Kapitel 3: Räumliche Körper und Rauminhalt

- Der Rauminhalt eines Körpers soll etwas über dessen Größe aussagen,
- der Rauminhaltsbegriff ist intuitiv „irgendwie klar“,
- ab der Grundschule durch Bauen von Körpern mit Würfeln vorbereitet .
- Abgrenzung gegenüber einem anderen Begriff von Größe, der Oberfläche eines Körpers.

Die Definitionen des Rauminhaltsbegriffs werden immer mehr verfeinert, durch den Messprozess festgelegt.

Viele Aussagen über den **Flächeninhalt** und den **Umfang** ebener Figuren lassen sich analog dazu für das **Volumen** und die **Oberfläche** räumlicher Körper entwickeln.

Definition einer Rauminhaltsfunktion V

V ordnet möglichst vielen Körpern K eine (Maß-)Zahl V(K) zu, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

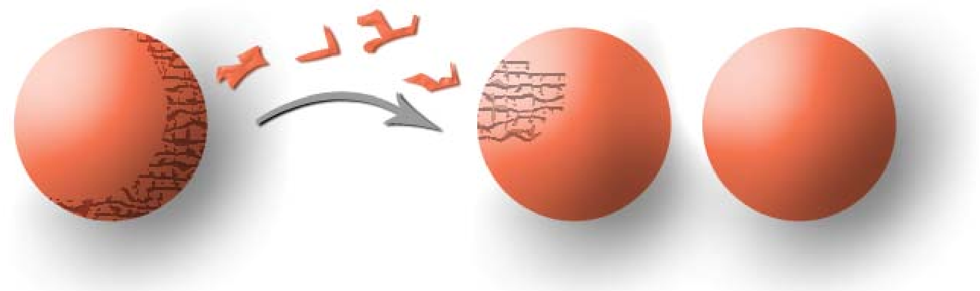
1.	$V(K) \geq 0$	für alle Körper K,
2.	$V(K) = V(K')$	K' kongruent zu K,
3.	$V(K_1 \cup K_2) = V(K_1)+V(K_2)$	K_1 und K_2 haben keine gemeinsamen „inneren" Punkte ,
4.	$V(W_e) = 1$	W_e beliebig gewählter „Einheitswürfel"

Hier werden

- nur die in der Schulmathematik wichtigen Körper behandelt,
- die Methoden bei einigen Beispielen angewandt.

Banach-Tarski-Paradoxon

Eine Konstruktion der polnischen Mathematiker Stefan Banach und Alfred Tarski von 1924 zeigt eindrücklich, dass man nicht allen von Mathematikern ausgedachten „Körpern“ (Punktmengen im Raum) ein Volumenmaß zuordnen kann.



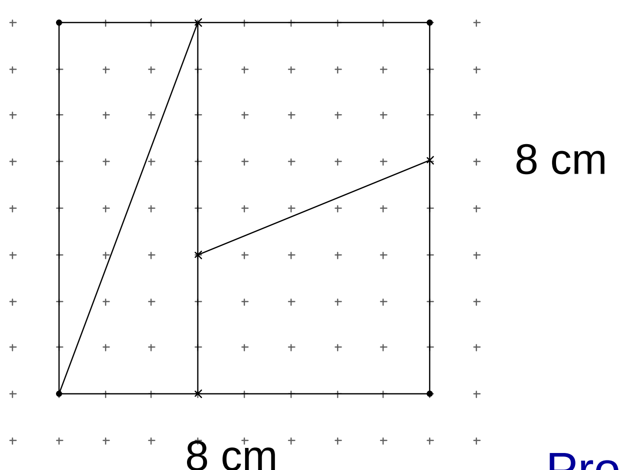
Danach kann man eine Kugel so in endlich viele „Stücke“ zerlegen, dass sich daraus zwei Kugeln zusammensetzen lassen, die kongruent zur Ausgangskugel sind!!!
Diesen „Stücken“ kann natürlich kein Volumen zugeordnet werden.

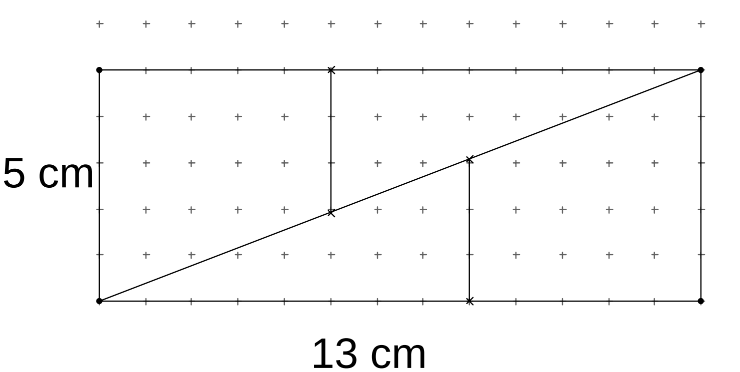
A.Prilszerzkys-Paradoxon

Das Spektrum der Wissenschaft beschieb in der März Ausgabe vor vielen Jahren im Zusammenhang mit dem Banach-Tarski-Paradoxon folgende einfache (und seit langem bekannte) Technik des Polen A.Prilszerzky:

Prilszerzky lieh sich Gold, und stellte daraus 1 cm dicke quadratische Goldplatten mit der Seitenlänge 8 cm her.
Er zersägte diese und fügte sie zu rechteckigen Goldplatten mit den Seitenlängen 5 cm und 13 cm zusammen, entsprechend der Skizze unten.

Dann gab er das geliehene Gold zurück und von den übrig bleibenden 1 cm^3-Goldwürfelchen konnte er sich einen luxuriösen Lebensstil erlauben.





Probieren Sie es aus!

Definitionen einiger Körper

Definieren Sie folgende Begriffe (oft zunächst nicht eindeutig):

- Würfel
- Quader
- Prisma (Säule)
- Zylinder
- Pyramide
- Kegel
- Pyramidenstumpf
- Kegelstumpf
- Kugel

- Polyeder
- Senkrechtes Prisma
- Senkrechte Pyramide
- Konvexer Körper
- Kreiszylinder
- Kreiskegel
- Senkrechter Pyramidenstumpf
- Senkrechter Kegelstumpf
- Antiprisma

- Regulärer Körper (Platonischer Körper)

Reguläre Körper (Platonische Körper)

Platonische Körper sind Polyeder mit den Eigenschaften

- Sie sind konvex,
- alle Seitenflächen sind zueinander kongruente reguläre Vielecke,
- an jeder Ecke stoßen gleich viele Seitenflächen und Kanten zusammen
  (d.h. die Ecken sind nicht unterscheidbar, zu je zwei Ecken gibt es eine Deckabbildung des Körpers, die eine Ecke auf die zweite abbildet.)

Begründen Sie:

Es gibt höchstens 5 platonische Körper.

Versuchen Sie, diese zu beschreiben und ein Netz zu zeichnen.

