Übungen zur Vertiefung der Geometrie (Geometrie II)

WS 2006/07 | 23. Oktober 2006 | Blatt 1

1. Alternative Definition der zentrischen Streckung

Zeigen Sie (unter Voraussetzung der Strahlensätze):
Jede bijektive, geradentreue Abbildung der Ebene in sich, die einen Fixpunkt Z besitzt und die jede Gerade g auf eine zu g parallele Gerade g' abbildet, ist eine zentrische Streckung.

2. Zentrisch Strecken durch Zeichnen von Parallelen

Von einer zentrischen Streckung ist das Zentrum Z und ein Punktepaar P, P' gegeben. Konstruieren Sie allein durch Zeichnen von Parallelen zu einem gegebenen Dreieck ABC das Bilddreieck A´B´C´.

3. Teilen von Strecken in gegebenem Verhältnis mit Zirkel und Lineal

Gegeben ist eine beliebige Strecke $\overline{AB}$. Teilen Sie die Strecke mit Zirkel und Lineal im Verhältnis 7:5.

4. Verkettung von zwei zentrischen Streckungen

Ein (von Ihnen gewähltes beliebiges) Dreieck ABC soll an $Z_1(0,0)$ mit dem Streckfaktor $k_1=3$ gestreckt werden. Das Bilddreieck A'B'C' wird an $Z_2(0,6)$ mit dem Streckfaktor $k_2 = -1/2$ gestreckt, es entsteht
Δ A"B"C".

(a) Zeichnen Sie.

(b) Durch welche Abbildung wird Δ ABC auf Δ A"B"C" abgebildet? Geben Sie die charakteristischen Daten der Abbildung an (durch Ablesen aus der Konstruktion).
Sie dürfen den Satz verwenden, dass die Verkettung von zwei zentrischen Streckungen mit Streckfaktoren k_1 und k_2 wieder eine zentrische Streckung ergibt, wenn $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ ist.

5. Punktspiegelung und zentrische Streckung

Begründen Sie:

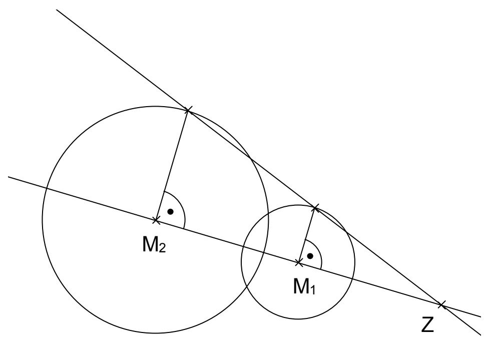
- Die Verkettung einer zentrischen Streckung, die keine Punktspiegelung ist, mit einer Punktspiegelung (an einem beliebigen Punkt) ist eine zentrische Streckung
- Die Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Drehung $D_{Z,\alpha}$ (mit $0<\alpha<180°$) ist keine zentrische Streckung

6. Zentrische Ähnlichkeit zweier Kreise

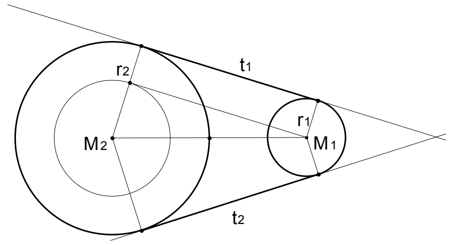
Gegeben sind zwei beliebige Kreise $K_1(M_1,r_1)$ und $K_2(M_2,r_2)$.

Beweisen Sie, dass es immer eine zentrische Streckung mit einem Zentrum Z gibt, die die Kreise auf einander abbildet.

Hinweis: Nebenstehende Skizze.



7. Gemeinsame Tangenten an zwei Kreise



Gegeben sind zwei Kreise $K_1(M_1,r_1)$ und $K_2(M_2,r_2)$ mit $\overline{M_1M_2}$ = 10 cm, r_1=2 cm, r_2=5 cm.

Man kann die gemeinsamen äußeren Tangenten an die Kreise. gemäß der nebenstehenden Skizze konstruieren (→ Geometrie I, ohne Verwendung der zentrischen Streckung).

Konstruieren Sie nun mit Hilfe der vorangehenden Aufgabe die gemeinsamen Tangenten an die Kreise auf andere Weise.

8. Konstruktionen von Figuren mit Hilfe der zentrischen Streckung, der Strahlensätze oder den Sätzen aus der Satzgruppe des Pythagoras.

Hinweis. Häufig hilft folgendes Verfahren: Konstruieren Sie zunächst eine zur Lösung ähnliche Figur mit anderen Längen als angegeben.
Durch anschließende zentrische Streckung mit geeignetem Streckzentrum sorgt man dafür, dass die Längen dann das richtige Maß erhalten.

