Geometrie II
Vertiefung der Geometrie

WS 2006/07

R.Deißler

Literatur

Krauter, Siegfried

Erlebnis Elementargeometrie

Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken
Spektrum Akad.Verlag, Heidelberg 2005

Aus Vorlesungen für Lehramtsstudenten an der PH Ludwigsburg.
Das Buch deckt unsere Geometrie I und II Vorlesung weitgehend ab.
In der Vorlesung werden wir darauf verweisen.

Müller, Kurt Peter ,
Raumgeometrie
Raumphänomene - Konstruieren - Berechnen

Teubner, Wiesbaden 2004 , 2.Auflage
Reihe Mathematik für das Lehramt.

Behandelt alle Inhalte der räumlichen Geometrie, geht aber über unsere Geometrie II weit hinaus. Gut lesbare Quelle, besonders für Fragen des Freihandzeichnens und der Darstellung räumlicher Gebilde.

Weigand, H.-G., Weth, Th.,
Computer im Mathematikunterricht

Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 2002

Kapitel über Geometrie (S.155-228), im Wesentlichen über den Einsatz von DGS im Unterricht.

Software speziell für die räumliche Geometrie

In Augenblick erscheinen laufend neue dynamische 3D Geometriesysteme, die aber für den Unterricht in der SI meines Erachtens kaum einsetzbar sind, da sie die meisten Schüler überfordern werden.

Cabri 3D: Gut, aber recht teuer.

Archimedes 3D: Demoversion zum Download ..\Archimedes Geo3D.htm

Bei ersten Versuchen auf meinem Computer traten noch technische Probleme mit der Darstellung auf.

Kapitel 1: Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele

„Verkleinerungen"

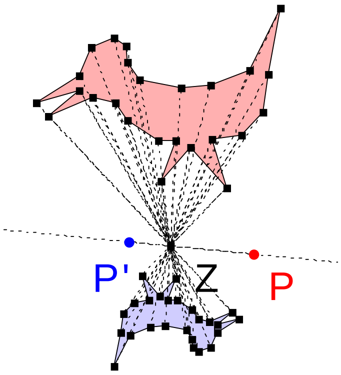
„Vergrößerungen"

Bijektive, geradentreue und winkeltreue Abbildungen der Ebene heißen **Ähnlichkeitsabbildungen**.

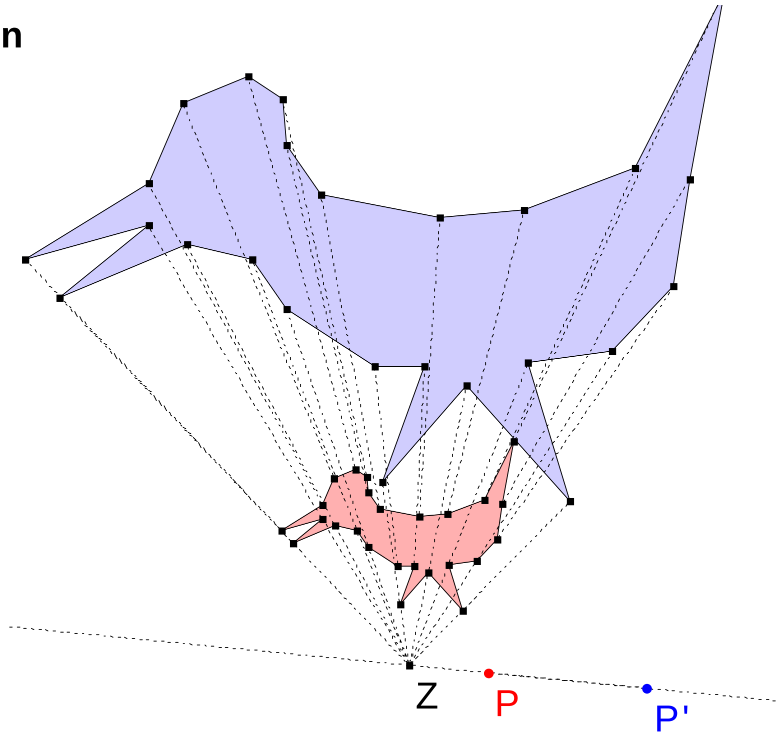
Mathematische **Präzisierung,** aber auch **Verengung** der umgangssprachlichen Redeweise

„Die zwei sehen ganz ähnlich aus"

4.1 Zentrische Streckungen



k = -0,5



k = +3

Demo

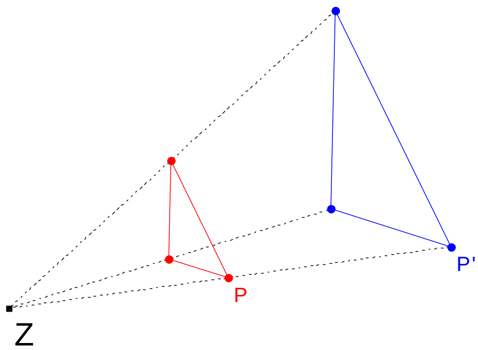
Definition 1.1

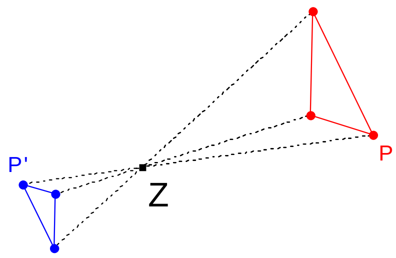
Es sei Z ein Punkt der Ebene E; k $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Eine Abbildung E$\rightarrow$E heißt zentrische Streckung mit (Streck-)Zentrum Z und Streckfaktor k

$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P‘ gilt: $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiel: Strecken von Dreiecken





k = +2 $\overline{ZP'} = 2 \cdot \overline{ZP}$

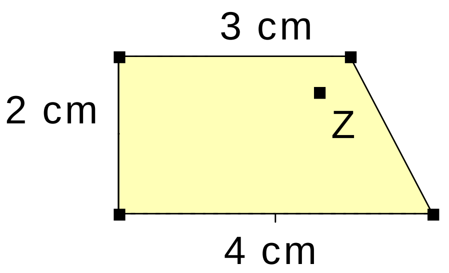
k = -0,5 $\overline{ZP'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ZP}$

Demo

Aufgabe

Führen Sie mit dem Viereck je eine zentrische Streckung durch mit

a) $k = 2$ b) $k = -3$ c) $k = -1$



Was bedeutet Streckung mit $k=-1$?
Wie lässt sich die Streckung mit $k=-3$ deuten?
Was würde eine Streckung mit Faktor $k=0$ bedeuten?

Eigenschaften einer zentrischen Streckung

- Umkehrabbildung ist die zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckfaktor $1/k$.
- Fixelemente einer zentrischen Streckung:
  - Fixpunkt: Z
  - Fixgeraden: alle Geraden durch Z

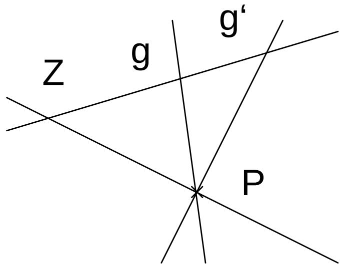
Invarianten einer zentrischen Streckung

- Geradentreu (Beweis ausgelassen)
- Bildgerade || Originalgerade
- parallelentreu
- winkelmaßtreu
- umlaufsinntreu
- teilverhältnistreu
- längenverhältnistreu
- Im allgemeinen ***nicht flächeninhaltstreu***

Einige Beweise

Bildgerade || Originalgerade:
$Z \in g$: $\Rightarrow$ g'=g und g' || g.

