**2,8**	**9,0**	**-**	**4,6**
31,5	**-**	**1,2**	**20,0**	**-**	**2,9**	**8,5**	**-**	**4,7**
31,0	**-**	**1,3**	**19,5**	**-**	**3,0**	**8,0**	**-**	**4,7**
30,5	**-**	**1,3**	**19,0**	**-**	**3,1**	**7,5**	**-**	**4,8**
30,0	**-**	**1,4**	**18,5**	**-**	**3,1**	**7,0**	**-**	**4,9**
29,5	**-**	**1,5**	**18,0**	**-**	**3,2**	**6,5**	**-**	**5,0**
29,0	**-**	**1,6**	**17,5**	**-**	**3,3**	**6,0**	**-**	**5,0**
28,5	**-**	**1,6**	**17,0**	**-**	**3,4**	**5,5**	**-**	**5,1**
28,0	**-**	**1,7**	**16,5**	**-**	**3,5**	**5,0**	**-**	**5,2**
27,5	**-**	**1,8**	**16,0**	**-**	**3,5**	**4,5**	**-**	**5,3**
27,0	**-**	**1,9**	**15,5**	**-**	**3,6**	**4,0**	**-**	**5,3**
26,5	**-**	**1,9**	**15,0**	**-**	**3,7**	**3,5**	**-**	**5,4**
26,0	**-**	**2,0**	**14,5**	**-**	**3,8**	**3,0**	**-**	**5,5**
25,5	**-**	**2,1**	**14,0**	**-**	**3,8**	**2,5**	**-**	**5,6**
25,0	**-**	**2,2**	**13,5**	**-**	**3,9**	**2,0**	**-**	**5,6**
24,5	**-**	**2,2**	**13,0**	**-**	**4,0**	**1,5**	**-**	**5,7**
24,0	**-**	**2,3**	**12,5**	**-**	**4,1**	**1,0**	**-**	**5,8**
23,5	**-**	**2,4**	**12,0**	**-**	**4,1**	**0,5**	**-**	**5,9**
23,0	**-**	**2,5**	**11,5**	**-**	**4,2**	**0**	**-**	**6,0**
22,5	**-**	**2,5**	**11,0**	**-**	**4,3**		**-**	
22,0	**-**	**2,6**	**10,5**	**-**	**4,4**		**-**	

Abschlußprüfung an Realschulen **Lehrerblatt**		
Fach: Mathematik	Haupttermin 1996	Seite 2/Seite 3
Nur für die Hand des Fachlehrers und den Dienstgebrauch bestimmt!		

PFLICHTBEREICH (17 P)		**WAHLBEREICH (16 P)**	
Zu Aufgabe 1: $r_{Kegel} = 5{,}0$ cm $V_{Kegel} = 205$ cm^3 $r_{Kugel} = 3{,}7$cm	2P	Zu Aufgabe 1: $\overline{AE} = 6{,}0$cm $\overline{BC} = 3e$	4,5 P 3,5 p ------ 8 P
Zu Aufgabe 2: Zeichnung $M = 54{,}1$ cm^2	2P	Zu Aufgabe 2: S(-2,5|-9) Zeichnung $N_1(0{,}5\|0)$ $N_2(-5{,}5\|0)$ P(0|-2,75) b) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ $L = \{\frac{1}{3}\}$	4,5 P 3,5 P ------- 8 P
Zu Aufgabe 3: $\overline{BD} = 4{,}8$cm $\gamma = 39{,}1°$	2,5 P	Zu Aufgabe 3: a) $O = 568$ cm^2 b) $r_3 = e$	4 P 4 P ------ 8P
Zu Aufgabe 4: Schaubild Kennzeichnung: 60°; 120°	2P		
Zu Aufgabe 5: $y=x^2+5x+9{,}25$ P liegt nicht auf der Parabel	1,5P		
Zu Aufgabe 6: L= {3 ; 4}	2,5 P		
Zu Aufgabe 7: 28 500 DM 21,5% 1 699,46 DM	2,5P		
Zu Aufgabe 8: 143,35 DM 1 840 DM	2P		

7 Literaturverzeichnis

Allgemeine Literatur

DIFF-Fernstudiengang "Mathematik für Lehrer der Sekundarstufe I / Hauptschule",
Heft 1 - Heft 12, DIFF Tübingen 1978-1980
Ausführliche und gut verständliche Darstellung **aller Unterrichtsgegenstände** der SI mit Sachhintergrund und Didaktik.