Quellen für die Inhalte zu Formenlehre von Körpern, Volumen- und Oberflächenberechnung

http://www.mathematische-basteleien.de/index.htm

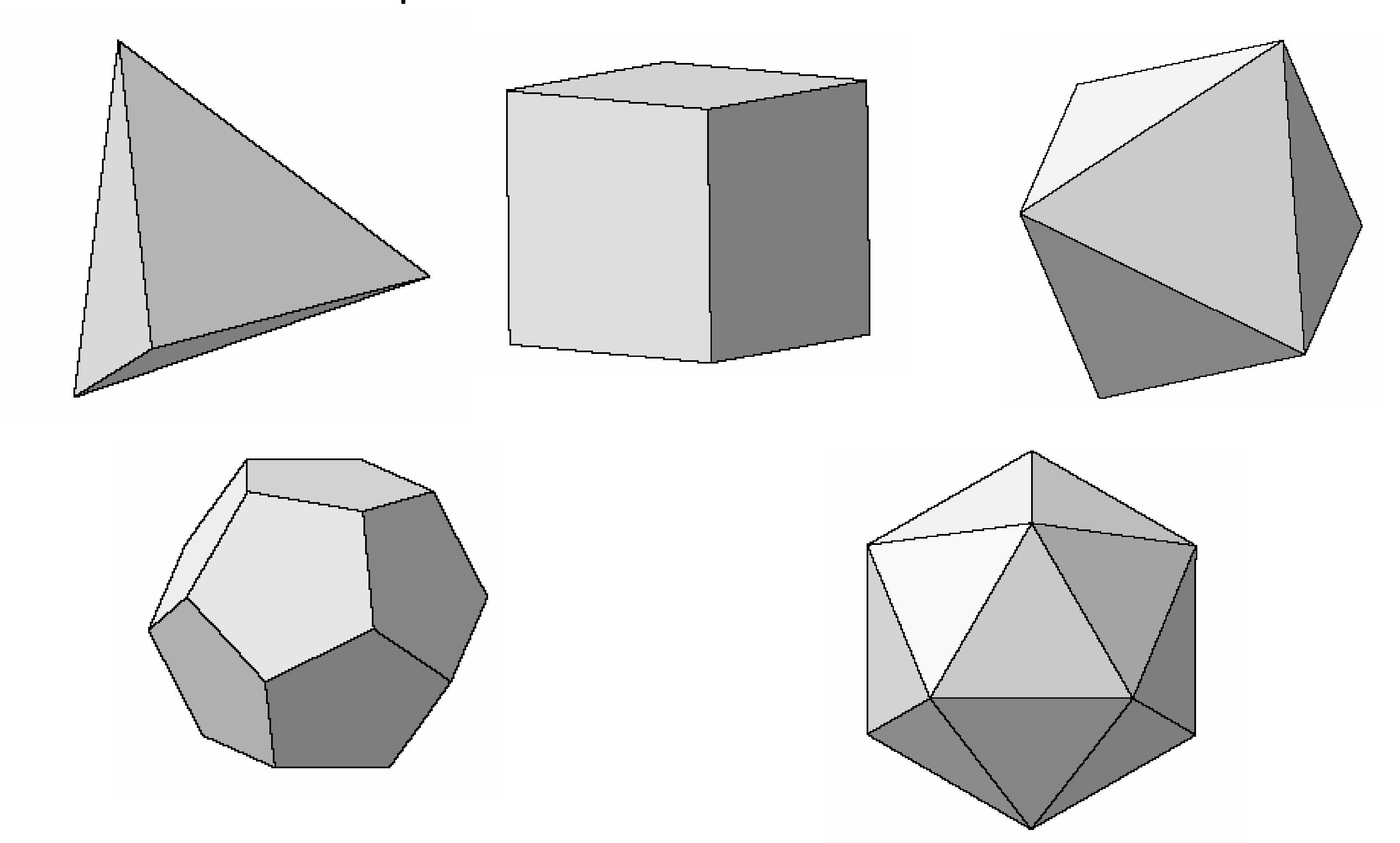
http://www.staff.uni-oldenburg.de/christine.knipping/Skripte/

http://www.staff.uni-oldenburg.de/christine.knipping/Skripte/Skripte/Vorl-Wo12.pdf

Krauter, Erlebnis Elementargeometrie, S.84-90, S.129-142

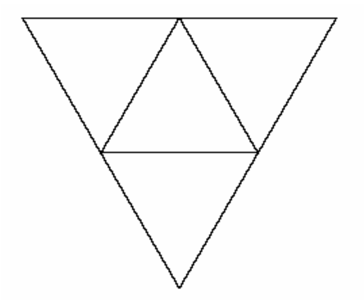
Reguläre Körper (Platonische Körper)

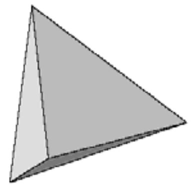
Die Platonischen Körper

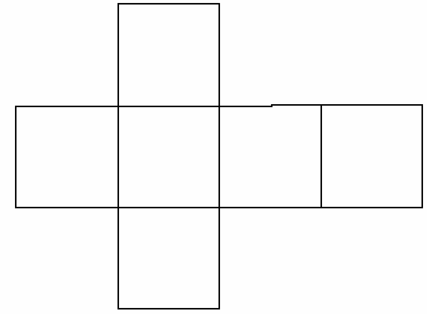


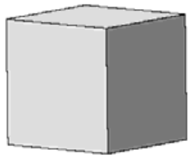
Reguläre Körper (Platonische Körper)