$Z \notin g$ aber $g' \cap g = \{P\}$: $\Rightarrow$ P Fixpunkt $\neq Z$.
Also auch hier g' || g.



Parallelentreue, Winkelmaßtreue:
Folgen aus der vorangehenden Eigenschaft.

Umlaufsinntreue: Offensichtlich

Teilverhältnistreue: Satz 1.3 oder Folgerung aus Satz 1.1.

Längenverhältnistreue: Folgerung aus Satz 1.1.

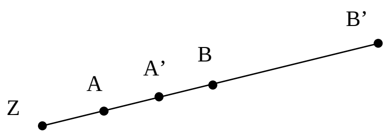
Was wir schon immer geglaubt haben:

Ist das nicht genau die Definition einer zentrischen Streckung???

Satz 1.1
Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor k gilt für *jede* Strecke $\overline{AB}$:
$|\overline{A'B'}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$

Beweis

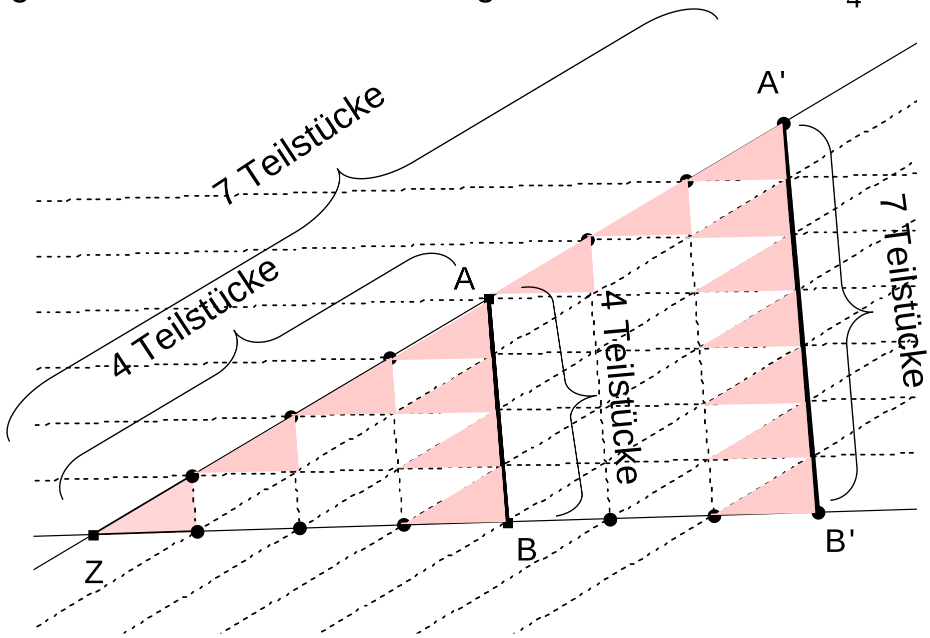
1.Fall: A,B liegen auf einer Geraden g durch Z



$$|\overline{A'B'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZA'}| = k\,|\overline{ZB}| - k\,|\overline{ZA}| = k(|\overline{ZB}| - |\overline{ZA}|) = k\,|\overline{AB}|$$

2.Fall:

A,B liegen nicht auf einer Geraden g durch Z. Hier sei k= $\frac{7}{4}$



Aufgabe

Eine **zentrische Streckung** wird festgelegt durch Angabe des **Streckzentrums Z** und des **Streckfaktors k**.

Kann eine zentrische Streckung auch auf andere Art eindeutig festgelegt werden?

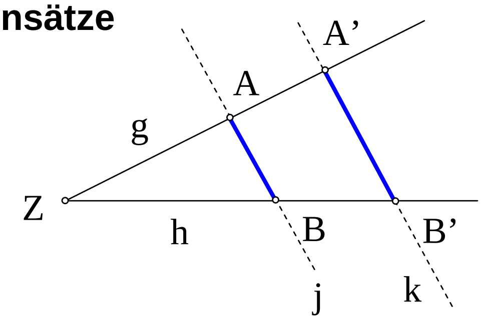
f sei eine zentrische Streckung .

Prüfen Sie, was zutrifft und begründen oder widerlegen Sie.

f wird eindeutig festgelegt durch

- Ein Punktepaar (P,P‘), P$\neq$ P‘,
- Zentrum Z und ein Punktepaar (P,P‘), P$\neq$ P‘,
- zwei Punktepaare (P,P‘) , (Q,Q‘) , P$\neq$ Q ,
- drei Punktepaare (P,P‘) , (Q,Q‘) , (R,R‘), P, Q, R nicht auf einer Geraden.

1.2 Strahlensätze



g∩h = {Z}
g∩j = {A} ; g∩k = {A'};
h∩j = {B}, h∩k = {B'}

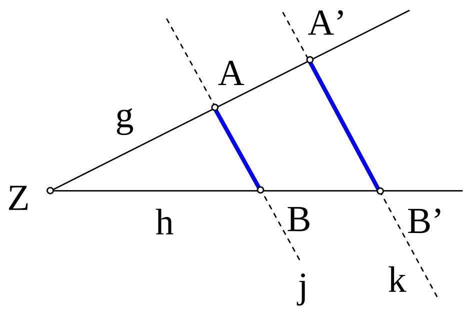
Satz 1.2
1.Strahlensatz:

Ist j || k, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ und $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ oder $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$, so ist j || k .

Beweis Strahlensatz



Durch $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ wird eine zentrische Streckung definiert.

Das Bild von B unter dieser Streckung sei B~.
Dann ist A‘B~ || AB.

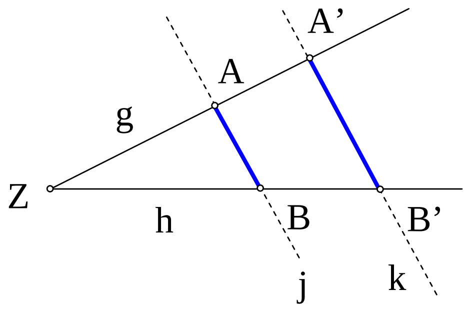
Aus A‘B‘ || AB folgt A‘B‘ || A‘B~ , also

B‘=B~ und damit auch $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

Beweis Umkehrung

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = k$$

$\Rightarrow$ A und B werden durch zentrische Streckung mit Faktor k auf A‘ und B‘ abgebildet.
$\Rightarrow$ AB || A‘B‘.