FÜHRER, L.**,** Pädagogik des Mathematikunterrichts
Vieweg, Braunschweig 1997
Allgemeine fachdidaktische Fragen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.

HEYMANN, H.W.**,** Allgemeinbildung und Mathematik
Beltz, Weinheim 1996
Lesenswerte Abhandlung über die Ziele und den Sinn von Mathematik in den allgemeinbildenden Schulen.

MALLE, G., FISCHER, R., Mensch und Mathematik
BI, Mannheim 1985
Gut, brauchbare praktische Beispiele, nicht so formal und dogmatisch.

SCHWARTZE,H., FRICKE,A., Grundriß des mathematischen Unterrichts, 7.Auflage, Kamp Bochum 1983
Mathematikdidaktik für Grund und Hauptschule. Ganz gute, knappe Übersicht über Didaktik und Methodik für die Hauptschule. Nicht zu alt, brauchbar.

SCHWARTZE,H., Elementarmathematik aus didaktischer Sicht, Bd.1 und Bd.2
Kamp Bochum 1980
Fachwissenschaftlicher Hintergrund

ZECH, F.., Grundkurs Mathematikdidaktik
Beltz, Weinheim 1996

ZECH, F**.,** Wellenreuther, M. , Stützpfeiler Mathematik
Mehrere Bände zu ausgewählten Themen wie Geometrie im 5./6. Schj., Prozentrechnen usw.
Cornelsen alle Bände aus den 90er Jahren

BAUMERT, J., LEHMANN, R., TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich
Leske+Bbudrich, Opladen 1997
Auch im Internet verfügbar unter der Adresse http://www.mpib-berlin.mpg.de/TIMSS_ii/Ergebnisse.htm
Sammlung und Beschreibung aller Befunde der aufsehenerregenden Studie.

BAUMERT, J. U.A.(HRSG.), PISA 2000 Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.
Leske +Budrich, Opladen 2002

BAUMERT, J. U.A.(HRSG.), PISA 2000 Die Länder der Bundesrepublik Deutschland im Vergleich.
Leske +Budrich, Opladen 2001

SCHREIBER, A., Grundzüge der Mathematikdidaktik
Vorlesungsskript Universität Flensburg von Prof. Dr. Alfred Schreiber **im Internet**
http://www.uni-flensburg.de/mathe/zero/veranst/didmath/didmath.html (gültige Referenz September 02)

Arithmetik

PADBERG, F., Didaktik der Bruchrechnung
BI, Mannheim 1995
Nur für 6.Schuljahr

Geometrie

MITSCHKA, A., Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I
Herder, Freiburg 1982
Gute Didaktik der Geometrie für Hauptschule und Realschule. Der Schwerpunkt liegt auf der Hauptschulmathematik.

HOLLAND, G., Geometrie in der Sekundarstufe
Didaktische und methodische Fragen, Schuljahr 5-12
Spektrum, Akad. Verl. 2. Aufl., Heidelberg 1996.

SCHMIDT, H.J.: Zum Umgang mit Zirkel, Lineal und Geodreieck
Aulis-Verl. Deubner, Köln 1995.
Geometrie; Unterrichtsbeispiele Schuljahr 5-7

STRUVE, H.: Grundlagen einer Geometriedidaktik
BI, Mannheim 1990
Schwerpunkt auf „*Grundlagen*“, daher stehen theoretische Ansätze im Vordergrund, weniger die Unterrichtspraxis.

BERNHARD, A., Vom Formenzeichnen zur Geometrie der Mittelstufe
Anregungen für das Wecken des geometrischen Denkens in der 6., 7. und 8. Klasse
Verl. Freies Geistesleben Stuttgart, 1996.
Schuljahr 6-8, Waldorfschule.