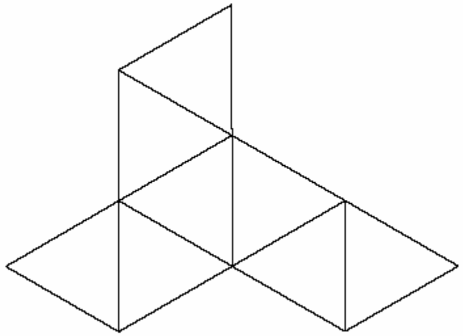
Die Netze der Platonischen Körper

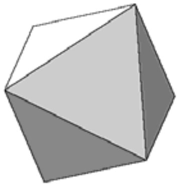


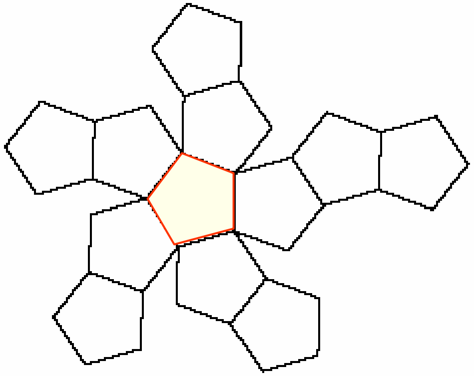


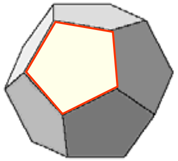


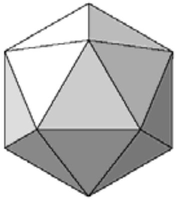


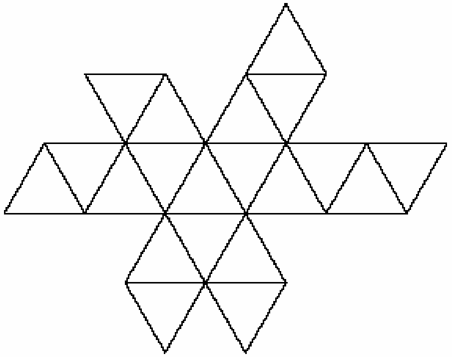




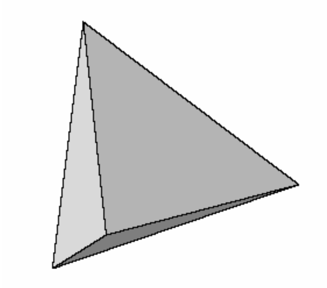
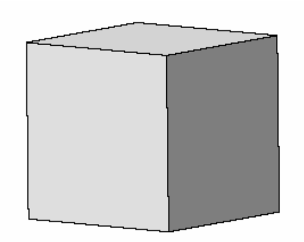
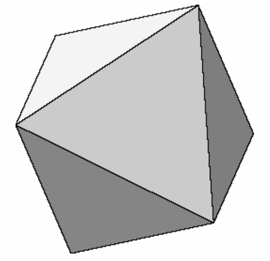
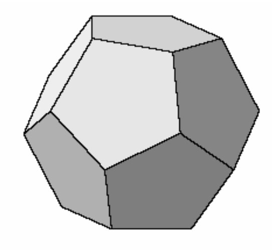
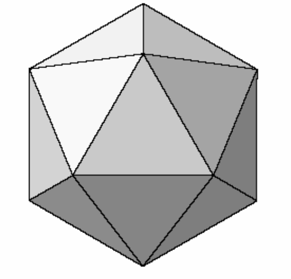






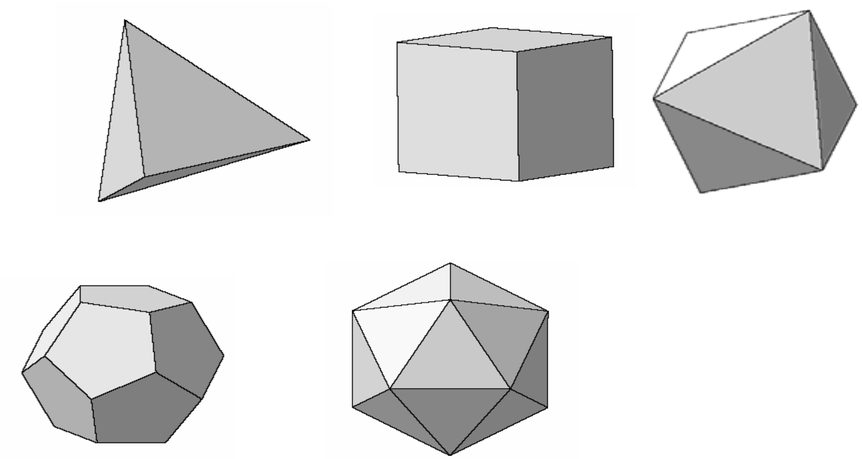


Duale Körper

Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen der platonischen Körper, dann entsteht der dazu **duale Körper**, der wiederum platonisch ist.
Geben Sie jeweils den duale Körper an.
Was ist der zum dualen Körper duale Körper? (Was?! Ach so!)

Eulersche Polyederformel



Für Körper wählen wir folgende Bezeichnungen:
e: Anzahl der Ecken, k: Anzahl der Kanten, f: Anzahl der Flächen.

Eulersche Polyederformel (Leonhard Euler, 1707 – 1783)

Für jeden konvexen Körper ist $e + f = k + 2$

Überprüfen Sie die Aussage an den platonischen Körpern.
Überprüfen Sie die Aussage an weiteren Polyedern Ihrer Wahl.

Satz von Dehn

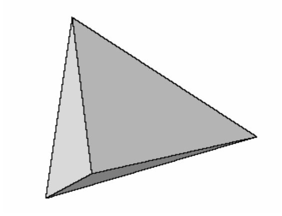
In der Ebene konnten wir zeigen:
Jedes Polygon ist zerlegungsgleich zu einem Rechteck (sogar zu einem Quadrat).

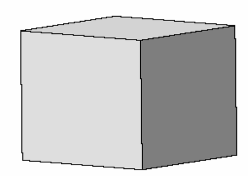
Damit konnten die Flächeninhaltsformeln alleine durch Zerlegen und geeignetes Zusammensetzen auf die Berechnung von Rechtecks-flächen zurück geführt werden.

Ein Satz von Max Dehn (1902) zeigt, dass das analoge Vorgehen im Raum nicht möglich ist:

Satz von Dehn
Ein Tetraeder und ein volumengleicher Würfel sind nicht zerlegungsgleich.

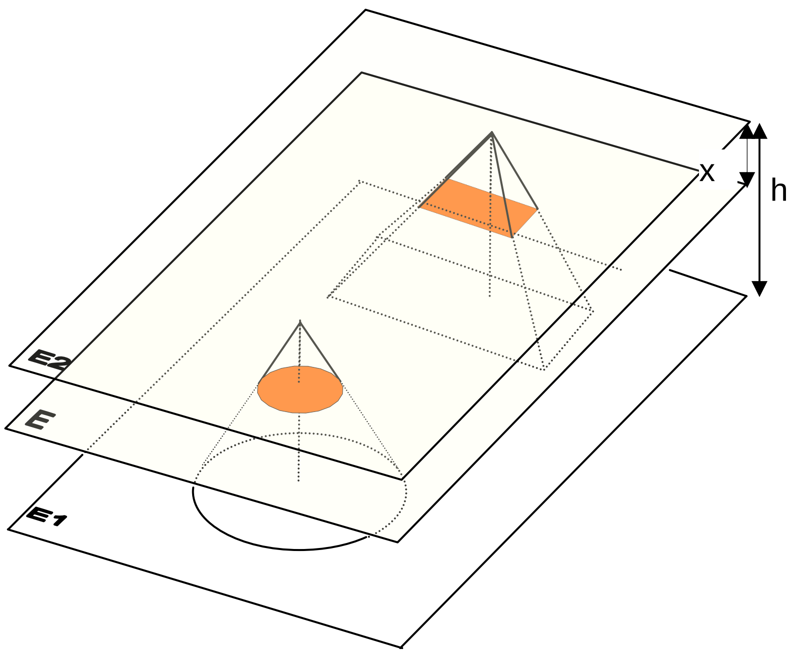
Wir brauchen also neue Prinzipien!