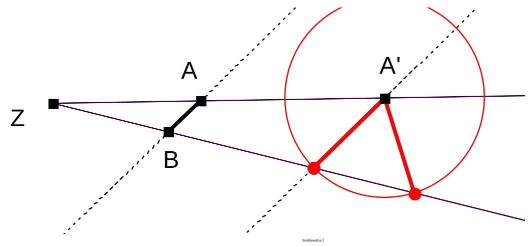


$g \cap h = \{Z\}$
$g \cap j = \{A\}$; $g \cap k = \{A'\}$;
$h \cap j = \{B\}$, $h \cap k = \{B'\}$

Satz 1.2
2.Strahlensatz:

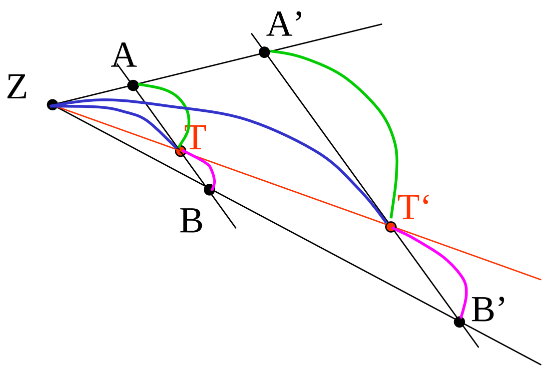
Ist j || k, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$.

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar!



Teilverhältnistreue

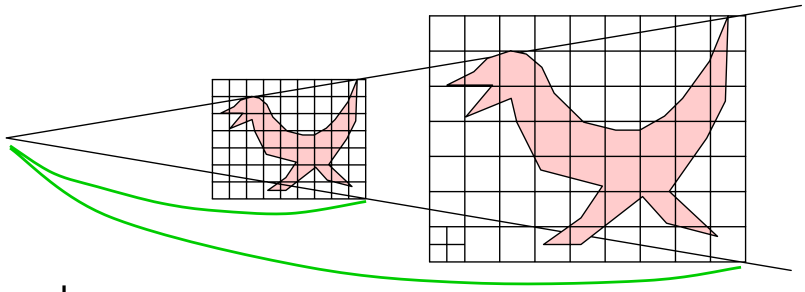
Satz 1.3
Drei Punkte A,B,T einer Geraden g werden durch zentrische Streckung auf die Punkte A’,B’,T’ der Geraden g’ abgebildet. Dann gilt:
Ist $|\overline{AT}| = r \cdot |\overline{TB}|$, so ist auch $|\overline{A'T'}| = r \cdot |\overline{T'B'}|$.



$$\frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{AT}|} = \frac{|\overline{ZT'}|}{|\overline{ZT}|} = \frac{|\overline{T'B'}|}{|\overline{TB}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{T'B'}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = r$$

1.3 Flächeninhalt und Volumen bei zentrischer Streckung

Satz 1.4
Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k wird
- jede Fläche auf eine Fläche mit k^2 fachem Inhalt abgebildet,
- jeder Körper auf einen Körper mit k^3 fachem Volumen abgebildet.



$k \approx 2$

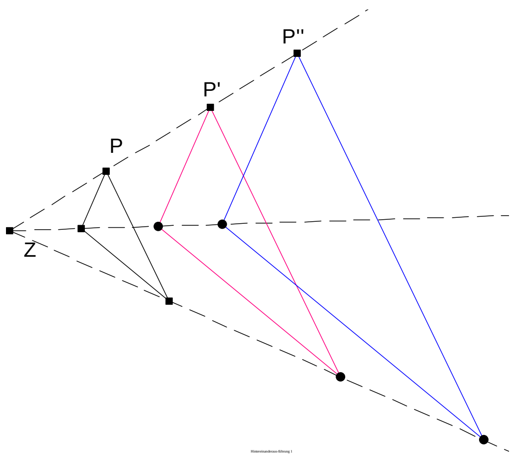
Anwendung
Massiver Körper auf das k-fache vergrößert:
Volumen und Gewicht nehmen auf das k^3-fache zu.

Bei massiver Gipsfigur Höhe verdoppelt „ohne die Form zu ändern“ :
Gewicht nimmt auf das 8-fache zu.

1.4 Hintereinanderausführen von zentrischen Streckungen

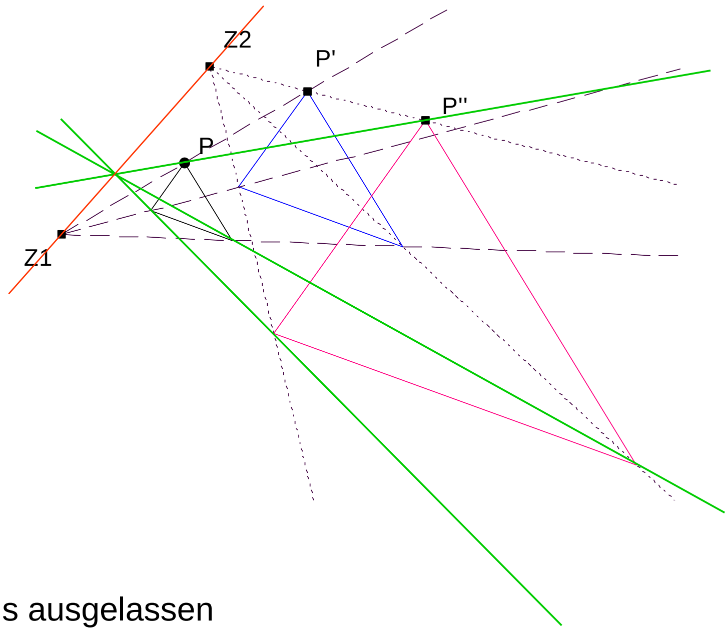
(a) Gleiches Streckzentrum

Satz 1.5 (a)
Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit gemeinsamem Streckzentrum Z und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z, Streckfaktor $k_1 \cdot k_2$.



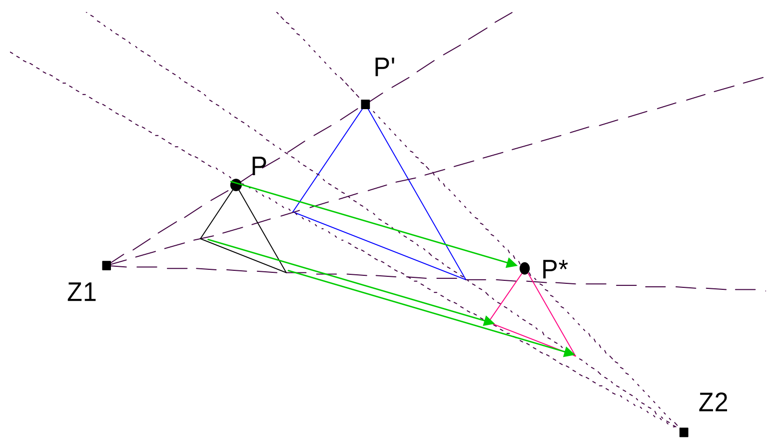
(b) Verschiedene Streckzentren

Fall 1: $k_1 \cdot k_2 \neq 1$



Exakter Beweis ausgelassen

Fall 2: $k_1 \cdot k_2 = 1$



Satz 1.5 (b)
Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit verschiedenen Streckzentren und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen

- durch eine **zentrische Streckung**, falls $\mathbf{k_1 \cdot k_2 \neq 1}$,(Zentrum auf Z_1Z_2)
- durch eine **Verschiebung**, falls $\mathbf{k_1 \cdot k_2 = 1}$ (Verschiebung || Z_1Z_2)

1.5 Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 1.2
Eine Abbildung f: E→E heißt Ähnlichkeitsabbildung
⇔ f ist bijektiv, geradentreu und winkeltreu

Wie kann man Ähnlichkeitsabbildungen charakterisieren?