(a) Gegeben ist eine beliebige Strecke s. Konstruieren Sie ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis
2 : 3 dessen Umfang so lang wie s ist.

(b) Konstruieren Sie in einem beliebigen Dreieck mindestens ein Quadrat, dessen Ecken alle auf den Seiten des Dreiecks liegen.
Bei welchen Dreiecken gibt es mehrere solche Quadrate?

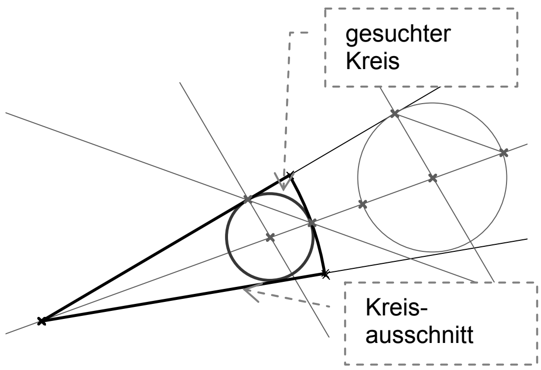
Hinweis: Konstruieren Sie zunächst ein Quadrat, für das nur 3 Ecken auf den Dreiecksseiten liegen. Durch anschließende zentrische Streckung von einem Eckpunkt des Dreiecks aus erhält man dann ein Quadrat, das die Anforderungen erfüllt.

(c) Konstruieren Sie ein Dreieck mit dem Seitenverhältnis a : b : c = 5 : 6 : 7 und einem gegebenen Umkreisradius r = 5 cm.

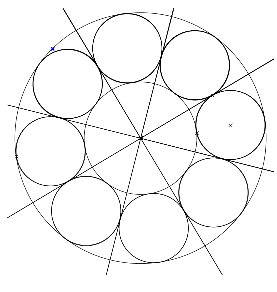
(d) Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck, bei dem der Inkreisradius um 2 cm kürzer ist als der Umkreisradius.

(e) Gegeben ist ein beliebiges Quadrat. Konstruieren Sie ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 2 : 3, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Quadrats ist.
(Hinweis: z.B. Höhensatz oder Kathetensatz benützen).

9. Kirchenfenster



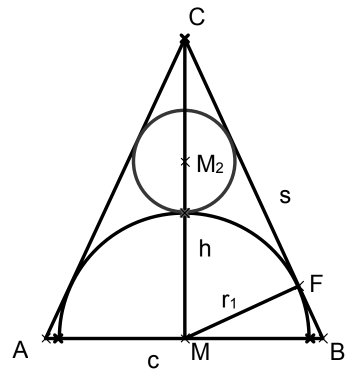
Zu einem gegebenen Kreisausschnitt soll ein Kreis konstruiert werden, der die beiden Radien und die Kreislinie von innen berührt. Sie sehen die Konstruktionslinien in der nebenstehenden Zeichnung. Erläutern Sie das Konstruktionsprinzip und führen Sie die Konstruktion durch.



Konstruieren Sie mit Hilfe der vorangehenden Konstruktion das nebenstehende Kirchenfenster.

Welche anderen Kirchenfenster können Sie auf diese Art konstruieren?

10. Noch ein Kirchenfenster



Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Seitenlänge c und der Höhe h (=h_c) ist gegeben. Mit dem Mittelpunk M der Seite c wird ein Halbkreis gezeichnet, der die beiden anderen Schenkel des Dreiecks berührt, sein Radius wird mit r_1 bezeichnet.

(a) Konstruieren sie einen Kreis mit Mittelpunkt M_2, der den Halbkreis und die beiden Schenkel des Dreiecks berührt (s.nebenstehende Skizze).

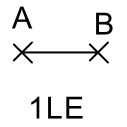
(b) Berechnen Sie s und r_1 in Abhängigkeit von c und h.

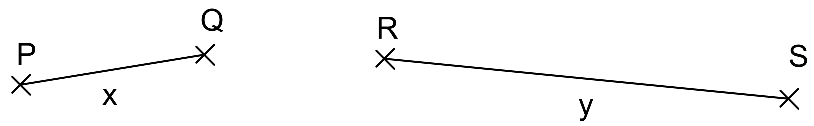
(c) Zeigen Sie, dass für den Radius r_2 gilt: $r_2 = \frac{r_1(h-r_1)}{(h+r_1)}$

11. „Rechnen“ mit Zirkel und Lineal

Gegeben ist eine Strecke $\overline{AB}$, die unsere Längeneinheit (LE) repräsentiert; wenn Sie wollen, können Sie sich darunter z.B. die Längeneinheit 1 cm vorstellen.

