

Aufgaben zur Vertiefung der Geometrie

WS 2005/06

5./6. Dezember 2005

Blatt 3

1. Umkugel und Innenkugel eines Tetraeders

Leiten Sie die Formel für das Volumen, die Oberfläche, den Radius der umbeschriebenen und der einbeschriebenen Kugel eines regelmäßigen Tetraeders abhängig von der Kantenlänge a her.

Zeichnen Sie die entsprechenden Körper im Grund- und Aufriss, wobei eine Seitenfläche des Tetraeders in der Grundrissebene liegt und eine Kante, die nicht in der Grundrissebene liegt, parallel zur Aufrissebene verläuft.

2. Oktaeder und Würfel

In einem regulären Oktaeder mit der Kantenlänge 6 cm werden die Schwerpunkte der Seitenflächen so miteinander verbunden, dass ein einbeschriebener Würfel entsteht (der zum Oktaeder duale Körper).

a) Konstruieren Sie die Grund- und Aufrisse der beiden Körper, so dass „der Oktaeder auf der Spitze steht“ (d.h. die Raumdiagonale senkrecht auf der Grundrissebene steht) und zwei Kanten des Oktaeders parallel zur Aufrissebene verlaufen. Geben Sie eine kurze Konstruktionsbeschreibung.

b) Zeichnen Sie die Figur in Kavalierprojektion ($k=0,5$ und $\alpha=45^\circ$) und in Militärprojektion (Winkel zur Horizontalen 60°). Sie können die benötigten Daten aus a) übernehmen.

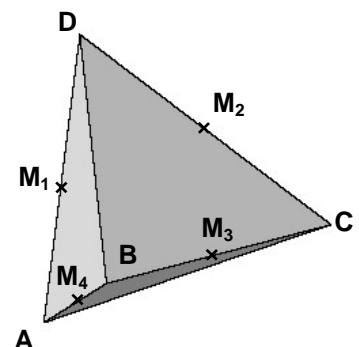
3. Tetraederschnitt

In einem regulären Tetraeder wird ein ebener Schnitt durch die drei Kantenmitten M_1 , M_2 und M_3 gelegt. Begründen Sie, dass der Schnitt auch durch die Kantenmitte M_4 geht.

Welche Form hat die Schnittfläche?

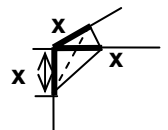
Zeichnen Sie die Figur im Grundriss und im Aufriss, wobei das Dreieck ABC in der Grundrissebene liegt und AC parallel zur Rissachse verläuft.

Zeichnen Sie auch ein Schrägbild in Kavalierprojektion ($k=0,5$ und $\alpha=45^\circ$) und markieren Sie den Restkörper, der die Ecken A und C enthält, mit Farben.



4. Verstümmelte Würfel

Von einem Würfel mit der Kantenlänge a wird an jeder Ecke eine Dreieckspyramide mit der Seitenkante x abgeschnitten (Skizze).



a) Zeichnen Sie für $x = a/2$ den Würfel und den Restkörper in Grund- und Aufriss sowie in Kavalier- und Militärprojektion. Verwenden Sie Farben!

Beschreiben Sie die Seitenflächen und die Ecken des Restkörpers und verifizieren Sie dafür die Eulersche Polyederformel.

Zeigen Sie, dass es sich beim Restkörper um einen archimedischen Körper handelt, d.h. einen konvexen Körper, dessen Seitenflächen alle regelmäßige Vielecke sind und dessen Ecken alle „von der gleichen Art“ sind (zu je zwei Ecken gibt es eine Deckabbildung des Körpers, die die Ecken aufeinander abbildet).

Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina von Restkörper und Würfel.

b) Es gibt noch einen zweiten Wert für x , der zu einem archimedischen Restkörper führt.

Bestimmen Sie diesen Wert, beschreiben Sie die Flächen und Ecken des Körpers und zeichnen Sie wieder Grund- und Aufriss sowie die Darstellung in Kavalier- und Militärprojektion.