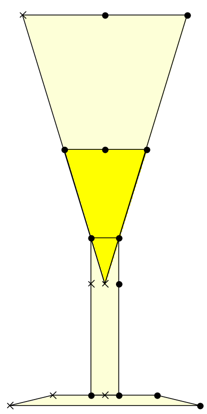
Satz 1.6
Jede Ähnlichkeitsabbildung kann man als Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung darstellen.

Beweisidee:

Begründe zuerst wieder, dass bijektive, geradentreue und winkeltreue Abbildungen durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig festgelegt sind.

Demo 1 Demo 2

Aufgabe
Ein Sektkelch (exakte Kegelform) ist bis zur halben Höhe gefüllt. Wie viel könnte man noch nachgießen bis er randvoll wäre?

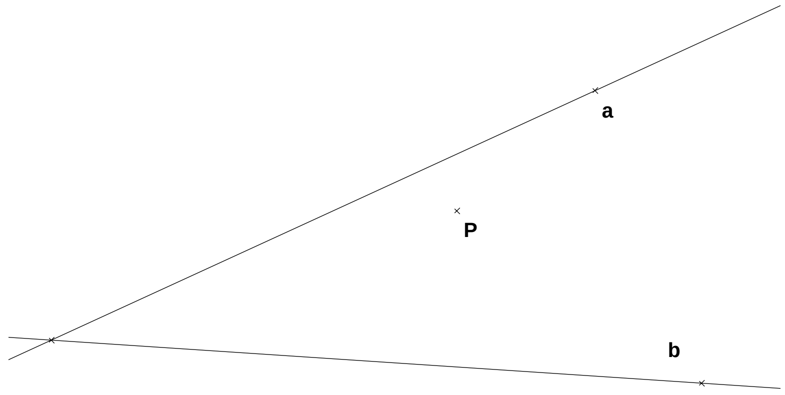


Bis zu welcher Höhe muss man das Glas füllen, wenn man nur doppelt so viel wie zuvor im Glas haben will?

Aufgabe

Im Winkelfeld zweier Geraden a und b liegt ein Punkt P. Man konstruiere Geraden g durch P, die a in A und b in B schneiden und für die gilt: AP : PB = 2 : 3.

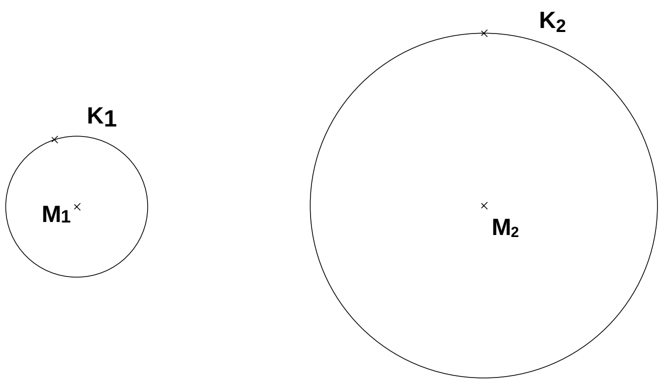
Hinweis: Lösen Sie zuerst die Aufgabe so, dass P die Strecke AB halbiert.



Aufgabe

Zeige, dass je zwei Kreise mit verschiedenen Radien durch zentrische Streckungen aufeinander abgebildet werden können.

Gilt das auch für je zwei Quadrate oder zwei gleichseitige Dreiecke?



1.6 Die Gruppe (Ä, ∘) aller Ähnlichkeitsabbildungen der Ebene

Ä = Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen $E \rightarrow E$;
∘ = „Hintereinanderausführung“

Satz 1.7
(Ä, ∘) ist eine (unendliche) Gruppe.
(K, ∘) ist eine Untergruppe von (Ä, ∘).

Beweis
- **Ä** ist **abgeschlossen** unter **o**
- **Assoziativgesetz** gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- „id“ (die identische Abbildung) ist **neutrales** Element; id ∈ **Ä**
- mit jedem f ∈ **Ä** ist auch das **inverse** Element f^{-1} ∈**Ä**

1.7 Ähnlichkeiten am rechtwinkligen Dreieck

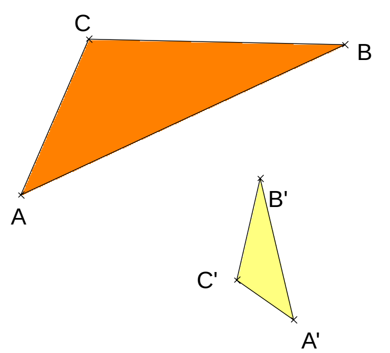
Ähnlichkeit beliebiger Dreiecke

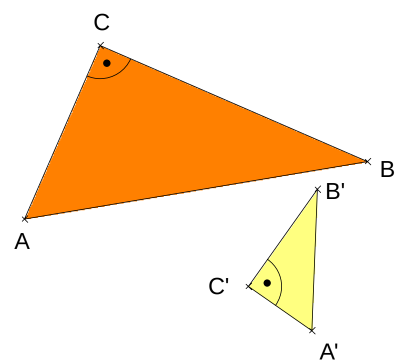
Zwei Dreiecke sind ähnlich wenn sie in *zwei* Winkeln übereinstimmen.

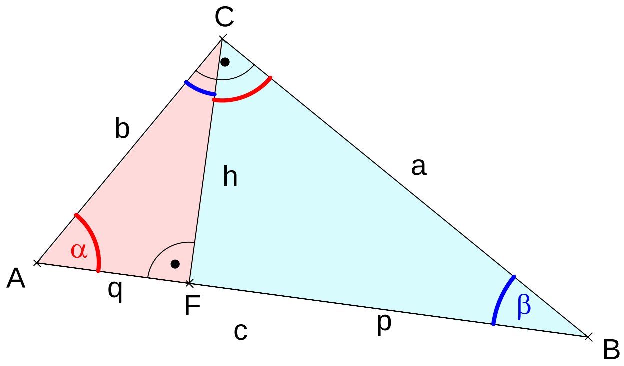
Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke

Zwei *rechtwinklige* Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in *einem Winkel <90°* übereinstimmen.

Begründungen?

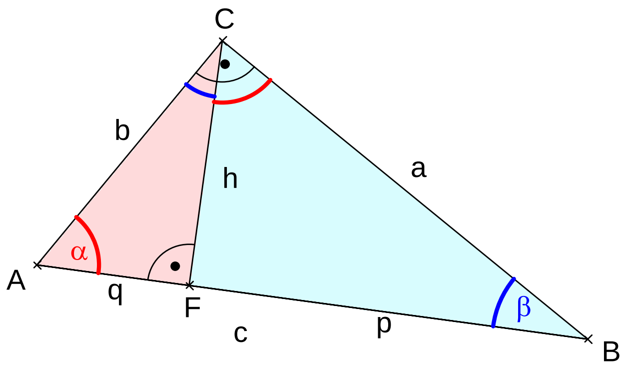






Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB und dem Höhenfußpunkt F auf AB.

Dann sind die Dreiecke ABC, BCF und CAF zueinander ähnlich.