Zu zwei Strecken $\overline{PQ}$ mit der Länge x LE und $\overline{RS}$ mit der Länge y LE sollen Sie nur mit Zirkel und Lineal Strecken der Länge x+y LE, y-x LE , x·y LE und x:y LE, 1:x LE konstruieren.

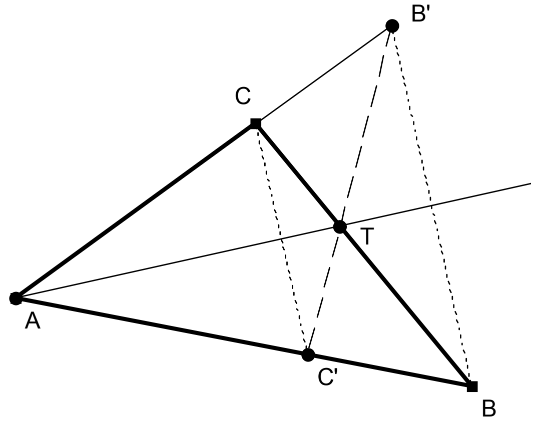




12. Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks in ähnliche Teildreiecke

Ein rechtwinkliges Dreieck ABC (γ = 90°) wird durch die Höhe $\overline{CD}$ in zwei Dreiecke zerlegt.
Zeigen Sie, dass die Dreiecke ABC, ACD und BCD zueinander ähnlich sind.
Welche Sätze lassen sich aus den Verhältnissen der Dreiecksseiten gewinnen?

13. Winkelhalbierendensatz für Dreiecke



Beweisen Sie den Winkelhalbierendensatz für Dreiecke:

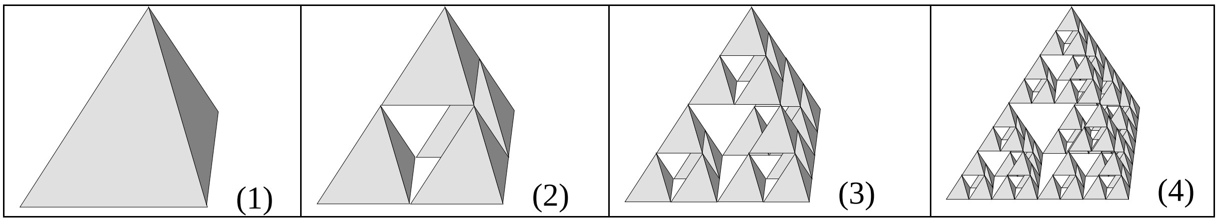
Die Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der dem Winkel anliegenden Seiten

|CT| : | TB| = |AC| : |AB|

Hinweis: Spiegeln Sie das Dreieck an der Winkelhalbierenden. Verwenden Sie Strahlensätze.

14. Tetraeder

Bei einem Tetraeder (1) werden die Kantenmitten verbunden und der dabei entstehende Körper herausgeschnitten, so dass ein Körper übrig bleibt, der aus kleineren Tetraedern zusammengesetzt ist (2).



(a) Auf wie viel Prozent seines Volumens wurde der ursprüngliche Tetraeder bei dieser Operation reduziert?

(b) In welcher Beziehung steht die Oberfläche des entstandenen Körpers (2) zur Oberfläche des Tetraeders (1)?

(c) Beschreiben Sie die Form des herausgeschnittenen Körpers. Kennen Sie einen Namen für diesen Körper?

(d) Der beschriebene Prozess wird mit den übrig gebliebenen kleineren Tetraedern immer weiter fortgesetzt (3), (4), …. Was kann man über Volumen und Oberfläche der entstehenden Körper sagen?

15. DIN-Format (experimentell)

Material: Papier DIN A4, A5, A6.

- Versuchen Sie herauszufinden, ob sich die Blätter im DIN A6 und DIN A5 Format von einer Ecke aus so zentrisch strecken lassen, dass sich das DIN A4 Blatt ergibt.
- Wenn das geht, wie groß sind die Streckfaktoren?
- Was können Sie über die Flächeninhalte sagen?

DIN-Formate unseres Papiers

Maße eines Din-A4-Blattes (näherungsweise): Breite 21 cm , Länge ca. 29,7 cm.

Eigenschaften des DIN-Formates:

(1) Alle DIN-Formate haben „die gleiche Form".
(2) Wenn man z.B. einen DIN-A3-Bogen halbiert dann erhält man einen DIN-A4-Bogen usw..
(3) Ein DIN-A0-Bogen hat den Flächeninhalt $1m^2$.