BAPTIST, P., Pythagoras – und kein Ende
Gut für Geschichte und Geschichten zu Pythagoras und anderen Mathematikern der Antike bis ins Mittelalter
Klett, Stuttgart 1998

SERRA, M. ., Discovering geometry,
Key Curriculum Press, Berkeley 1993 (mittlerweile 3. Auflage erschienen,)
Maßgebliches Buch für Geometriekurse in den Vereinigten Staaten, ausgerichtet an den Curriculum-Standards der NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Einige gute Anregungen auch für den Geometrieunterricht in Deutschland.

Algebra

MALLE, G., Didaktische Probleme der Elementaren Algebra
Vieweg, Braunschweig 1993
Sehr gut, brauchbar, praktische Beispiele, nicht so formal und dogmatisch.

VOLLRATH, H.J., Algebra in der Sekundarstufe
BI, Mannheim 1994

Sachrechnen

STREHL, REINHARD, Grundprobleme des Sachrechnens
Herder, Freiburg 1979
Etwas veraltet, aber gute Darstellung der formalen Theorie der Größenbereiche, einschließlich der Einführung der Bruchrechnung und der Abbildungen zwischen Größenbereichen.

DIFF-Fernstudiengang "Mathematik für Lehrer an Berufsschulen",
Heft BS 1 - BS 4, DIFF Tübingen 1983-1985
Ausführliche und gut verständliche Darstellung des Sachrechnens für Berufsschulen, aber auch für die SI geeignet.

BAIREUTHER, PETER, Konkreter Mathematikunterricht,
Franzbecker, Bad Salzdetfurth 1990

BERGER, ROLAND, Prozent- und Zinsrechnen in der Hauptschule, Roderer-Verlag Regensburg 1989
Allgemeine Behandlung der Prozent- und Zinsrechnung, Darstellung der verschiedenen Zugänge und Methoden sowie eine Auswertung der Fehler in den entsprechenden Aufgaben der Hauptschulabschlußprüfungen 1985-87

FRICKE, ARNORLD, Sachrechnen.
Klett, Stuttgart 1987

GLATFELD, MARTIN, Anwendungsprobleme im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I
Vieweg, Braunschweig 1993

MAIER, H., SCHUBERT, A., Sachrechnen
Ehrenwirth, München 1978
gut, aber leider vergriffen

Sehr spezielle Themen

LÖRCHER,G.A.,. RÜMMELE,H., Aktivitäten in der ebenen Geometrie,
Handlungsorientierte Geometrie Heft 1, RAA Hauptstelle, Essen 1992
Sehr schöne Sammlung von ganz praktischen Anleitungen zum Falten und Schneiden, überraschende Tricks, alles mit ganz einfachem Material.

LÖRCHER,G.A., RÜMMELE,H., Puzzles in der ebenen Geometrie,
Handlungsorientierte Geometrie Heft 2, RAA Hauptstelle, Essen 1993
Puzzles, Figurenlegen, Spiele, Experimentieren; mit Kopiervorlagen

LÖRCHER,G.A., RÜMMELE,H., Körper falten,
Handlungsorientierte Geometrie Heft 3, RAA Hauptstelle, Essen 1995
Von ganz einfachen zu sehr schwierigen Aufgaben zum Falten und Flechten dreidimensionaler Polyeder.

VOLLATH, E., Geometrie im Gelände
Peilen und Messen in freier Natur
Auer, Donauwörth 1989

PÖPPE, CHR., HINER, M.: Pop Up 1, Papiermechanik für Pop-Up-Bücher und -Karten
Spektrum Verlag, Heidelberg 1996 (engl. Original M.Hiner , Norfolk 1985)
Sehr schöne Ideen für Pop Up Grußkarten

PÖPPE, CHR., HINER, M.: Pop Up 2, Papiermechanik mit Gummibändern
Spektrum Verlag, Heidelberg 1997 (engl. Original M.Hiner , Norfolk 1996)
Sehr schöne Ideen für Pop Ups von einfachen geometrischen Körpern, auch einige Ideen für Grußkarten

SCHATTSCHNEIDER, D., WALKER, W.: M.C.Escher Kaleidozyklen
Benedikt Taschen Verlag, Köln 1992
Bastelvorlagen für einfache und komplizierte geometrische Körper mit zyklischen Escher-Parketten

Spiele für den Mathematikunterricht

VERNAY, RÜDIGER (HRSG.), Mathematik Lehren, Sonderheft Spiele für den Unterricht,
Friedrich Verlag, Seelze 1995
Sammlung von Lernspielen zur Mathematik, die in vorausgegangenen Heften der Zeitschrift erschienen sind.