Damit kann man die Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras sehr kurz beweisen:

$\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ $\Rightarrow$ $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz)

$\frac{p}{a} = \frac{a}{c}$ $\Rightarrow$ $a^2 = p \cdot c$ (Kathetensatz)

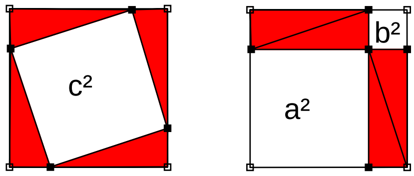
$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ $b^2 = q \cdot c$ (Kathetensatz)

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = (p+q) \cdot c = c^2$ (Satz des Pythagoras)

Gegenüberstellung einiger Beweise zum Satz des Pythagoras

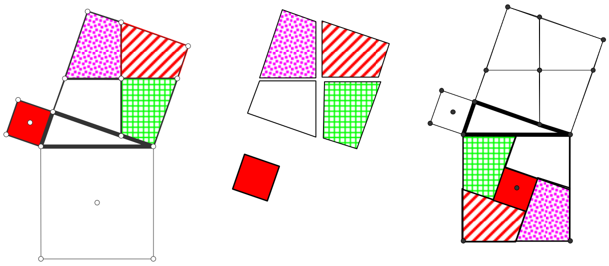
Ergänzungsbeweis

Die weißen Quadratflächen sind ergänzungsgleich.

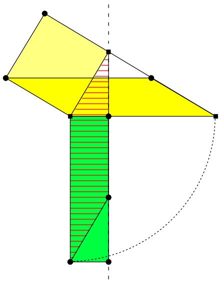


Zerlegungsbeweis

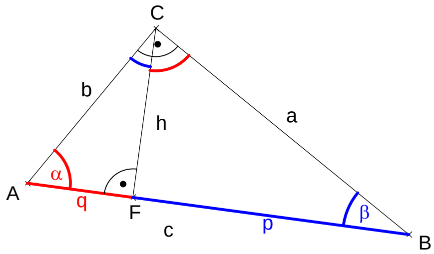
Die Quadratflächen über den Katheten und die Quadratfläche über der Hypotenuse sind zerlegungsgleich.



Scherungsbeweis



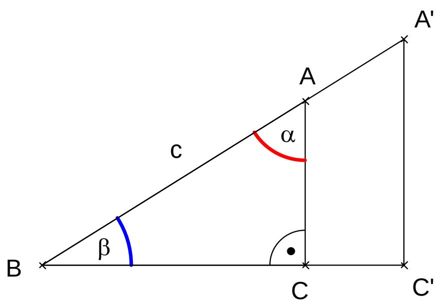
Beweis über Ähnlichkeit

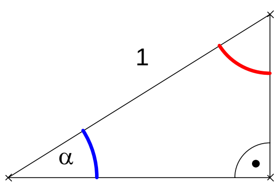


Rechtwinkliges Dreieck und trigonometrische Funktionen

Ein rechtwinkliges Dreieck ist eindeutig bestimmt durch
- eine Seite und einen Winkel (< 90°)
- eine Seite und das *Verhältnis* von zwei Seitenlängen

Kathete : Hypotenuse	sinus, cosinus
Kathete 1 : Kathete 2	tangens, cotangens



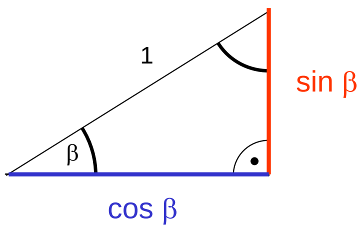


Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in einem Winkel $\neq 90°$ überein, dann sind die Längen*verhältnisse* entsprechender Seiten gleich.

Um solche Verhältnisse durch Strecken*längen* eindeutig zu repräsentieren, wählt man Dreiecke mit der Hypotenusenlänge 1 LE bzw. Kathetenlänge 1 LE.

Definitionen

Hypotenuse 1 LE



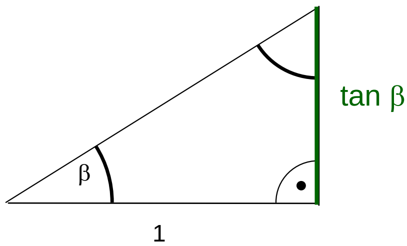
$$\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der Gegenkathete zu β

$$\cos\beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Ankathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der Ankathete zu β

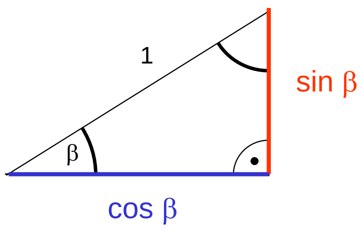
Ankathete 1 LE



$$\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der Gegenkathete zu β

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

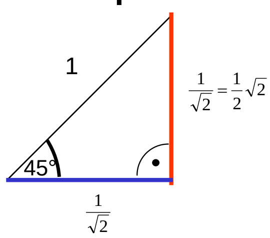


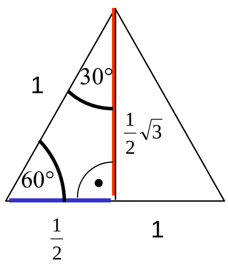
$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin\beta = \cos(90° - \beta) \qquad \cos\beta = \sin(90° - \beta)$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

Werte für spezielle Winkel





$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45° = 1$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3} \qquad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

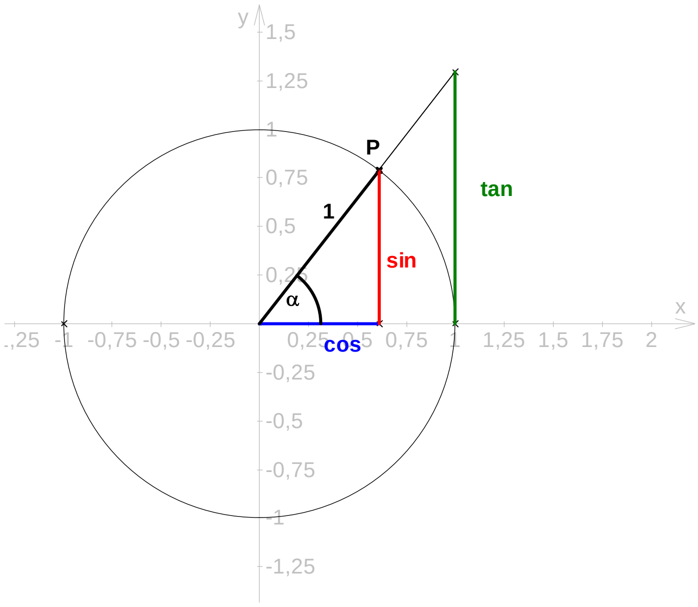
Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Betrachte zunächst noch einmal die Definition der trigonometrischen Funktionen an rechtwinkligen Dreiecken mit Eckpunkt P, bei denen die Hypotenuse die Länge 1 hat. P bewegt sich auf einem Einheitskreis.