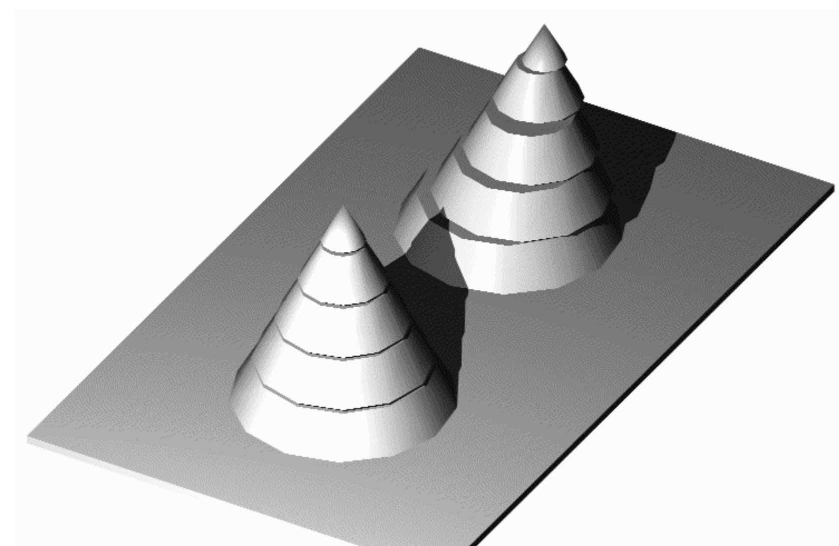




Das Prinzip von Cavalieri (1598 – 1647)

Satz von Cavalieri im Raum
Liegen zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2, und sind **in jeder Höhe** die Schnittflächen der beiden Körper mit der zu E_1 parallelen Ebene E gleich groß, so haben die Körper dasselbe Volumen.

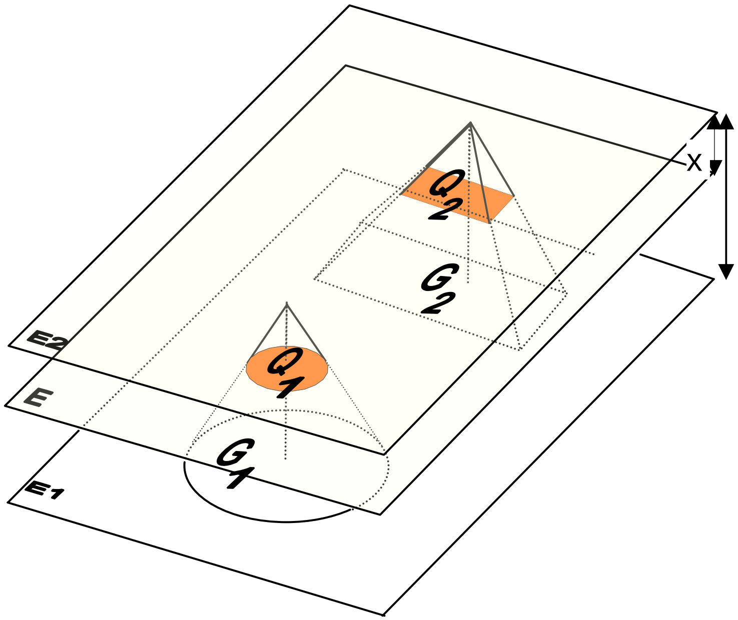




Anschauliche Erklärung des Prinzips, kein Beweis!

Wir benutzen den Satz von Cavalieri, um zu zeigen:

Je zwei Pyramiden (oder Kegel) mit gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche haben das gleiche Volumen.



- Die Schnittflächen Q_1 und Q_2 gehen durch zentrische Streckung aus den flächeninhaltsgleichen Grundflächen G_1 und G_2 hervor.
- Der Streckfaktor ist jeweils $\frac{x}{h}$.
- Damit ist

$$Q_1 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 G_1 \qquad \text{und}$$

$$Q_2 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 G_2$$

Q_1 und Q_2 haben also gleichen Flächeninhalt.

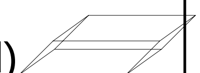
Diesen Zusammenhang werden wir in der folgenden Form später immer wieder benötigen:

$$\boxed{\frac{Q}{G} = \frac{x^2}{h^2}}$$

Euklid

Übersicht über die Beweise der Volumenformeln

Begründung der Formeln **ohne** Prinzip von **Cavalieri**

Körper	**Methode**
Quader	Volumenformel folgt aus den Forderungen an eine Volumenfunktion V
Senkrechte rechtwinklige **Dreiecksprismen**	Kongruent ergänzen zu einem **Quader**
Senkrechte **Prismen**	Zerlegen in senkrechte **Dreiecksprismen**
Parallelflach (Spat, Parallelepiped) 	Zerlegungsgleich zu einem Quader
Schiefe rechtwinklige Dreiecksprismen	Kongruent ergänzen von zu einem Parallelflach
Schiefe Prismen	Zerlegen in schiefe rechtwinklige Dreiecksprismen
Zylinder und schiefe Zylinder	Grenzwertbetrachtungen: Körper als **Grenzkörper** geeigneter **Prismen**

Euklid

Begründung der Formeln **mit** Prinzip von **Cavalieri**

Körper	**Methode**
Dreieckspyramide mit der Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche G	Durch 2 Pyramiden, die zur Ausgangspyramide volumengleich sind, zu einem *senkrechten* Prisma mit Grundfläche G ergänzen. Nachweis der Volumengleichheit mit dem Satz des Cavalieri.
Beliebige Dreieckspyramide mit Grundfläche G und Höhe h	Rückführung auf den Fall einer Dreieckspyramide mit der Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche G mit Höhe h (nochmals Satz des Cavalieri)
Beliebige Pyramide	Zerlegung der Grundfläche in Dreiecke und damit der Pyramide in Dreieckspyramiden gleicher Höhe.
Kegel	Grenzwertbetrachtungen: Körper als **Grenzkörper** geeigneter **Pyramiden**
Pyramiden- oder Kegelstümpfe	Differenz von Volumina von Pyramiden oder Kegeln (Strahlensätze)
Kugel	Vergleich mit Zylinder mit ausgesparten Kegel (Strahlensatz und Satz des Cavalieri). Mathematisch korrekte Begründung der Ergebnisse der Umfüllversuche aus der SI.