16. DIN-Formate

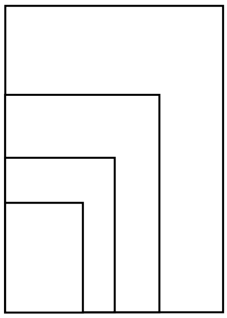
(a) Was bedeutet Eigenschaft (1) in der mathematischen Fachsprache?

(b) Die Eigenschaften (1) und (2) legen das Verhältnis von Länge zu Breite der DIN-Bögen eindeutig fest.
Berechnen Sie dieses Verhältnis. Erklären Sie Ihre Rechnung so dass Schüler der 9. Klassenstufe es verstehen können.

(c) Welche Maße ergeben sich für den DIN-A0-Bogen?

(d) Welche Maße ergeben sich aus den Maßen des DIN-A0-Blattes für die DIN-Formate von DIN-A1 bis DIN-A6?

(e) Blätter von DIN-A6 bis DIN-A3 werden so auf den Tisch gelegt, dass ihre linken unteren Ecken übereinander liegen und die Ränder zueinander parallel sind (s.Skizze).
Wie kann man die Eigenschaft (1) experimentell überprüfen?
Was ändert sich, wenn man mit einem Blatt Papier mit den Maßen 30 cm auf 20 cm beginnt und das Blatt (genauer eine Kopie davon) immer wieder halbiert und die entstehenden Blätter genauso hin legt?



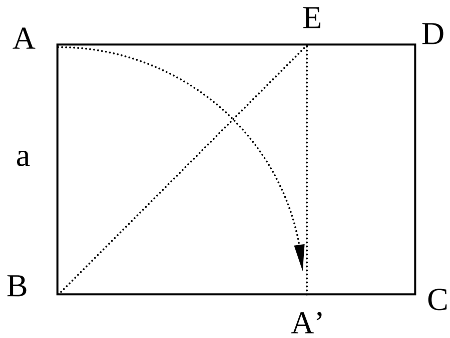
(f) Warum muss man auf einem Photokopierer die Verkleinerung auf *„71%“* einstellen, wenn man zwei DIN-A4 Blätter auf ein DIN-A4 Blatt kopieren will?

(g) Auf welche Verkleinerung muss man einen Photokopierer einstellen, wenn man vier DIN-A4 Blätter auf ein DIN-A4 Blatt kopieren will?

(h) Das Format US-Brief (*Letter*) hat die Maße 8,5 inch x 11 inch (21,59cm x 27,94cm), das Format US-Lang die Maße 8,5 inch x 14 inch (21,59cm x 35,56cm). Auf welche Verkleinerung muss ein Amerikaner jeweils auf einen Photokopierer einstellen, wenn er zwei Blätter seines Formats auf eines verkleinern will? Wie viel Prozent an Fläche verliert er jeweils dabei?

17. Regelmäßiges Achteck aus einem DIN-Blatt

Ein DIN-A4 Blatt soll so gefaltet werden, dass die Ecke A auf die gegenüberliegende Seite kommt und die Falte durch die benachbarte Ecke B verläuft (s. Skizze).



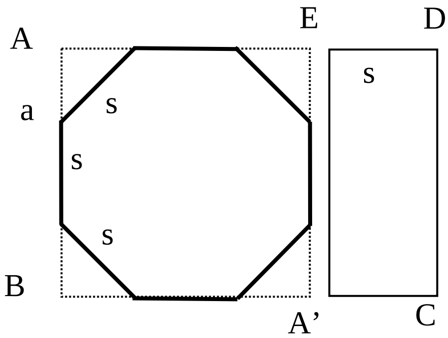
(a) Zeigen Sie, dass ABA’E ein Quadrat ist.

(b) Zeigen Sie, dass $|\overline{BE}| = |\overline{AD}|$ ist.

(c) Man schneidet das Quadrat ABA’E ab. Bei diesem Quadrat sollen die Ecken so abgeschnitten werden, dass ein regelmäßiges Achteck entsteht mit der Seitenlänge s entsteht.

(d) Berechnen Sie s in Abhängigkeit der Seitenlänge a des Quadrates.
Zeigen Sie, dass s gerade die Breite des abgeschnittenen Streifens ist.

(e) Stellen Sie mit diesen Kenntnissen ein regelmäßiges Achteck aus einem DIN-A4 Blatt her.

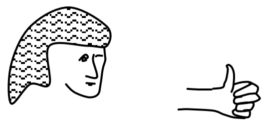


18. Peilen

Daumenbreite. Material: Maßbänder.