LÖRCHER, G., Spiele im Mathematikunterricht,
Skript zum gleichnamigen Seminar, PH Freiburg

LÖRCHER, G., RÜMMELE,H., Didaktik des Taschenrechners
Stark Verlag 1986 (vergriffen)
Viele Spiele mit dem Taschenrechner

WÄLTI, BEAT, Mathespiele für die SEK 1 : Lehrplanthemen spielerisch angehen
Verl. an der Ruhr, Mülheim an der Ruhr, 1996. - 109 S
„Spiele“ zu allen Sachgebieten. Viele Spiele stellen aber eher eine Aufgabensammlung dar, die als Spiel deklariert wird.

MATHEMATIK LEHREN, Sammelheft Spiele

Computereinsatz im Mathematikunterricht

HOLE, V., Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer
Aulis-Verlag, Deubner, Köln 1998
Monographie, die sowohl einen guten theoretischen didaktischen Hintergrund als auch vor allem viele praktische Beispiele zu allen möglichen Anwendungen im Unterricht liefert.

WERNER,W., Schüler arbeiten mit dem Computer,
Teubner/Metzler, Stuttgart 1988.
Materialien für die Sekundarstufe I

DAHLKE,E., WIPPERMANN, H., Der Computer im Mathematikunterricht
Sekundarstufe I (mit Diskette)
Klett Stuttgart 1994

WEIGAND, H.-G., WETH, TH., Computer im Mathematikunterricht,
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2002
Sehr aktuelle Monographie zu mathematikdidaktischen Fragen im Zusammenhang mit dem Computereinsatz im Mathematikunterricht in der Sekundarsufe I und II. Fasst den gegenwärtigen Stand der Diskussion zusammen. Die benutzte Software entspricht dem neuesten Stand. Die Diskussion um die Veränderung der Unterrichtskultur nach TIMSS und PISA wird berücksichtigt.

Viele Softwareprodukte verschiedener Quellen können über die Firma
Co Tec GmbH,
Traberhofstrasse 12,
83026 Rosenheim
Tel. 08031/2635-0

bezogen werden, die auch einen umfangreichen Katalog herausgibt (gute Übersicht, Angabe weiterer Kontaktadressen wie Landesbildstellen).

Computer Algebra Systeme (CAS)

Von den vielen CAS-Systemen kommt für die Sekundarstufe I meines Erachtens ernsthaft höchstens **DERIVE** in Frage. Die Systeme Mathematica, Maple (Theorist) etc. werden auch gelegentlich für die SI vorgeschlagen, sind aber wahrscheinlich zu mächtig und zu kompliziert.
DERIVE ist für den PC erhältlich und ist in den Taschenrechnern **TI 92** und **TI 89** integriert. Es kann damit leicht im Unterricht und Zuhause bei geeigneter Ausstattung eingesetzt werden.
DERIVE ist in Österreich als Bundeslizenz an allen Schulen eingeführt und wird auch in Deutschland (relativ) viel im Gymnasium eingesetzt.

Vertrieb:
bk teachware Lehrmittel GmbH&Co., Softwarepark, A-4232 Hagenberg, Österreich, Tel.0043/7236-6065.