Euklid

Alternativen mit Prinzip von Cavalieri oder Grenzwertbetrachtungen

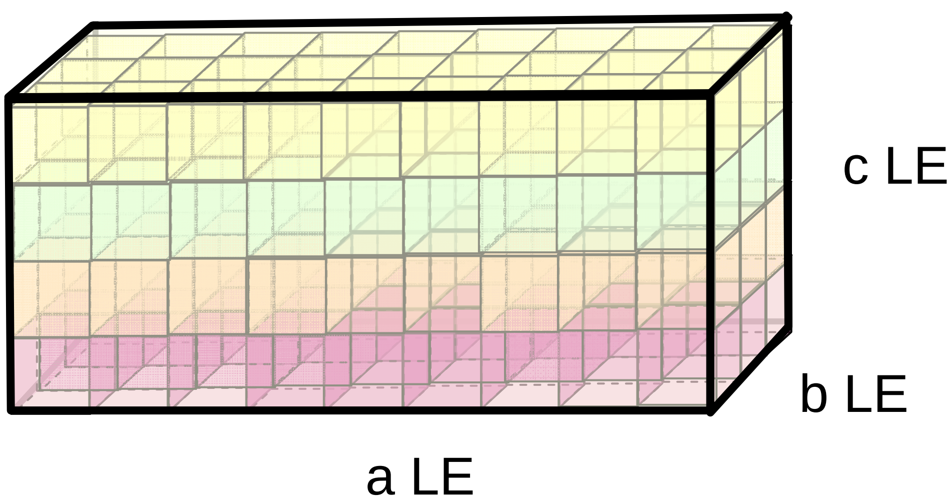
Körper	**Methode**
Beliebige Dreieckspyramide mit Grundfläche G und Höhe h	Durch 2 Pyramiden, die zur Ausgangspyramide volumengleich sind, zu einem ***schiefen*** Prisma mit Grundfläche G und Höhe h ergänzen. Nachweis der Volumengleichheit mit dem Satz des Cavalieri. (Beweis direkter, aber weniger anschaulich)
Beliebige Dreieckspyramide	Pyramide durch Treppenkörper aus senkrechten Prismen annähern. Analog zur Annäherung der Kreisfläche durch Rechtecke. Benötigt Summenformel für Quadratzahlen.
Kegel	Kegel durch Treppenkörper aus senkrechten Zylindern annähern.
Kugel	Kugel durch Treppenkörper aus senkrechten Zylindern annähern. Benötigt Summenformel für Quadratzahlen.

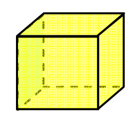
Quader

Quader, deren Kantenlänge rationale Vielfache a, b, c der Längeneinheit sind.

Wie bei der Berechnung von Flächeninhalten der Rechtecke erhalten wir auch hier wieder aus den Eigenschaften der Volumenfunktion V

$$V(\text{Quader}) = a \cdot b \cdot c \cdot V(W_e) \quad , \quad W_e \text{ Einheitswürfel}$$

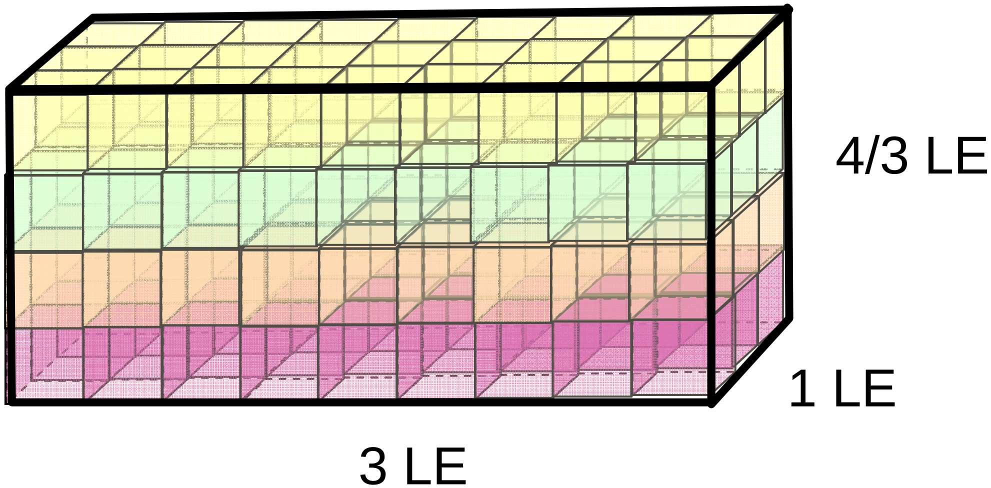


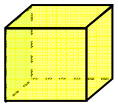


Geeigneter rationaler Bruchteil des Einheitswürfels W_e

Dies kann auch als Formel $V = G \cdot h$ aufgefasst werden.

Im Bild soll $a = 3$, $b = 1$, $c = 4/3$ sein.





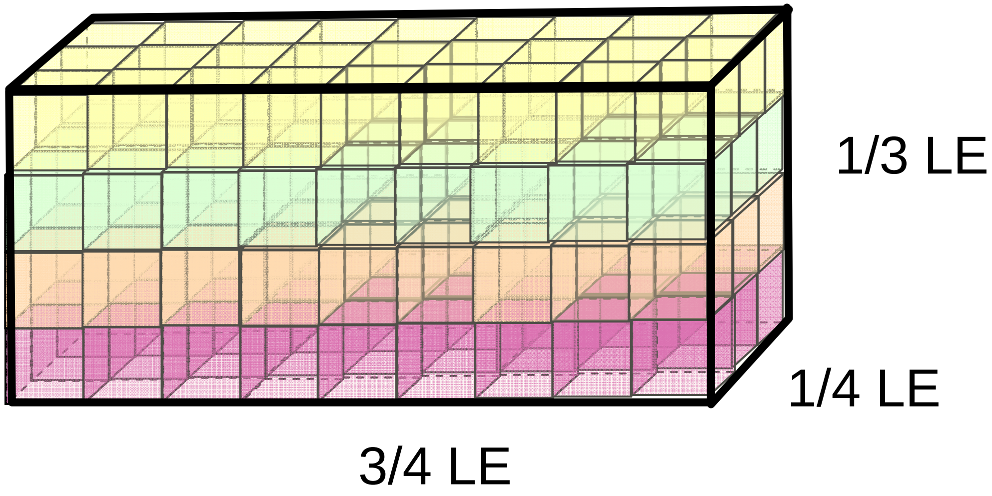
Geeigneter rationaler Bruchteil des Einheitswürfels W_e

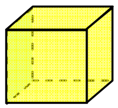
- Welchen Anteil des Einheitswürfels stellt das kleine gelbe Würfelchen dar?
- Begründen Sie damit die Formel

$$V(\text{Quader}) = a \bullet b \bullet c \bullet V(W_e) \quad , \quad W_e \text{ Einheitswürfel}$$

Euklid

Im Bild soll jetzt a = 3/4, b = 1/4 , c = 1/3 sein.





Geeigneter rationaler Bruchteil des Einheitswürfels W_e

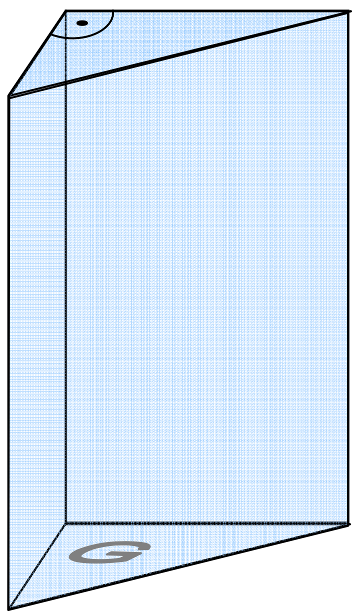
- Welchen Anteil des Einheitswürfels stellt jetzt das kleine gelbe Würfelchen dar?
- Begründen Sie auch damit die Formel

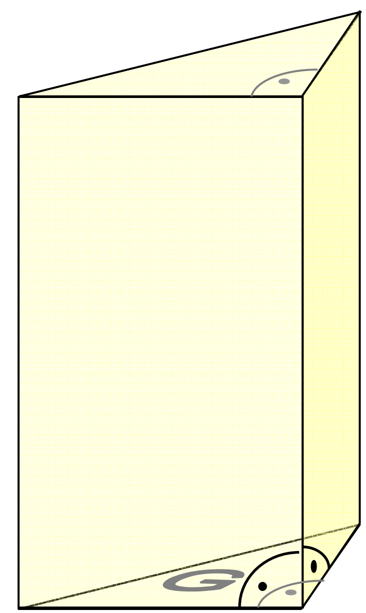
$$V(\text{Quader}) = a \bullet b \bullet c \bullet V(W_e) \quad , \quad W_e \text{ Einheitswürfel}$$

Rechtwinkliges Dreiecksprisma

Gegeben ist ein Dreiecksprisma, dessen Grundfläche G ein rechtwinkliges Dreieck ist   (Rechtwinkliges Dreiecksprisma).