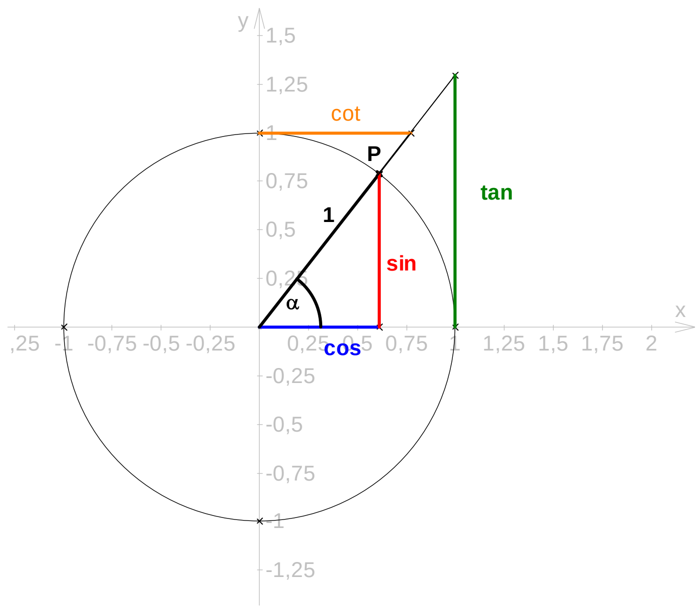
Dann lassen sich die Winkelfunktionen wieder als Längen gewisser Strecken interpretieren.

Insbesondere ist

- sin(α) die y-Koordinate von P
- cos(α) die x-Koordinate von P
- tan(α) = sin(α) /cos(α)



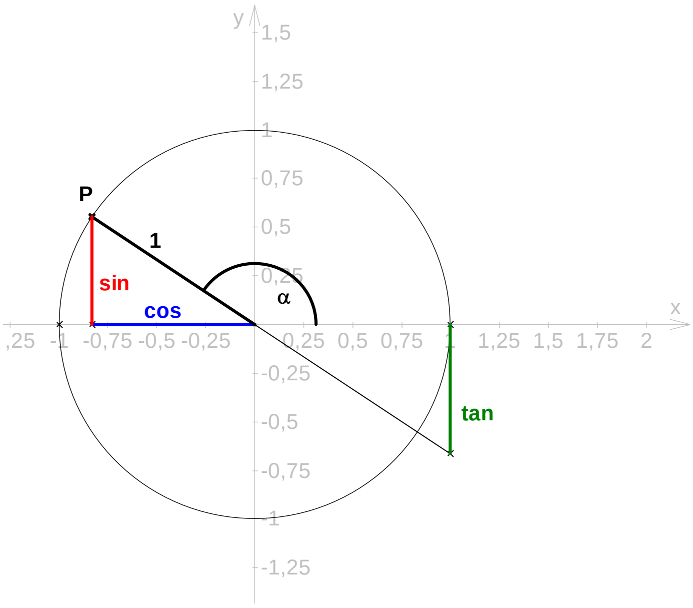
Hier ist auch noch die Cotangensfunktion cot berücksichtigt.



Diese Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis lassen sich jetzt auf Winkel > 90° erweitern. Der Winkel zu einem Punkt wird stets im Gegenuhrzeigersinn von der positiven x-Achse zum Strahl OP gemessen.

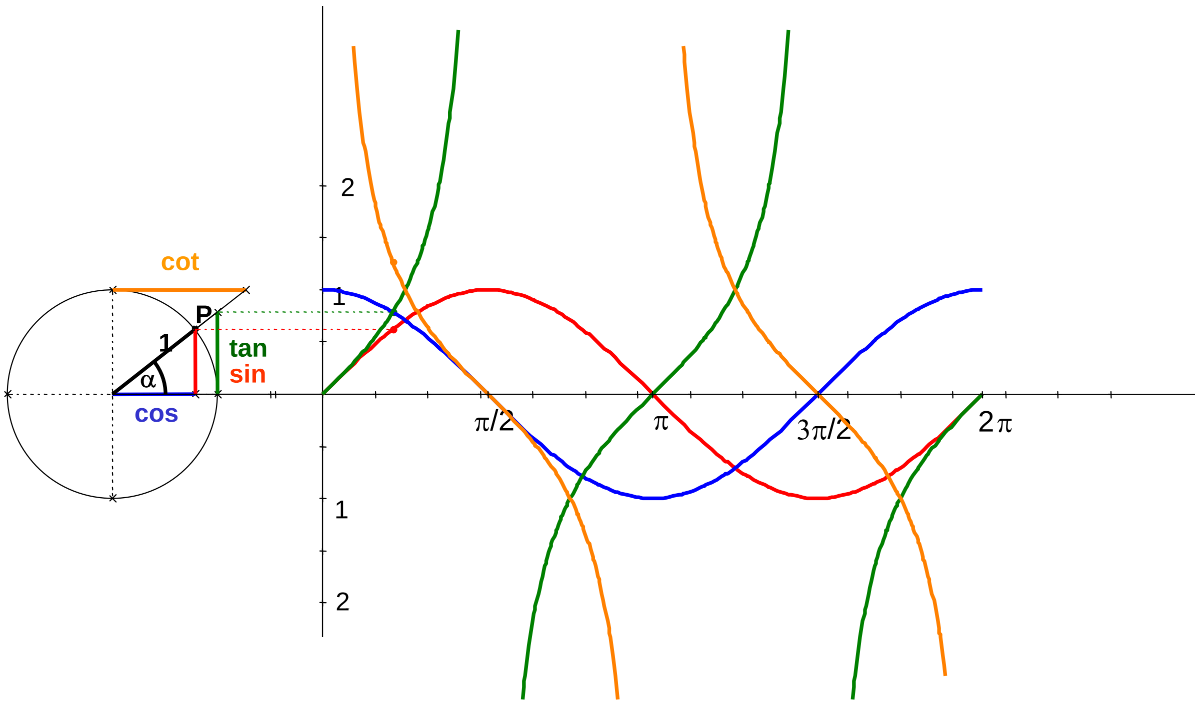
Hier ist wieder

- sin(α) die y-Koordinate von P
- cos(α) die x-Koordinate von P
- tan(α) = sin(α) /cos(α)
- cot(α) = cos(α)/ sin(α) =1/ tan(α)



Trigonometrische Funktionen: Funktionsgraphen

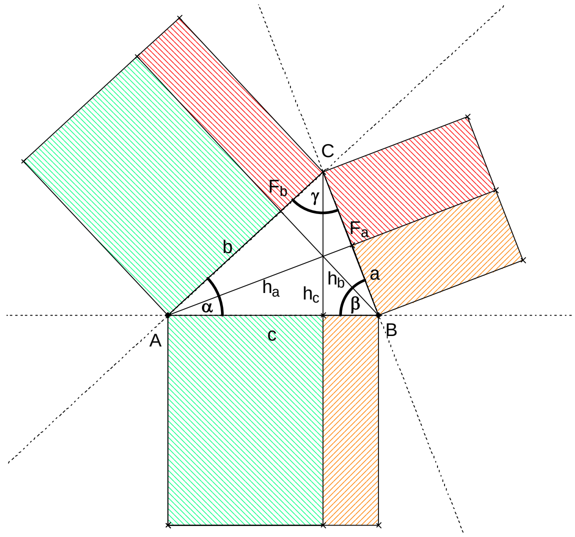
Hier die entstehenden Graphen (Winkel im Bogenmaß auf der horizontalen Achse) :



Dreiecke berechnen: Sinus- und Cosinussatz für beliebige Dreiecke

Während beim Kathetensatz und beim Satz des Pythagoras der rechte Winkel ausgezeichnet ist stehen jetzt alle Ecken gleichberechtigt nebeneinander.
Wir zeigen mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze, dass bei *spitzwinkligen* Dreiecken jeweils die an Dreiecksecken zusammenstoßenden gleich schraffierten Rechtecke flächeninhaltsgleich sind.