Internet

Mittlerweile gibt es eine sehr große Zahl von Dokumenten im Internet, die konkrete Unterrichtsmaterialien und Vorschläge bieten. Auch zur Suche nach ausgefallenen Daten bietet sich das Internet mit seinen Suchmaschinen an.
Einige ausgewählte Startseiten speziell für den Mathematikunterricht in der SI:

Bildungspläne für allgemein bildende Schulen in Baden-Württemberg (aktuell, von 1994):
http://www.leu.bw.schule.de/allg/lp/
Bildungsplanreform 2004 - Baden-Württemberg (Bildungsstandards 2003):
http://www.leu.bw.schule.de/allg/lehrplan/
http://www.bildungsstandards-bw.de/
Quellen für viele weitere Verbindungen http://www.mathematikunterricht.de/
http://www.schule.de/bics/cif/mathe/links.htm
http://www.uni-bielefeld.de/idm/
http://www.math.tuwien.ac.at/~sleska/

USA http://forum.swarthmore.edu./

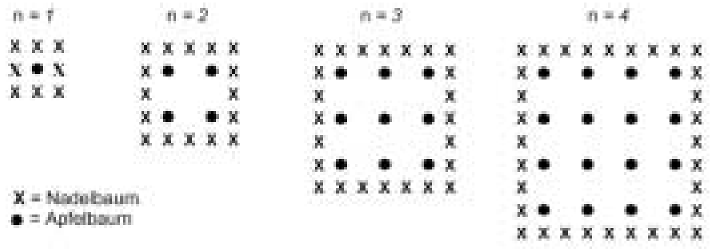
Übersicht ZUM (Unterrichtsmedien)	http://www.zum.de/tabelle.html
Deutscher Bildungsserver	http://dbs.schule.de/index2.html
Bildungsserver Hessen	http://www.bildung.hessen.de/
TIMSS	http://www.mpib-berlin.mpg.de/en/forschung/eub/Projekte/timss.htm
PISA-Studie	http://www.mpib-berlin.mpg.de/en/forschung/eub/Projekte/PISA.htm http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/
Curriculum-Standards der NCTM (quasi LP USA)	http://www.nctm.org/standards/
University of Minnesota	http://www.geom.umn.edu/welcome.html
Einige Ideen, abseits des Lehrplans, z.T. math. fragwürdig	http://www.shodor.org/interactivate/lessons/

8 Anhang: PISA 2000 - Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest

Quelle: http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/

ÄPFEL

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet.
Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum.
Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl (n) von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:



Frage 1: ÄPFEL

Vervollständige die Tabelle:

n	Anzahl Apfelbäume	Anzahl Nadelbäume
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		

Frage 2: ÄPFEL

Es gibt zwei Formeln, die man verwenden kann, um die Anzahl der Apfelbäume und die Anzahl der Nadelbäume für das oben beschriebene Muster zu berechnen:

Anzahl der Apfelbäume = n^2

Anzahl der Nadelbäume = $8n$

wobei *n* die Anzahl der Apfelbaumreihen bezeichnet.
Es gibt einen Wert für *n,* bei dem die Anzahl der Apfelbäume gleich groß ist wie die Anzahl der Nadelbäume. Bestimme diesen Wert und gib an, wie du ihn berechnet hast.

Frage 3: ÄPFEL

Angenommen, der Bauer möchte einen viel größeren Obstgarten mit vielen Reihen von Bäumen anlegen. Was wird schneller zunehmen, wenn der Bauer den Obstgarten vergrößert: die Anzahl der Apfelbäume oder die Anzahl der Nadelbäume? Erkläre, wie du zu deiner Antwort gekommen bist.

FLÄCHE EINES KONTINENTS

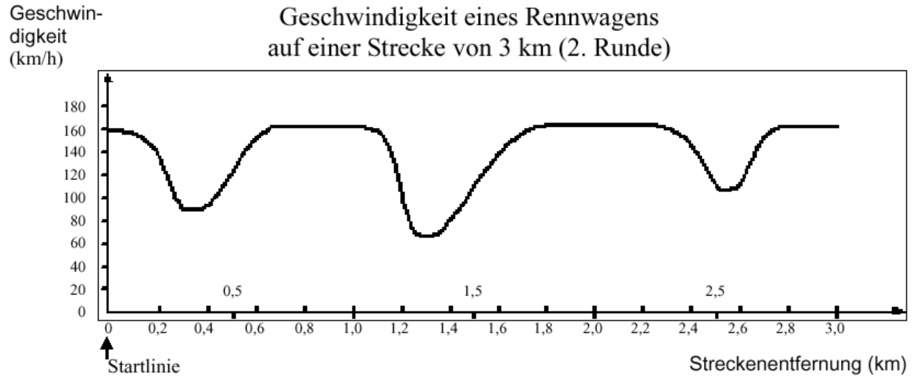
Hier siehst du eine Karte der Antarktis.