Wir ergänzen dieses durch ein dazu kongruentes zu einem Quader

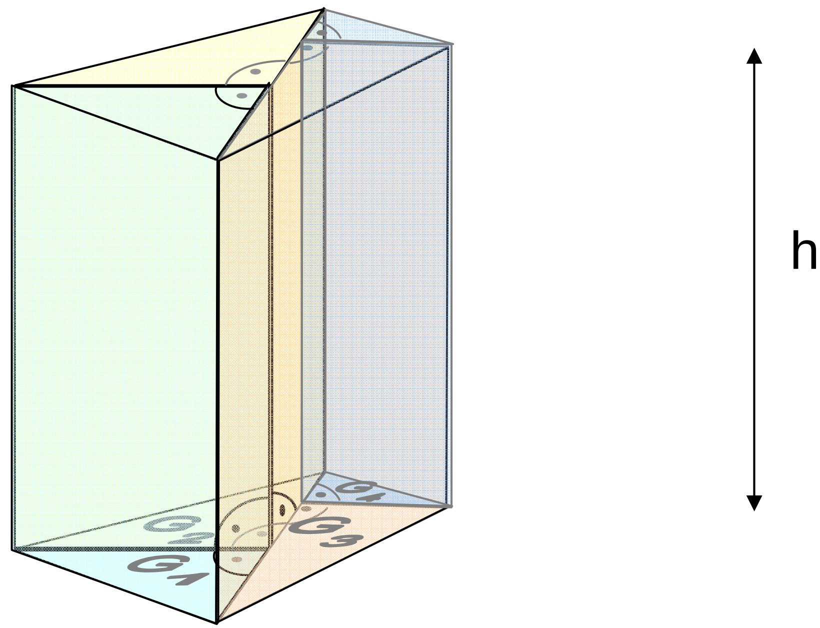




$\Rightarrow$ V(Quader) = 2G • h $\Rightarrow$ **V(Prisma) = G • h**

Beliebige senkrechte Prismen

Gegeben ist ein beliebiges senkrechtes Prisma mit der Grundfläche G.

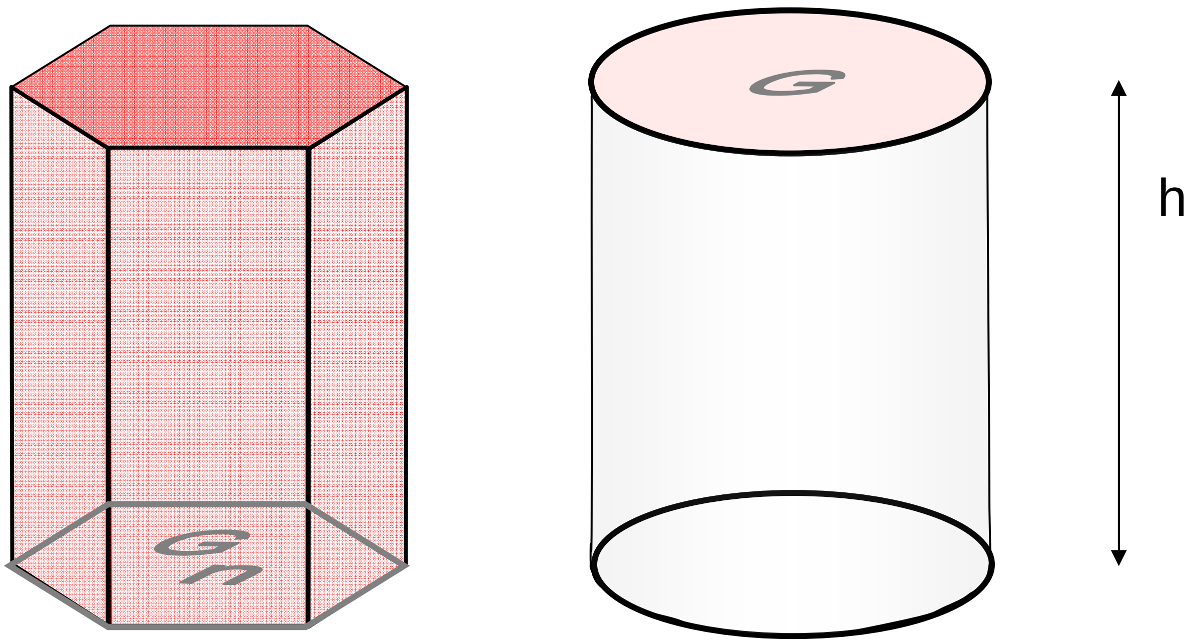


G wird in rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die das Prisma dann in senkrechte rechtwinklige Dreiecksprismen mit Grundseiten G_1, G_2, …G_n aufteilen .

$$\begin{aligned} V(\text{Prisma}) &= G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h + G_4 \cdot h \\ &= (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \cdot h \quad = \quad G \cdot h \end{aligned}$$

Zylinder

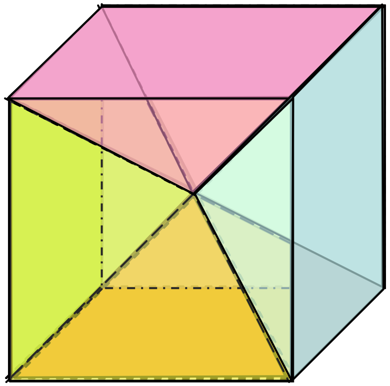
Ein Zylinder mit einem Kreis als Grundfläche G und der Höhe h kann von innen und außen durch Prismen beliebig genau angenähert werden.



$$V(\text{Zylinder}) = \text{Grenzwert von } V(\text{n-Ecksprisma}) = \text{Grenzwert von } G_n \bullet h$$
$$= G \bullet h$$