Diese Flächen entstehen, wenn die Quadrate über den Dreiecksseiten durch die Verlängerungen der Dreieckshöhen in Rechtecke geteilt werden.



Aus dieser Figur erkennt man sofort die Verallgemeinerungen des Kathetensatzes und des Satzes von Pythagoras:

> Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Dreiecksseiten vermindert um die zwei gleich großen entsprechenden Rechtecke.

Cosinussatz für spitzwinklige Dreiecke

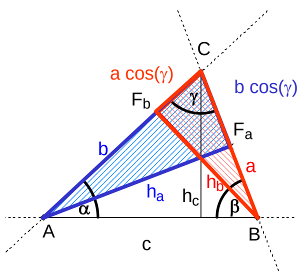
Wir betrachten jetzt die beiden Dreiecke AF_aC und BF_bC .

Es gilt

$$\overline{CF_a} = b\cos(\gamma)$$

$$\overline{CF_b} = a\cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow a \cdot \overline{CF_a} = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \overline{CF_b}$$



Satz 1.8 (a)
Cosinussatz für spitzwinklige Dreiecke

Wir betrachten jetzt die beiden Dreiecke AF_aC und BF_bC .

Es gilt

$$\overline{CF_a} = b\cos(\gamma)$$

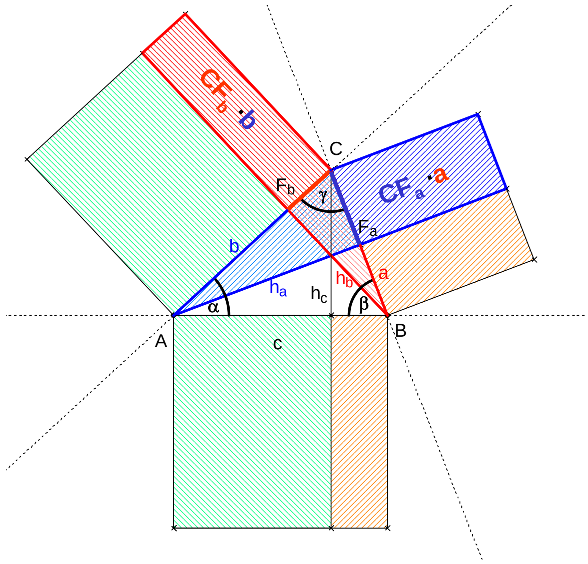
$$\overline{CF_b} = a\cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow a \cdot \overline{CF_a} = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \overline{CF_b}$$

Dies sind gerade die Flächeninhalte der beiden rot und blau schraffierten Rechtecke

Daraus ergibt sich wieder der Cosinussatz

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)}$$



Satz 1.8 (b)
Cosinussatz für stumpfwinklige Dreiecke

Für stumpfwinklige Dreiecke sind die Figuren etwas unübersichtlicher.
Wir betrachten den Fall, dass der Winkel γ stumpf ist.

Wir zeigen wieder, dass folgende Rechtecke flächeninhaltsgleich sind:

AF_bGF und $ALNF_c$

F_aIJB und F_cBMN

F_aIKC und F_bGHC

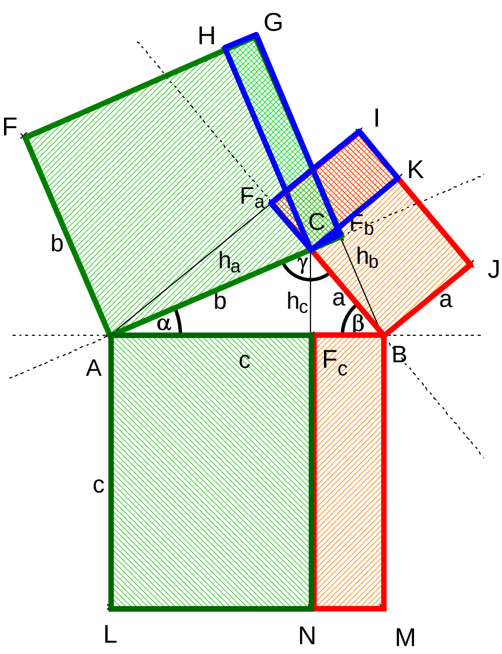
Wir zeigen weiter, dass die blau umrandeten Rechtecke den *negativ bewerteten* Flächeninhalt

$a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

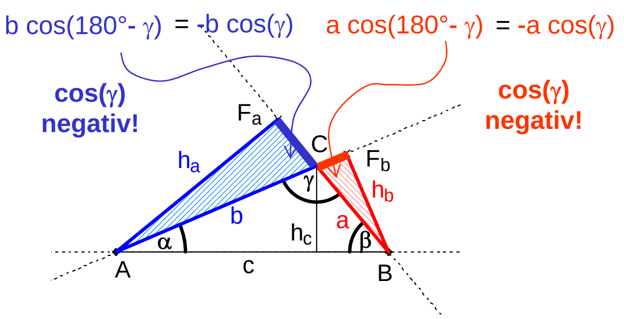
besitzen.

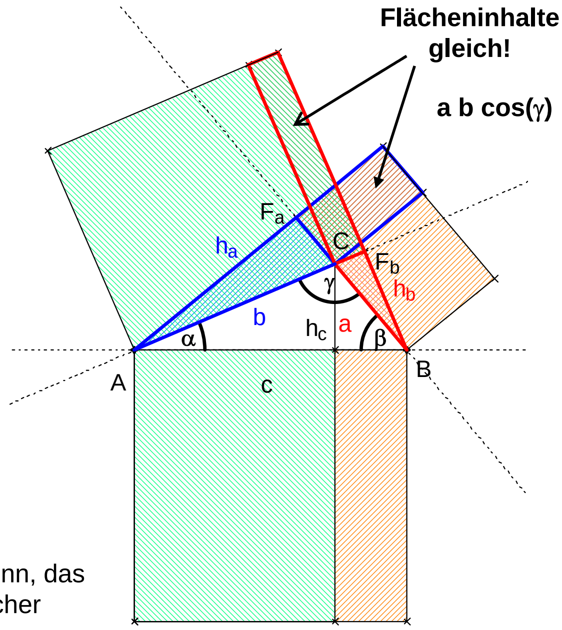
Auch daraus ergibt sich wieder der Cosinussatz

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)}$$



Zuerst betrachten wir die beiden Rechtecke am Winkel γ
(Farben gegenüber der vorangehenden Zeichnung verändert, um den Unterschied zwischen den Rechtecken zu sehen).