Frage 4: FLÄCHE EINES KONTINENTS

Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt.
Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)

GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS

Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.



Frage 5: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS

Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geradlinigen Abschnitts der Rennstrecke?

A 0,5 km
B 1,5 km
C 2,3 km
D 2,6 km

Frage 6: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS

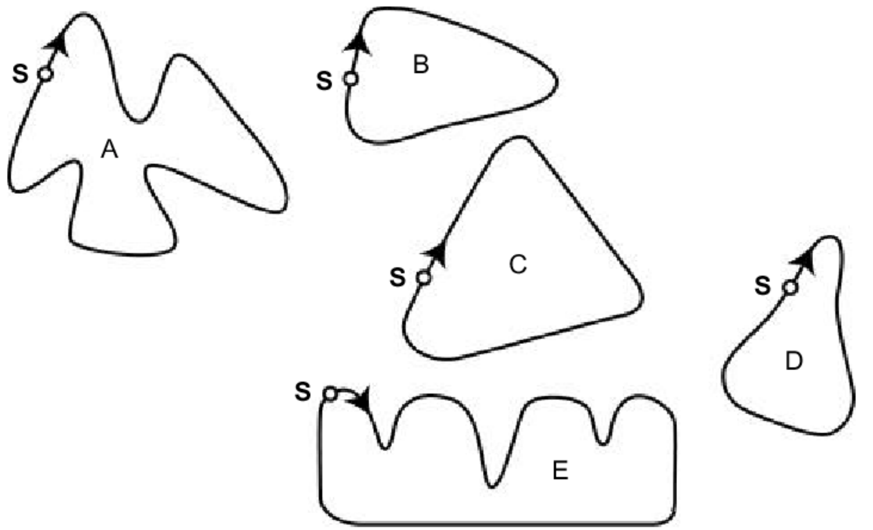
Wo wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit gemessen?
A an der Startlinie
B bei etwa 0,8 km
C bei etwa 1,3 km
D nach der halben Runde

Frage 7: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS

Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Markierungen 2,6 km und 2,8 km sagen?
A Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
B Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
C Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
D Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

Frage 8: GESCHWINDIGKEIT EINES RENNWAGENS

Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken:
Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, so dass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



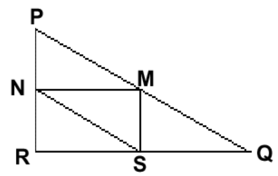
S: Startlinie

DREIECKE

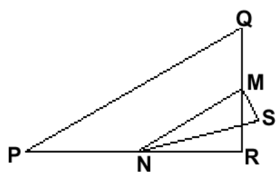
Frage 9: DREIECKE

Kreise die Figur ein, die zur folgenden Beschreibung passt.
Das Dreieck PQR hat einen rechten Winkel in R. Die Strecke $\overline{RQ}$ ist kürzer als die Strecke $\overline{PR}$. M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ und N ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. S ist ein Punkt im Inneren des Dreiecks. Die Strecke $\overline{MN}$ ist länger als die Strecke $\overline{MS}$.