Sie peilen Ihren aufgestellten Daumen der ausgestreckten Hand mit einem einzigen Auge an (anderes Auge schließen). Wie weit sind Sie von einer Wand entfernt, wenn Ihr Daumen in seiner Breite ein Fenster von 1m Breite genau verdeckt?
Skizze, Messung, Rechnung.

19. Daumensprung



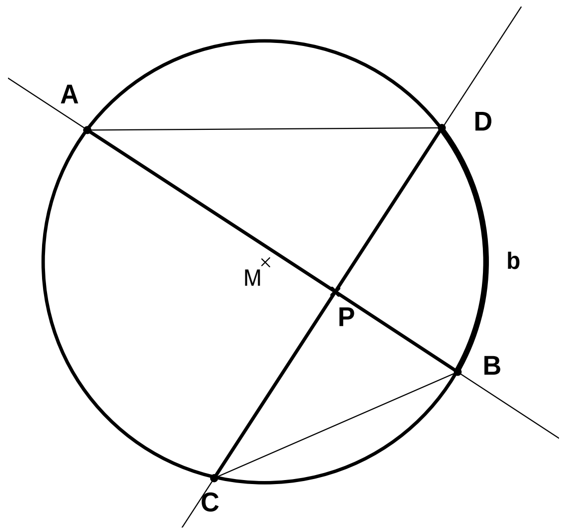
Daumensprung. Material: Maßbänder.

Wenn Sie den aufgestellten Daumen am ausgestreckten Arm abwechselnd mit dem linken und dem rechten Auge anpeilen, dann scheint er vor dem Hintergrund hin und her zu springen.

- Erklären Sie diesen Effekt an Hand einer Skizze!
- Wie weit sind Sie ungefähr von einer Wand weg, wenn Ihr Daumen dort einen Sprung von 1 m macht? Skizze, Messungen, Rechnung.
- Prüfen Sie Ihre Theorie durch Nachmessen: Kleben Sie ein DIN A4 Blatt (29,7cm x 21 cm) an die Wand, gehen Sie so weit weg, dass das Blatt gerade einen Daumensprung breit ist und messen Sie die wesentlichen Längen.

20. Sätze am Kreis: Sehnensatz und Sekantensatz

Gegeben ist ein Kreis K. Durch einen Punkt P, der nicht auf der Kreislinie liegt, werden zwei Geraden gezeichnet, die den Kreis in den Punkten A und B bzw. C und D schneiden.
Wir unterscheiden zwei Fälle:
1.Fall: P liegt im Inneren des Kreises.
2.Fall: P liegt außerhalb des Kreises.

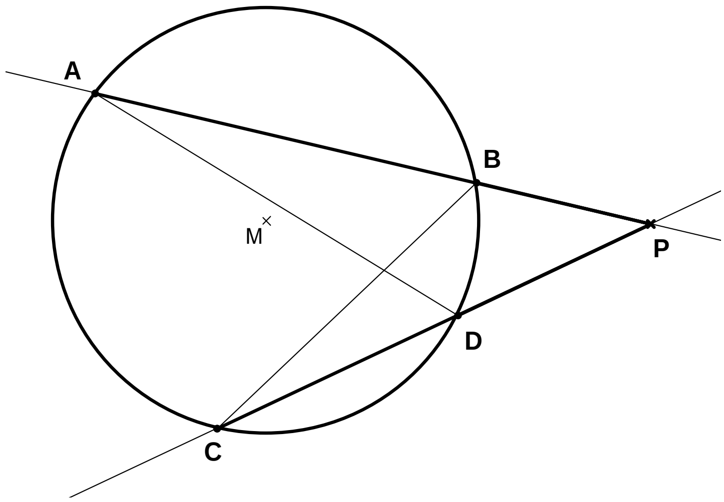


Zeigen Sie, dass in beiden Fällen die Dreiecke PBC und PDA ähnlich zueinander sind.

Begründen Sie damit für den ersten Fall den

Sehnensatz
Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises in einem Punkt P im Inneren des Kreises, dann sind die Produkte aus den Sehnenabschnitten gleich groß, d.h.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$



und im zweiten Fall den

Sekantensatz
Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises in einem Punkt P außerhalb des Kreises, dann sind die Produkte aus den Sekantenabschnitten gleich groß, d.h.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Interpretieren Sie die beiden Sätze als Flächensätze (über Rechtecksflächen).

Deuten Sie den Spezialfall des 2.Satzes, wenn eine Sekante in eine Tangente übergeht (z.B. wenn A=B wird) → **Sekanten-Tangentensatz.**