Wenn man diese “Flächeninhalte“ als

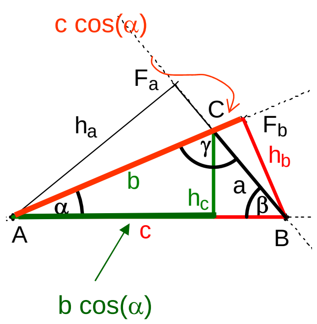
$a\, b \cos(\gamma)$

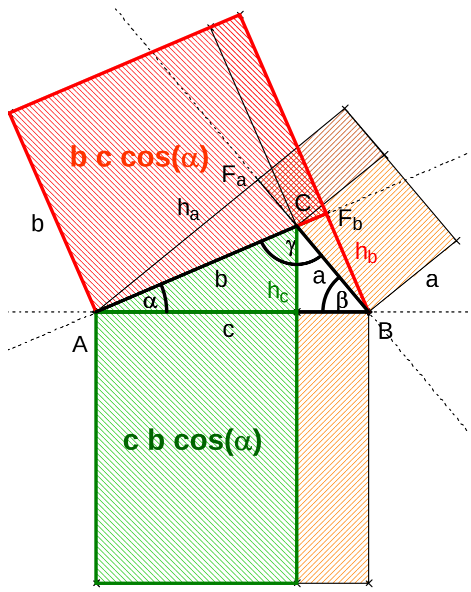
ausdrückt, dann sind diese negativ!

Dieses sind dann zwar keine Flächeninhalte im strengen Sinn, das Vorzeichen lässt aber zu, dass der Cosinussatz in einheitlicher Form geschrieben werden kann.

Man kann das Vorzeichen von Flächeninhalten über den Umlaufsinn deuten.

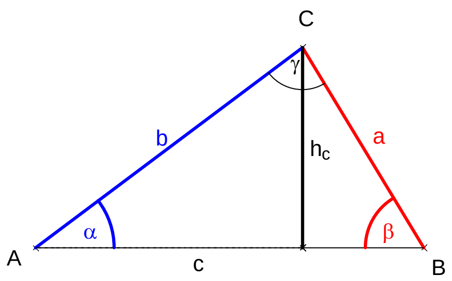
Jetzt sind noch die Rechtecke um die spitzen Winkel, etwa α, zu untersuchen.
(Auch hier sind die Farben gegenüber der ursprünglichen Zeichnung verändert).

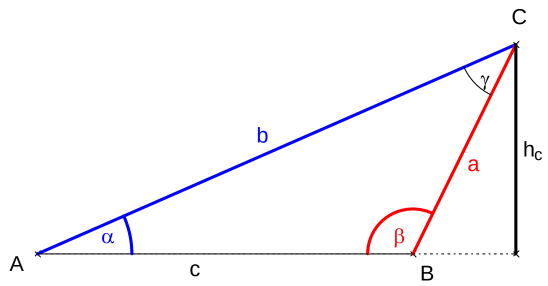




Satz 1.9
Sinussatz

Der Sinussatz ist wesentlich einfacher zu beweisen als der Cosinussatz. Der Beweis verläuft für spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke gleich.



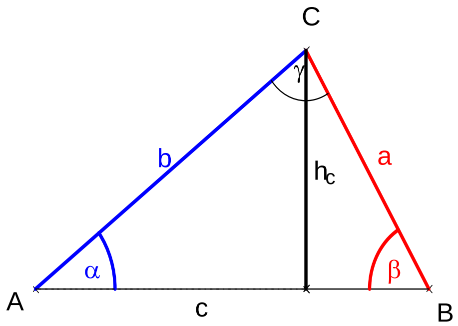


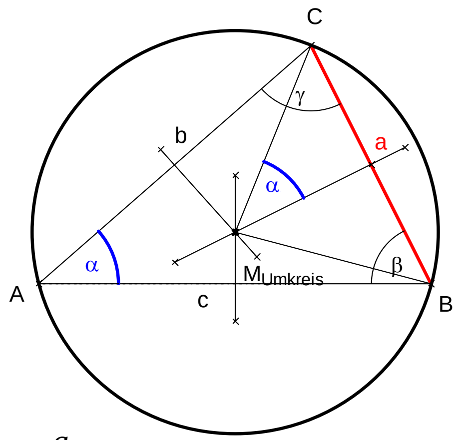
Die Höhe h_c lässt sich sowohl mit Hilfe von a und α als auch mit b und β ausdrücken:

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Das ist im Wesentlichen der Sinussatz.
Wir wollen diese konstanten Verhältnisse aber noch deuten.

Man zeichnet zum Dreieck ABC den Umkreis. Der Winkel α auf dem Umkreis ist gerade die Hälfte des zur Seite a gehörenden Mittelpunktswinkels (Umfangswinkelsatz).

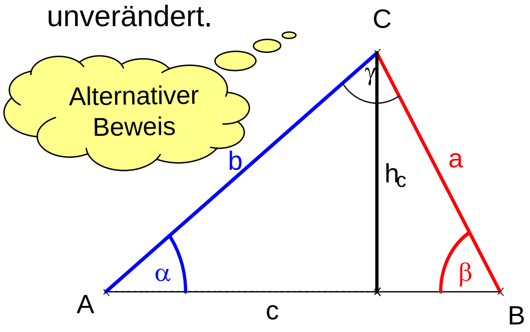


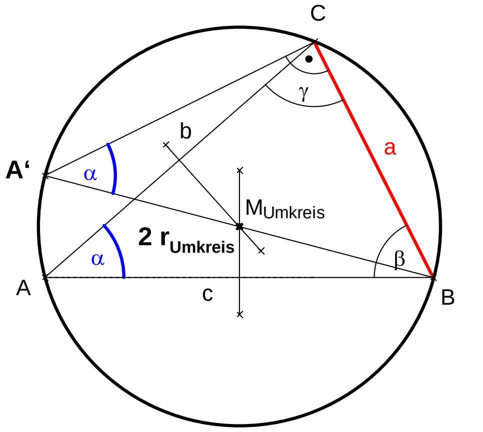


Daraus ergibt sich sofort $\sin(\alpha) = \dfrac{\frac{a}{2}}{r_{Umkreis}} = \dfrac{a}{2r_{Umkreis}}$

Damit erhält man den Sinussatz $\boxed{\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = 2\,r_{Umkreis}}$

Man zeichnet zum Dreieck ABC den Umkreis. Hält man die Seite a fest und bewegt den Punkt A‘ auf dem Umkreis des ursprünglichen Dreiecks, dann bleibt der Umfangswinkel α unverändert.





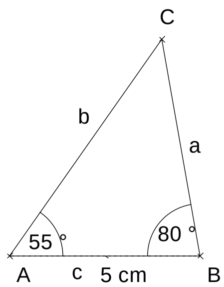
Betrachtet man die Lage des Punktes A‘, bei der BA‘ durch den Umkreismittelpunkt verläuft, dann ist das Dreieck rechtwinklig und der Sinus von α lässt sich mit Hilfe des Umkreisradius ausdrücken: $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{2\,r_{Umkreis}}$

Daraus ergibt sich der Sinussatz

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2\,r_{Umkreis}}$$

Aufgabe 1

Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seitenlänge c = 5 cm und den Winkeln α=55° und β=80°. **Berechnen** Sie die übrigen Seiten des Dreiecks. Berechnen Sie auch den Radius des Umkreises.



Aufgabe 2

Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seitenlänge c = 7 cm und den Winkeln α = 120° und β=20°. **Berechnen** Sie die übrigen Seitenlängen in diesem Dreieck.