## WS 2006/07: Geometrie II

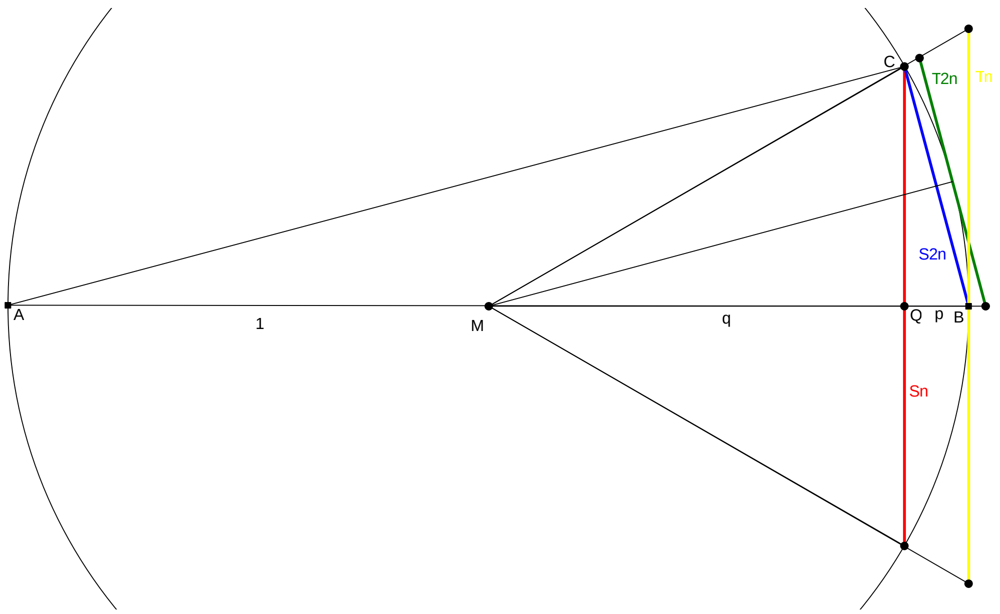
## Lösung Aufgabe 23.

**a)**

In der Vorlesung (im Skript: Kapitel 2, S. 41/42)wurde ein Näherungsverfahren zur Berechnung des Kreisumfangs vorgestellt. Dabei wurde der Kreisumfang von unten durch den Umfang einbeschriebener n-Ecke angenähert. Folgender Zusammenhang wurde hergeleitet: $S_{2n} = \dfrac{S_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-S_n^{\;2}}}}$.

Bei bekannter Seitenlänge $S_n$ eines einbeschriebenen n-Ecks kann man so die Seitenlänge des sich im nächsten Schritt ergebenden 2n-Ecks ausrechnen.

Man beginne mit dem Startwert n=6, da aufgrund der geometrischen Zusammenhänge die Seitenlänge des 6-Ecks mit dem Radius des Kreises übereinstimmt.




In dieser Aufgabe soll nun ein Zusammenhang gefunden werden, welcher es erlaubt das Näherungsverfahren auch von oben, mit Hilfe umbeschriebener n-Ecke durchzuführen.

Dazu soll ein Ausdruck für $T_n$ in Abhängigkeit von $S_n$ gefunden werden. ($S_n$ ist ja bekannt!)

Die Seitenlänge des umbeschriebenen n-Ecks ist $T_n$. Aufgrund der Strahlensätze gilt:

$$\frac{T_n}{S_n} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MQ}} \Leftrightarrow T_n = \frac{S_n}{\overline{MQ}} \;; \quad \overline{MQ} = 1\text{-p} \;; \; \overline{MB} = 1$$

Aufgrund des Höhensatzes im Dreieck ABC gilt: $p = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$ (s. Vorlesung). Es folgt:

$$T_n = \frac{S_n}{1 - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}\right)} = \frac{S_n}{\sqrt{1 - \frac{(S_n)^2}{4}}} = \frac{2S_n}{\sqrt{4 - S_n^{\ 2}}}$$

$$\Rightarrow T_{2n} = \frac{2S_{2n}}{\sqrt{4 - S_{2n}^{\ 2}}}$$

Umfang des einbeschriebenen n-Ecks: $U_{ein} = n \cdot S_n$

$\Rightarrow$ Näherung für $\pi$ von unten: $\pi = \frac{U}{d} \approx \frac{U_{ein}}{2} = \frac{n}{2} S_n$

