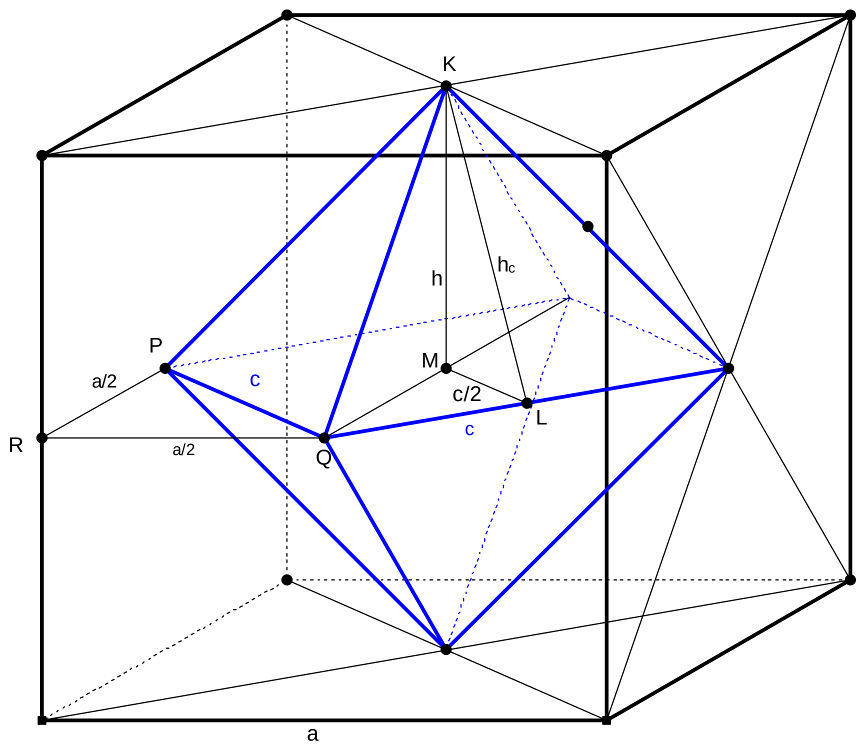
WS 2006/07: Geometrie II

Lösung Aufgabe 26.

a)

I. Der Körper ist konvex.

II. Die Kanten des entstehenden Oktaeders sind alle gleich lang (folgt aus der Geometrie des Würfels!) Daher müssen die Seitenflächen des Oktaeders gleichseitige Dreiecke sein → die Seitenflächen sind kongruent.



b)

Die Zeichnung ist mit dem Programm Euklid angefertigt worden. Hilfslinien wie Höhen oder Diagonalen, welche zur Konstruktion notwendig waren, wurden der Übersichtlichkeit halber teilweise wieder gelöscht. Da es sich um eine Parallelprojektion handelt, bleiben in der Projektion Parallelen und Teilverhältnisse erhalten. Zu beachten ist bei der Zeichnung, dass Winkel nicht erhalten bleiben (Außer diejenigen der Aufrissebene).

Da es sich bei den Seitenflächen des Oktaeders um gleichseitige Dreiecke handelt, verlaufen die Höhen stets durch den Mittelpunkt der entsprechenden Seiten. Deshalb lassen sich die Höhen aufgrund der Teilverhältnistreue maßstabsgetreu einzeichnen.

c)

Zur Volumenbestimmung des Oktaeders werde es in zwei gleiche Pyramiden zerlegt. Das Volumen des Oktaeders ist dann: $V = \frac{2}{3} \cdot G \cdot h$

