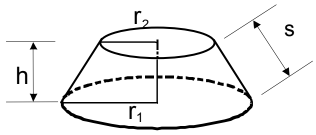
Aufgaben zur Vertiefung der Geometrie

WS 2005/06 28./29. November 2005 Blatt 2

1. Formel für das Volumen und die Oberfläche von Stümpfen

Beweisen Sie die Formeln für das Volumen, die Mantelfläche und die Oberfläche

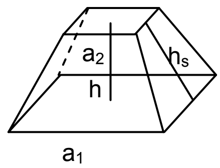
a) eines Kegelstumpfs mit den Radien r_1 und r_2, der Höhe h und der Seitenlinie s,



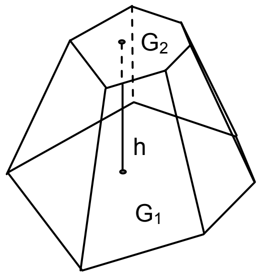
$$V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right), \quad M_{Kegelstumpf} = \pi \cdot s(r_1 + r_2),$$

$$O_{Kegelstumpf} = M_{Kegelstumpf} + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

b) eines quadratischen Pyramidenstumpfs mit den Quadratseiten a_1 und a_2, der Höhe h und der Seitenhöhe h_s (Formeln analog zu a)).



c) Beweisen Sie die Formeln für das Volumen eines Pyramiden- oder Kegelstumpfs mit der Grundfläche G_1 ,der Deckfläche G_2 und der Höhe h.

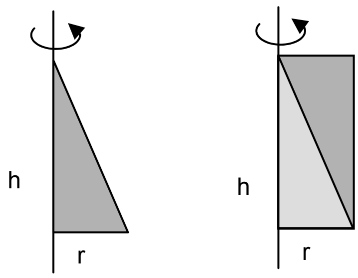


$$V_{Stumpf} = \frac{1}{3}h\left(G_1 + \sqrt{G_1}\sqrt{G_2} + G_2\right)$$

Teile a) und b) sind Spezialfälle von c), sie sollen aber zuerst diese einfacheren Fälle bearbeiten.

2. Kegelvolumen viel einfacher bestimmen?

Lässt man ein Dreieck um eine Seite rotieren, dann entsteht ein Kegel, lässt man ein Rechteck rotieren, dann erhält man einen Zylinder (nebenstehende Skizze). Der Flächeninhalt des Dreiecks ist die Hälfte des Flächeninhalts des rotierenden Rechtecks, also hat der Kegel die Hälfte des Volumens des Zylinders. Daraus erhält man sofort $V_{Kegel} = \frac{1}{2}V_{Zylinder} = \frac{1}{2}\pi r^2 h$.

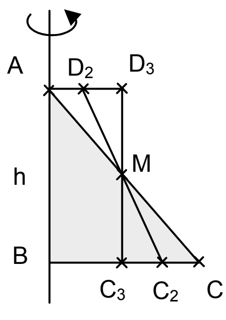


3. Rotationskörper

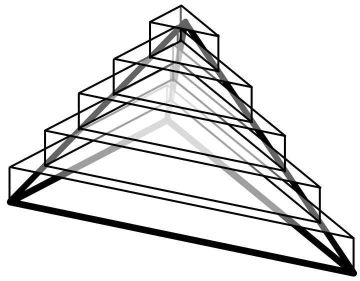
In der nebenstehenden Skizze sollen die Figuren ABC , ABC_2D_2 , ABC_3D_3 um die gezeichnete Achse rotieren. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.

Welche Körper entstehen bei der Rotation?

Können Sie ohne zu rechnen etwas über die Volumina der Rotationskörper sagen (gleich, welcher hat größtes oder kleinstes Volumen)?



4. Annäherung von Pyramiden durch Treppenkörper



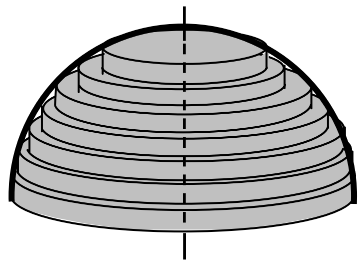
Pyramiden können durch Treppenkörper aus senkrechten Prismen angenähert werden, für die die Volumenformel $V_{Prisma} = G_{Prisma} \cdot h$ bewiesen sei.
Teilen Sie die Höhe der Pyramide in n gleiche Teile und berechnen Sie das Volumen des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Treppenkörpers (abhängig von G, h und n). Zeigen Sie, dass man durch den Grenzübergang $n \to \infty$ daraus die Volumenformel für Pyramiden erhält.

Sie benötigen dazu sicher eine Formel (1) für die Summe der ersten n Quadratzahlen:

(1) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Bestätigen Sie die Gültigkeit der Formel für n=1, 2, 3, 4, 5.
- Beweisen Sie diese Formel durch vollständige Induktion.

5. Annäherung einer Kugel durch Treppenkörper



Auch eine Halbkugel kann durch Treppenkörper angenähert werden.
In der Skizze ist die Approximation von innen dargestellt.

Die Höhe der Halbkugel soll in n gleich große Teile geteilt werden.

a) Fertigen Sie für n=4 je eine Zeichnung eines geeigneten Schnittes für die beiden Approximationen an und schreiben Sie für beide Approximationen das Volumen der Treppenkörper auf.

b) Führen Sie die Berechnung für eine der Approximationen allgemein für n aus und bestimmen Sie den Grenzwert für $n \to \infty$. Sie benötigen wieder (1) aus Aufgabe 4.

c) Können Sie mit nur kurzer Rechnung angeben, welche Differenz sich für n=1000 zwischen der äußeren und der inneren Approximation für r=1 ergeben wird?
Für welche Art von Körpern lässt sich die letzte Art der Abschätzung des Fehlers in dieser Weise durchführen?

6. Quadratur des Kreises (ebene Geometrie)

Unter dem Problem der „Quadratur des Kreises“ versteht man seit der Antike das Problem, zu einem durch seinen Radius gegebenen Kreis nur mit Zirkel und Lineal ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren.

Zeigen Sie: wenn man zu einer einzigen Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $\pi \cdot 1$ konstruieren könnte, dann wäre auch das Problem der Quadratur des Kreises gelöst.