

Aufgaben zur Vertiefung der Geometrie

WS 2006/07

11./12. Dezember 2006

Blatt 3

Schrägbilder entstehen durch schiefe Parallelprojektion von Körpern auf irgendeine Bildebene.

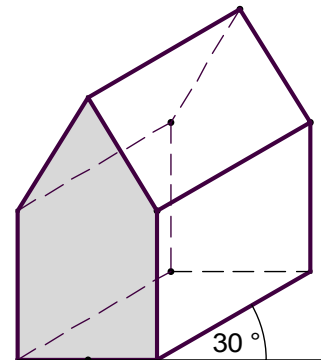
Beispiel: **Schiefe Parallelprojektion in die Aufrissebene (Kavalierprojektion)**

Die Bildebene ist die frontal stehende lotrechte Aufrissebene.

Alle zur Aufrissebene parallelen ebenen Figuren werden in wahrer Größe dargestellt.

Durch Angabe der **Richtung** (i. d. R. wird diese durch den Winkel α gegenüber einer horizontalen Grundlinie bestimmt) und des **Verkürzungsverhältnisses** für die *im Raum senkrecht zur Bildebene verlaufenden Strecken* ist die Abbildung eindeutig bestimmt.

(aus: Krauter: Erlebnis Elementargeometrie)



24. Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a .

Bei diesem Würfel werden die Ecken durch ebene Schnitte (Schnittebenen senkrecht zu den Raumdiagonalen des Würfels) so abgeschnitten, dass ein spezieller Archimedischer Körper entsteht: seine Oberfläche besteht aus 6 regelmäßigen Achtecken und aus 8 gleichseitigen Dreiecken („Würfelstumpf“)

- Stellen Sie diesen Würfelstumpf in Kavaliersprojektion mit $k = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 45^\circ$ dar. Wählen Sie für die Kantenlänge des Würfels $a = 8$ cm; für die Kantenlänge s des Würfelstumpfs dürfen Sie dann $s \approx 3,3$ cm verwenden.
- Wie viele Kanten und wie viele Ecken besitzt dieser Würfelstumpf? Beschreiben Sie kurz Ihre Abzählstrategie.
- Berechnen Sie die Kantenlänge s des Würfelstumpfs.
(Ergebnis: $s = \frac{a}{1 + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1) \cdot a$)
- Wie groß ist die Oberfläche des Würfelstumpfs?
- Bestimmen Sie das Volumen des Würfelstumpfs.
(Für das Volumen einer Pyramide mit der Grundflächengröße G und der Höhe h dürfen Sie die Formel $V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ als bekannt voraussetzen)

25. Gegeben sei ein Tetraeder mit der Kantenlänge a (Abbildung unten).

(a) Berechnen Sie

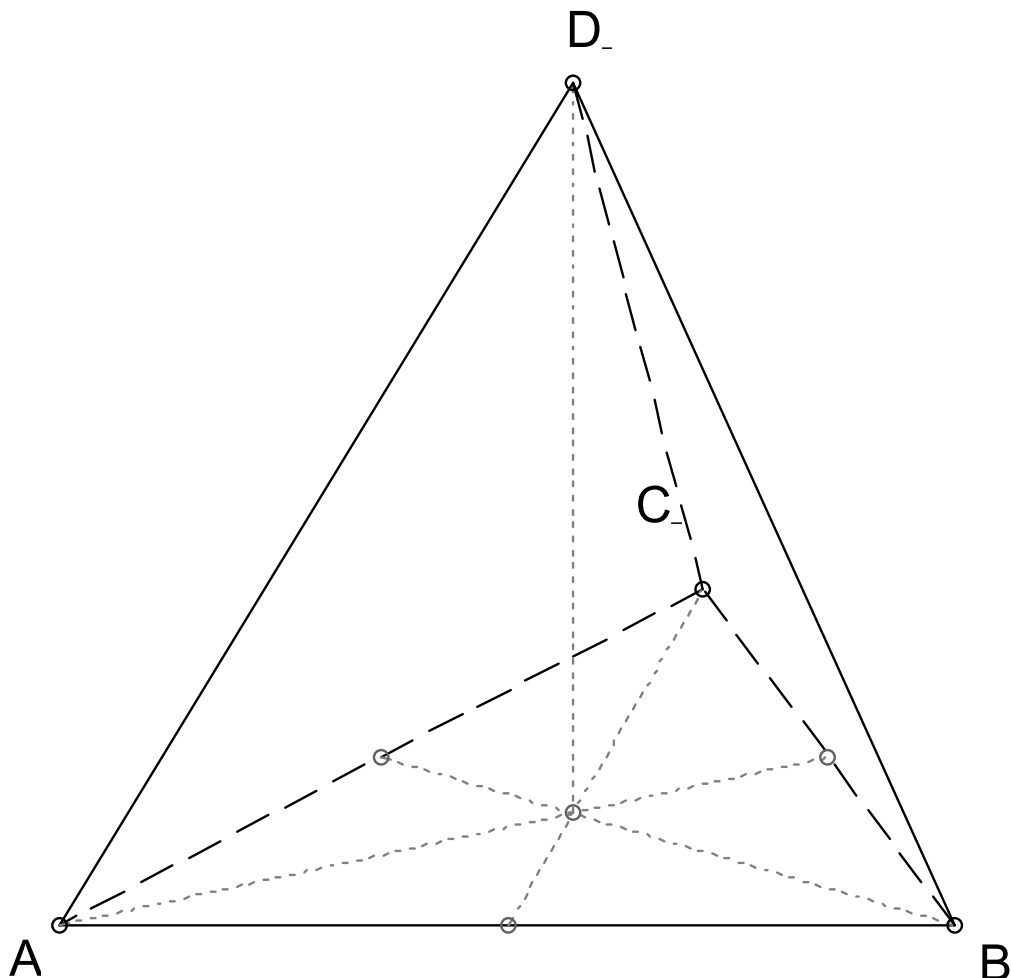
- die Höhe h_T des Tetraeders,
- die Radien der Inkugel und der Umkugel (r_i und r_u),
- den Winkel α , den zwei Seitenflächen miteinander einschließen (näherungsweise),
- den Winkel β , den eine Kante mit einer Seitenfläche bildet (näherungsweise).

Zeichnen Sie zu den Berechnungen einen geeigneten Schnitt durch den Körper auf ein getrenntes Blatt.

(b) Zeichnen Sie in das Schrägbild den zum Tetraeder dualen Körper ein (konstruieren!).

Berechnen Sie, wie das Volumen dieses Körpers mit dem des ursprünglichen Körpers zusammenhängt

(Volumina nicht explizit berechnen, sondern Argumente über den Zusammenhang der beiden Körper nutzen).



26. Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a .

Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen, entsteht ein zum Würfel dualer Körper.

- a) Warum ist der entstehende Körper wiederum ein Platonischer Körper?
- b) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Würfels und des dazu dualen Körpers (Oktaeder).

Wählen Sie $a = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, $k = 0,5$.

- c) Bestimmen Sie Volumen und Oberfläche des Oktaeders.
- d) Zum Oktaeder wird wiederum der duale Körper gebildet; es entsteht ein Würfel.

Zeichnen Sie diesen kleinen Würfel in Ihr Schrägbild ein.

Begründen Sie, dass die Kante des kleinen Würfels $\frac{1}{3} \cdot a$ lang ist.

Vergleichen Sie die Oberflächen bzw. die Volumina der beiden Würfel.