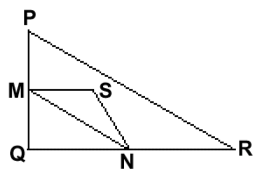
A



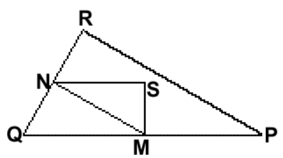
B



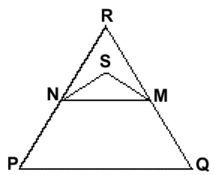
C



D



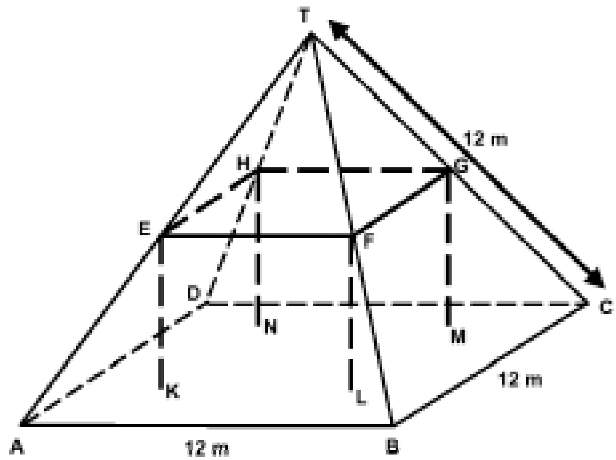
E



BAUERNHÖFE

Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach.

Nachfolgend siehst du eine Skizze mit den entsprechenden Maßen, die eine Schülerin vom **Dach** des Bauernhauses gezeichnet hat.



Der Dachboden, in der Skizze ABCD, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma) EFGHKLMN. E ist die Mitte von $\overline{AT}$, F ist die Mitte von $\overline{BT}$, G ist die Mitte von $\overline{CT}$ und H ist die Mitte von $\overline{DT}$. Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.

Frage 10 BAUERNHÖFE

Berechne den Flächeninhalt des Dachbodens ABCD.

Der Flächeninhalt des Dachbodens ABCD = _______________ m^2

Frage 11 BAUERNHÖFE

Berechne die Länge von $\overline{EF}$, einer der waagerechten Kanten des Quaders.
Die Länge von $\overline{EF}$ = ____________ m .

PIZZA

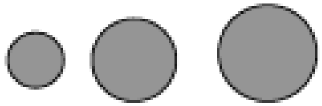
Eine Pizzeria bietet zwei runde Pizzas mit derselben Dicke in verschiedenen Größen an. Die kleinere hat einen Durchmesser von 30 cm und kostet 30 Zeds. Die größere hat einen Durchmesser von 40 cm und kostet 40 Zeds.

Beispielaufgabe 1: Mathematische Grundbildung

Bei welcher Pizza bekommt man mehr für sein Geld? Gib eine Begründung an.

MÜNZEN

Du wirst beauftragt, einen neuen Satz von Münzen zu entwerfen. Alle Münzen sollen rund und silberfarbig sein, aber verschiedene Durchmesser haben. Forscher haben herausgefunden, dass ein idealer Satz von Münzen folgende Anforderungen erfüllt:



Der Durchmesser der Münzen sollte nicht kleiner als 15 mm und nicht größer als 45 mm sein.

- Ausgehend von einer Münze muss der Durchmesser der nächsten Münze mindestens 30 % größer sein.
- Die Prägemaschine kann nur Münzen herstellen, deren Durchmesser in Millimeter ganzzahlig ist (z.B. 17 mm sind zulässig, 17,3 mm nicht).

Beispielaufgabe 2: Mathematische Grundbildung

Entwirf einen Satz von Münzen, der die oben genannten Anforderungen erfüllt. Beginne mit einer 15-Millimeter-Münze. Dein Satz sollte so viele Münzen wie möglich
enthalten.

FLECHTEN

Die weltweite Erwärmung hat zur Folge, dass das Eis einiger Gletscher schmilzt.

Zwölf Jahre nach dem Wegschmelzen des Eises beginnen auf den Felsen winzige Pflanzen zu wachsen, die sogenannten Flechten.

Jede Flechte wächst ungefähr kreisförmig.

Der Zusammenhang zwischen dem Durchmesser dieses Kreises und dem Alter der Flechten kann mit folgender Formel angenähert bestimmt werden:

für $t \geq 12$

wobei *d* den Durchmesser der Flechte in Millimeter angibt und *t* die Zahl der Jahre nach dem Wegschmelzen des Eises.

Beispielaufgabe 3: Mathematische Grundbildung

Berechne anhand der Formel den Durchmesser der Flechten 16 Jahre nach dem Wegschmelzen des Eises.

Gib deine Berechnung an.

Beispielaufgabe 4: Mathematische Grundbildung