Umfang des umbeschriebenen n-Ecks: $U_{um} = n \cdot T_n$

$\Rightarrow$ Näherung für $\pi$ von oben: $\pi \approx \frac{U_{um}}{2} = \frac{n}{2} T_n$

Mit Hilfe von Excel lassen sich die Näherungen bestimmen:

| n | Sn | U_ein / 2 | Tn | U_um / 2 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 3,00000000000000 | 1,154700538 | 3,46410161513776 |
| 12 | 0,51763809 | 3,10582854123025 | 0,535898385 | 3,21539030917347 |
| 24 | 0,261052384 | 3,13262861328124 | 0,263304995 | 3,15965994209750 |
| 48 | 0,130806258 | 3,13935020304687 | 0,131086926 | 3,14608621513143 |
| 96 | 0,065438166 | 3,14103195089051 | 0,065473221 | 3,14271459964537 |
| 192 | 0,032723463 | 3,14145247228546 | 0,032727844 | 3,14187304997982 |
| 384 | 0,016362279 | 3,14155760791186 | 0,016362827 | 3,14166274705685 |
| 768 | 0,008181208 | 3,14158389214832 | 0,008181277 | 3,14161017660469 |
| 1536 | 0,004090613 | 3,14159046322805 | 0,004090621 | 3,14159703432153 |
| 3072 | 0,002045307 | 3,14159210599927 | 0,002045308 | 3,14159374877135 |
| 6144 | 0,001022654 | 3,14159251669216 | 0,001022654 | 3,14159292738510 |

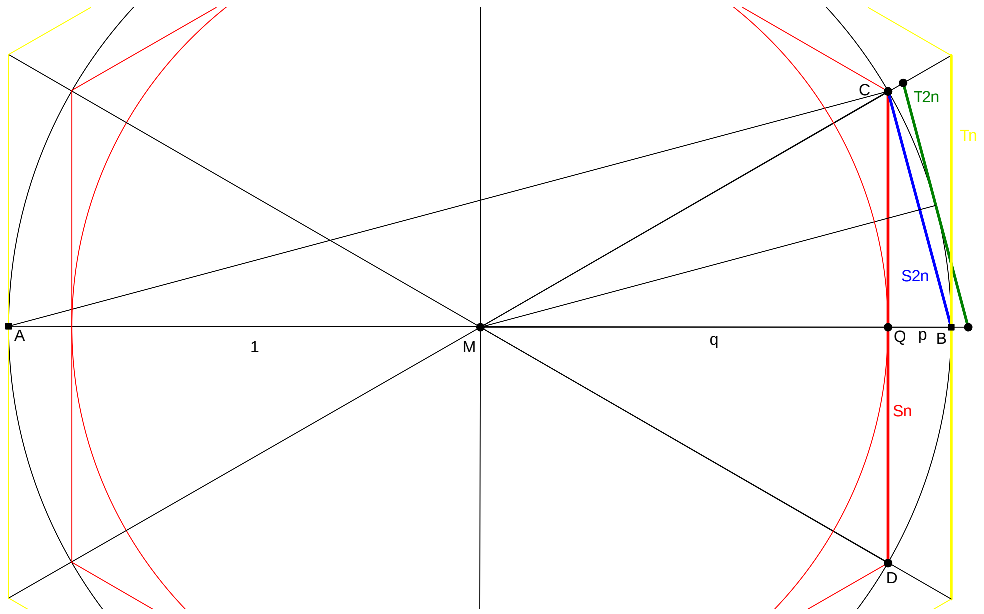
Führt man das Verfahren bis zum 6144-Eck aus, lässt sich die Kreiszahl pi bis zur sechsten Nachkommastelle genau bestimmen (siehe Tabelle).