Pyramiden

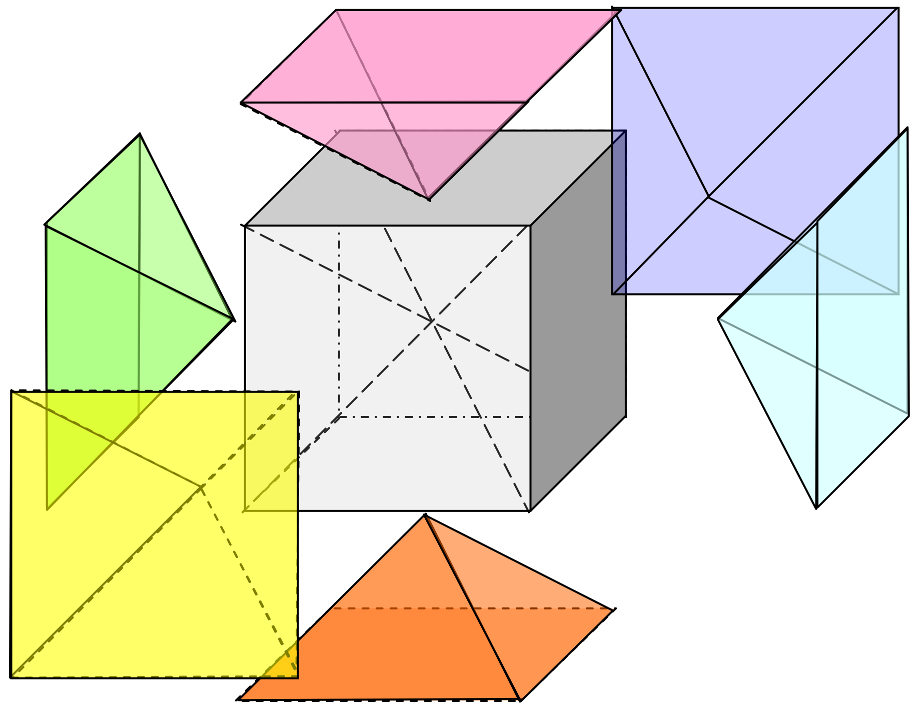
Hinführung zur Berechnungsformel:



Verbinde alle Eckpunkte eines Würfels mit dem Würfelmittelpunkt.
Wie viele Pyramiden entstehen?

Pyramiden

Hinführung zur Berechnungsformel:



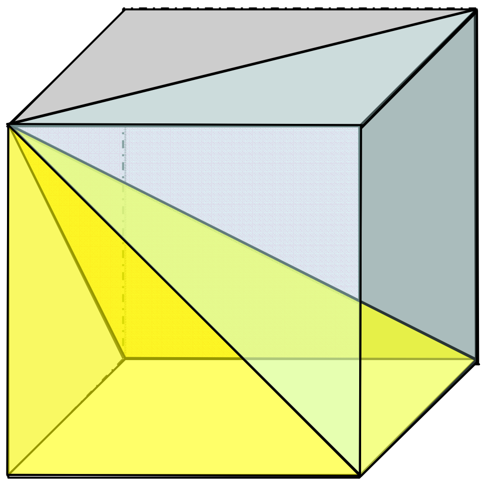
V(Pyramide) $= 1/6\ V(\text{Würfel}) = 1/6\ a^3 = 1/6\ a^2 \bullet a$

$= 1/3\ a^2 \bullet a/2$

$= 1/3\ G \bullet h$

Pyramiden

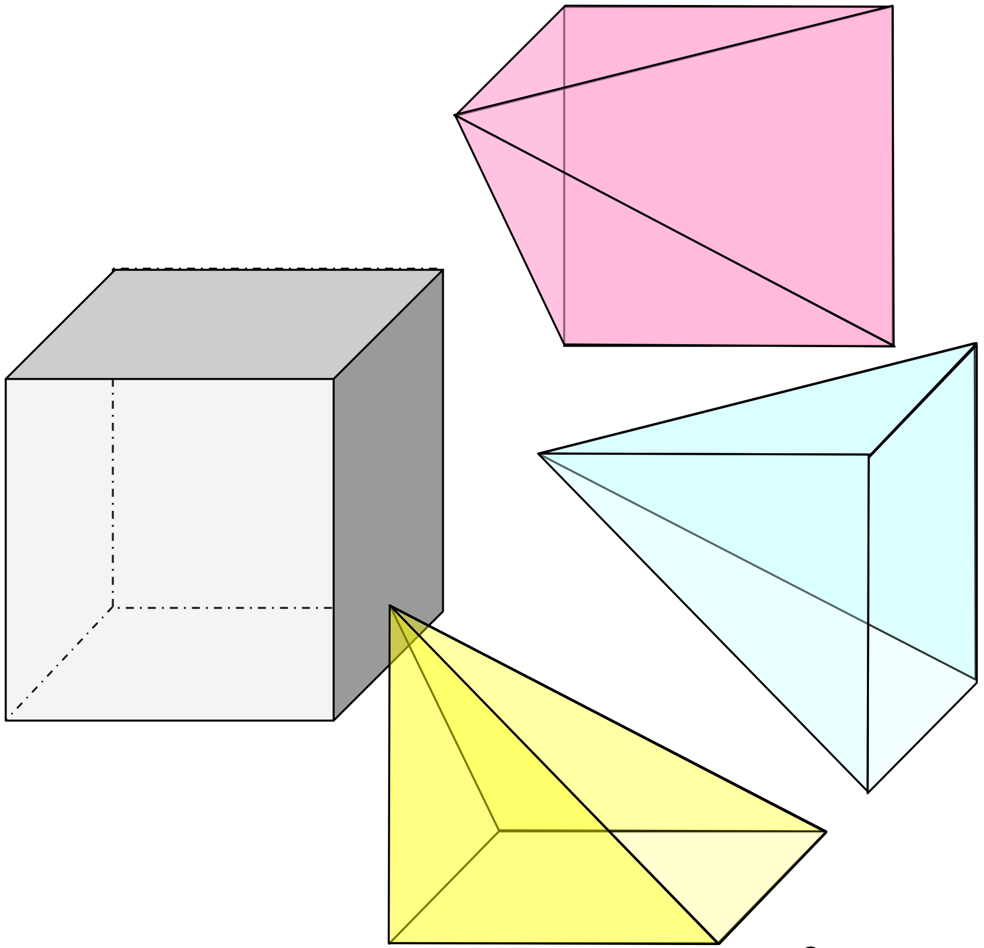
Andere Zerlegung



Verbinde einen Eckpunkte eines Würfels mit den benachbarten Eckpunkten, so dass 3 Pyramiden entstehen.