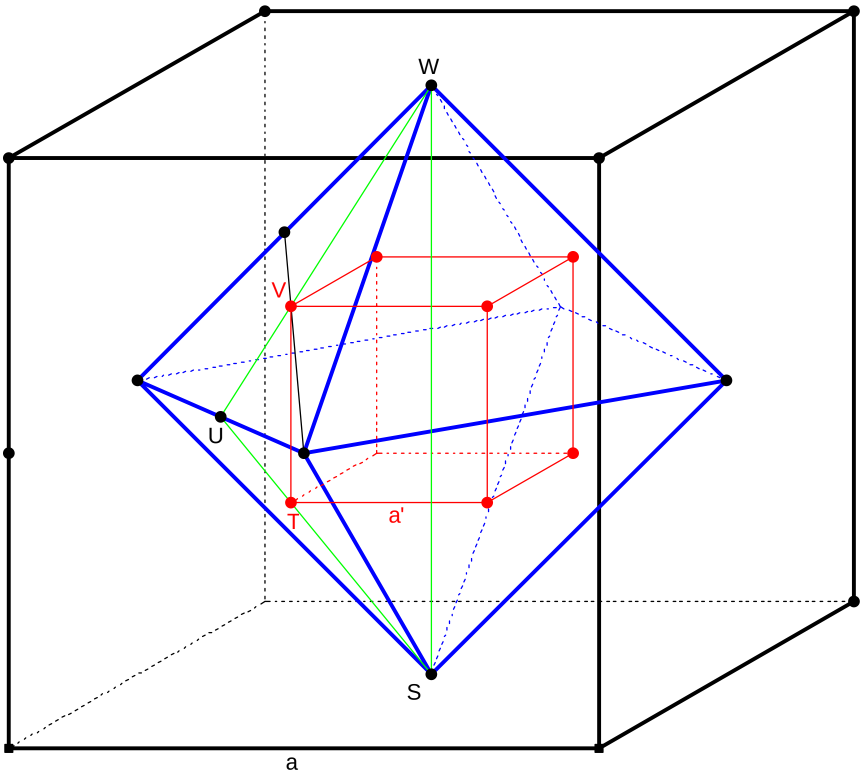
Die Grundfläche ist ein Quadrat der Seitenlänge c, die Höhe h ist h=a/2 (siehe Zeichnung!). Es bleibt c zu berechnen:

Im rechtwinkligen Dreieck PQR gilt: $c = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2} a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ Nun lässt sich das Volumen berechnen: $V = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6} a^3$

Oberflächenbestimmung: Das Oktaeder besteht aus acht kongruenten, gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge c und der Höhe h_c. Daher kann man die Oberfläche folgendermaßen berechnen: $O = 4 \cdot c \cdot h_c$

Die Höhe des Dreiecks lässt sich aus den Zusammenhängen im rechwinkl. Dreieck KLM berechnen: $h_c = \sqrt{h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot a$

→ $O = 4 \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot a = \frac{4a^2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \sqrt{3} \cdot a^2$



d) *Zur Konstruktion:*

Auch hier wurden Hilfslinien wieder ausgeblendet. Die Ecken des entstehenden Würfels sollen die Mittelpunkte der Seitenflächen des Oktaeders sein. Den „Flächenmittelpunkt“ (= Schwerpunkt)eines Dreiecks erhält man durch Schnitt der Seitenhalbierenden.

Der gefundene Schwerpunkt teilt stets jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1. Da es sich um gleichseitige Dreiecke handelt, sind die Seitenhalbierenden (unter anderem) auch die Höhen des Dreiecks.

Begründung für die Kantenlänge es kleinen Würfels $a' = \frac{1}{3}a$ *:*

$3 \cdot \overline{UV} = \frac{1}{3} \cdot \overline{UW} \Leftrightarrow \frac{\overline{UV}}{\overline{UW}} = \frac{1}{3}$ aufgrund des Verhältnisses in welchem der Schwerpunkt die Seitenhalbierende teilt. Im Dreieck SWU lässt sich ein Strahlensatz anwenden: $\frac{\overline{UV}}{\overline{UW}} = \frac{\overline{TV}}{\overline{SW}}$

Nun ist $\overline{TV}$ = a’ und $\overline{SW}$ =a ; daraus folgt: $\frac{a'}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a' = \frac{1}{3}a$

→ Die Oberfläche des kleinen Würfels ist 1/9 von derjenigen des großen Würfels (Faktor 1/3 geht quadratisch ein!)

→ Das Volumen des kleinen Würfels ist 1/27 von demjenigen des großen Würfels (Faktor 1/3 wird in die dritte Potenz erhoben!)