**b)**

*Innenkreisradius des einbeschriebenen Sechsecks*: $r_{in} = \overline{MQ} = 1 - p$ Aus der Vorlesung ist bekannt: $p = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$ (ergibt sich auch Höhensatz im Dreieck ABC!) ; $\frac{S_n}{2}$ ist im Sechseck gerade der halbe Radius des Kreises also 0,5. Damit ergibt sich

$r_{in} = 1 - \left(1 - \sqrt{1 - 0{,}25}\right) = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$ .

*Intervallschachtelung zur Annäherung des Flächeninhalts des Einheitskreises durch einbeschriebene und umbeschriebene n-Ecke:*

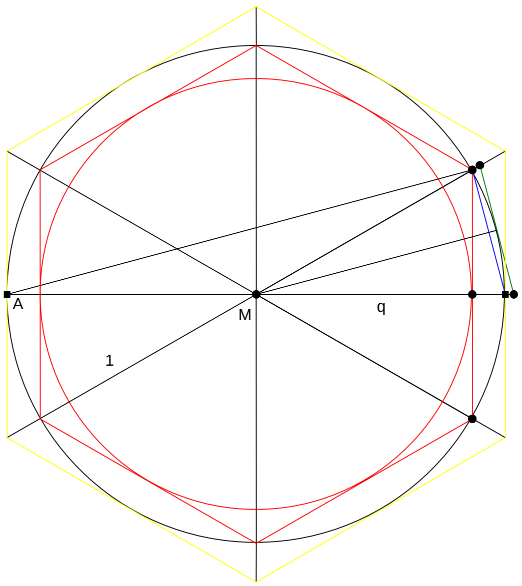



Die n-Ecke bestehen jeweils aus n gleichschenkligen Dreiecken. Der Flächeninhalt dieser Dreiecke lässt sich jeweils durch Sn bzw. $T_n$ ausdrücken. $S_n$ und $T_n$ sind aus Aufgabenteil a) bekannt.

*Flächeninhalt des einbeschriebenen n-Ecks:*

Die Grundseite eines Teildreiecks ist das jeweilige $S_n$, die Höhe ist q (bzw. der Innenkreisradius des Innenkreises des n-Ecks). Aufgrund des im Dreieck MDQ geltenden Pythagoras-Satz gilt: $q = \sqrt{1 - \frac{S_n^{\,2}}{4}}$ . Nun kann man die Fläche des n-Ecks berechnen:

$$A_{n-Eck\_ein} = \frac{n}{2} \cdot S_n \cdot \sqrt{1 - \frac{S_n^{\,2}}{4}}$$




*Flächeninhalt des umbeschriebenen n-Ecks:*

Die Grundseite eines Teildreiecks ist hier das jeweilige $T_n$ und die Höhe ist stets der Radius des Kreises, also 1.

Daher gilt:

$$A_{n-Eck\_um} = \frac{n}{2} \cdot T_n$$

Mit Hilfe von Excel kommt man bei den für die Intervallschachtelung notwendigen Rechnungen zu folgenden Ergebnissen:

| n | Sn | A einb. n-Eck | Tn | A umb. n-Eck |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 2,598076211 | 1,154700538 | 3,464101615 |
| 12 | 0,51763809 | 3 | 0,535898385 | 3,215390309 |
| 24 | 0,261052384 | 3,105828541 | 0,263304995 | 3,159659942 |
| 48 | 0,130806258 | 3,132628613 | 0,131086926 | 3,146086215 |
| 96 | 0,065438166 | 3,139350203 | 0,065473221 | 3,1427146 |
| 192 | 0,032723463 | 3,141031951 | 0,032727844 | 3,14187305 |
| 384 | 0,016362279 | 3,141452472 | 0,016362827 | 3,141662747 |
| 768 | 0,008181208 | 3,141557608 | 0,008181277 | 3,141610177 |
| 1536 | 0,004090613 | 3,141583892 | 0,004090621 | 3,141597034 |
| 3072 | 0,002045307 | 3,141590463 | 0,002045308 | 3,141593749 |
| 6144 | 0,001022654 | 3,141592106 | 0,001022654 | 3,141592927 |

Diese Intervallschachtelung zeigt, dass der Flächeninhalt des Einheitskreises (welcher auch gleichzeitig der Betrag von $\pi$ ist) in folgendem Intervall liegt: [3,141592; 3,141593]