**Rationale Zahlen**

Wir sprechen im folgenden einfach von „Dezimalzahlen“ statt die korrektere Bezeichnung „Zahl in Dezimalbruchschreibweise“ o.ä. zu verwenden.

Es sollen folgende Bezeichnungen verwandt werden (außer $\mathbb{Q}$ nicht standardisiert)

$\mathbb{Q}$ : Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{B}$ : Menge der positiven Bruchzahlen
$\mathbb{D}$ : Menge der abbrechenden oder periodischen Dezimalzahlen

$\mathbb{Q}$ = Menge der positiven oder negativen Bruchzahlen
= Menge der positiven oder negativen abbrechenden oder periodischen Dezimalzahlen

Wir zeigen: $\mathbb{B} = \mathbb{D}$

(1) $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{D}$ d.h. jede Bruchzahl lässt sich als abbrechende oder periodische Dezimalzahl darstellen.

Der Nachweis wird an Hand eines Beispiels geführt, er lässt sich sofort auch allgemein (aber viel unübersichtlicher) aufschreiben.

Problem: Was ist $\frac{2}{7}$ in Dezimalschreibweise?

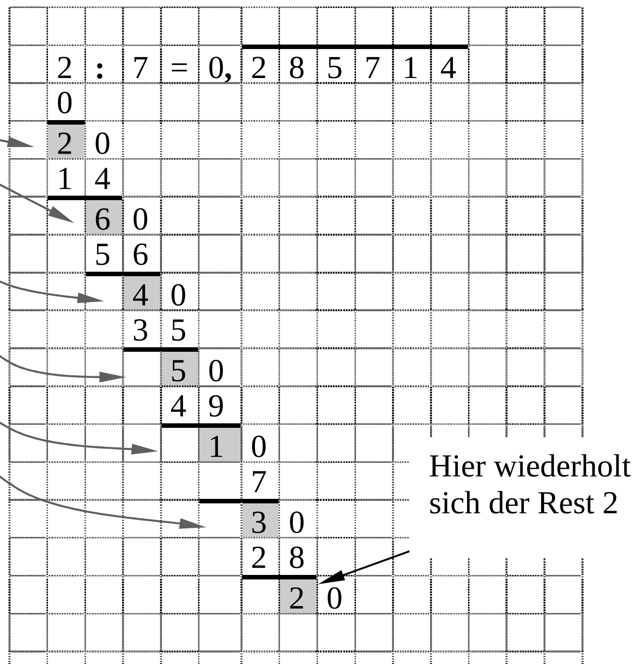
Lösung: Man führt das übliche schriftliche Divisionsverfahren 2 : 7 durch und beobachtet, was dabei passieren kann.

Die Reste müssen immer kleiner als 7 sein. (Allgemein: kleiner als der Divisor)

Rest 0:
abbrechende Dezimalzahl.

Rest wiederholt sich einmal:
Dezimalzahl wird periodisch, da sich die Ziffern im Ergebnis wiederholen.

Spätestens nach 7 Divisionsschritten *müssen* sich die Reste wiederholen!




Wandeln Sie in eine Dezimalzahl um: $\frac{11}{18}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{38}{99}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{723}{999}$

(2) $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{B}$ d.h. jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl lässt sich als Bruchzahl darstellen.

Ein korrekter Nachweis dieses Sachverhalts erfordert Grenzwerte geometrischer Reihen.
Die hier angegebenen „Schulbeweise“ finden sich in Büchern für die Sekundarstufe I, sind einfach und unmittelbar einleuchtend, verwenden aber undefinierte und dubiose Multiplikationen einer unendlichen Dezimalzahl mit einer natürlichen Zahl.

Wir zeigen zunächst wie man eine rein-periodische Dezimalzahl in einen Bruch umwandelt.
Anschließend wird die Umwandlung einer gemischt-periodischen Dezimalzahl auf diesen einfacheren Fall zurück geführt.

**1.Weg**

Man berechnet zunächst die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999}$ ....

$\frac{1}{9} = 0,\overline{1} = 0{,}11111111...$ , $\frac{1}{99} = 0,\overline{01} = 0{,}01010101....$ , $\frac{1}{999} = 0,\overline{001} = 0{,}001001001.....$

Daraus erhält man unmittelbar (?)

$$0,\overline{7} = 7 \cdot 0,\overline{1} = 7 \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{9} \qquad \textit{also} \qquad 0,\overline{7} = \frac{7}{9}$$

$$0,\overline{34} = 34 \cdot 0,\overline{01} = 34 \cdot \frac{1}{99} = \frac{34}{99} \qquad \textit{also} \qquad 0,\overline{34} = \frac{34}{99}$$

$$0,\overline{165} = 165 \cdot 0,\overline{001} = 165 \cdot \frac{1}{999} = \frac{165}{999} \qquad \textit{also} \qquad 0,\overline{165} = \frac{165}{999}$$

Wir prüfen das Verfahren am Beispiel $0,\overline{3}$ : $0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Testen Sie das Verfahren genauso mit den folgenden Dezimalzahlen und überprüfen Sie das Ergebnis durch Rückwandlung durch Division (schriftlich oder näherungsweise mit dem Taschenrechner):

$0,\overline{33}$, $0,\overline{2}$, $0,\overline{1234}$, $0,\overline{37364458}$, $0,\overline{9}$ (besonders das letzte Beispiel ist verwunderlich).

**2.Weg**

Wir multiplizieren $0,\overline{7}$ mit 10 und stellen fest, dass sich hinter dem Komma nichts ändert und sich vor dem Komma 7 ergibt:

$10 \cdot 0,\overline{7} = 7,\overline{7} = 7 + 0,\overline{7}$ daraus erhält man $9 \cdot 0,\overline{7} = 7$ und daraus sofort $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$.

Ebenso

$100 \cdot 0,\overline{34} = 34,\overline{34} = 34 + 0,\overline{34}$ $\qquad 99 \cdot 0,\overline{34} = 34$ $\qquad 0,\overline{34} = \frac{34}{99}$

Führen Sie die Umwandlung für $0,\overline{165}$ nach dem gleichen Verfahren durch.

**Umwandlung einer gemischt-periodischen Dezimalzahl**

Wir wollen $0{,}23\overline{45}$ umwandeln. Dazu multiplizieren wir die gemischt-periodischen Dezimalzahl mit 100, damit wir eine rein-periodische Dezimalzahl erhalten, die wir nach dem obigen Verfahren umwandeln.

$$0{,}23\overline{45} = \frac{1}{100}\cdot 23,\overline{45} = \frac{1}{100}\cdot(23+0,\overline{45}) = \frac{1}{100}\cdot(23+\frac{45}{99}) = \frac{23}{100}+\frac{45}{9900} = \frac{23\cdot 99+45}{9900}$$

$$= \frac{23\cdot(100-1)+45}{9900} = \frac{23\cdot 100+45-23}{9900} = \frac{2345-23}{9900} = \frac{2322}{9900}$$ Nachprüfen durch Division!

$$\boxed{0{,}23\overline{45} = \frac{2345-23}{9900}}$$

Führen Sie entsprechende Umwandlungen durch für

$0{,}4\overline{13}$, $0{,}124\overline{13}$, $25{,}4\overline{64}$, $0{,}24\overline{6453}$, $0{,}423\overline{4}$

und überprüfen Sie die Umwandlung durch Division.

**Können Sie eine allgemeine Regel formulieren?**