Euklid

Pyramiden

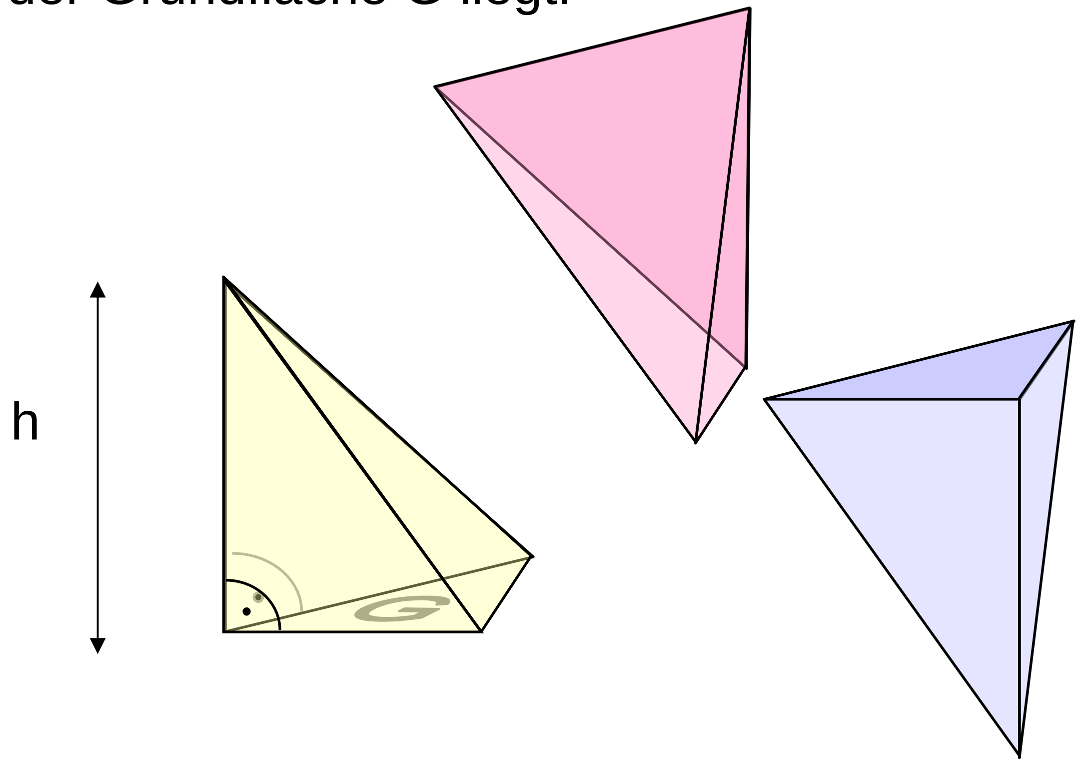


V(Pyramide) = 1/3 V(Würfel) = 1/3 a^3 = 1/3 $a^2 \cdot a$

= 1/3 G•h

Spezielle Dreieckspyramiden

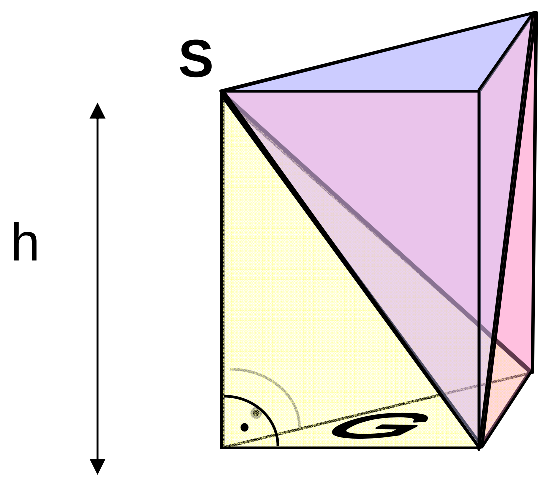
Gegeben ist eine Pyramide, bei der die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche G liegt.

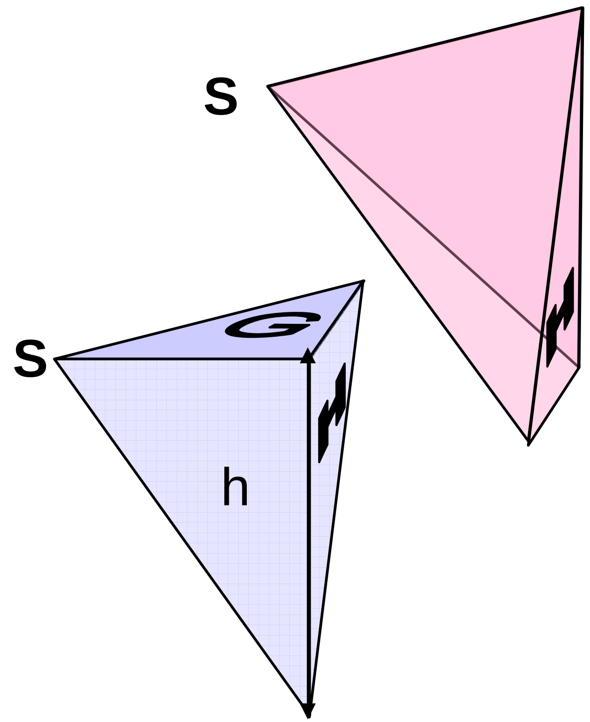


Wir ergänzen diese Pyramide durch 2 weitere Pyramiden, so dass ein senkrechtes Dreiecksprisma entsteht.

Spezielle Dreieckspyramiden

Wir erinnern uns:
Zwei Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben das gleiche Volumen.





Alle drei Pyramiden haben das gleiche Volumen ⇒

V(Pyramide) = 1/3 V(Dreiecksprisma)

= 1/3 G•h

Pyramiden allgemein

Zu jeder **Dreieckspyramide** kann man eine Dreieckspyramide finden, bei der die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche G liegt und die gleiche Höhe hat.
Damit stimmt die Formel auch für beliebige Dreieckspyramiden.

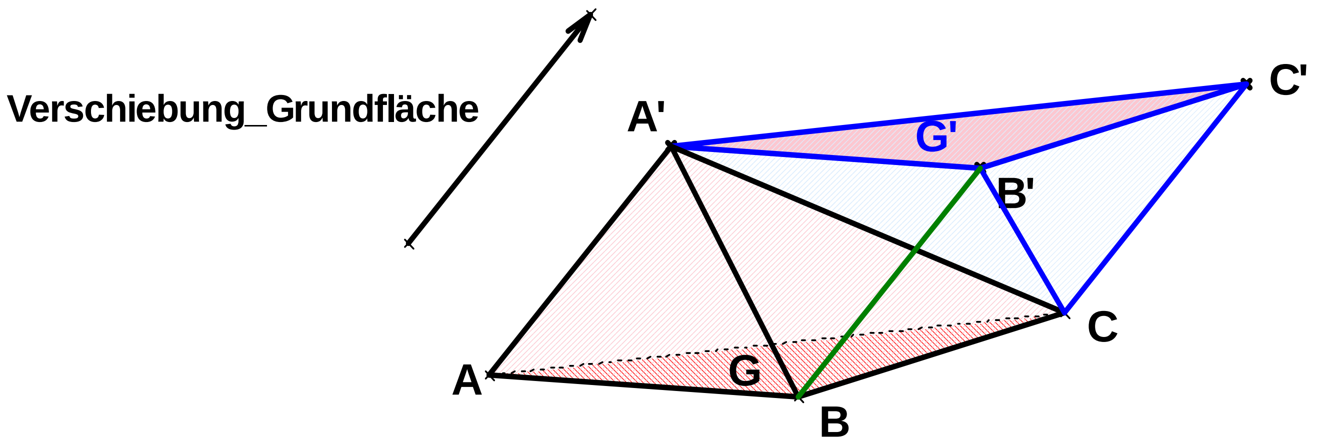
Analog zur allgemeinen Volumenformel für Prismen sieht, man, dass jede Pyramide in Dreieckspyramiden zerlegt werden kann.
Daraus gewinnt man die Formel auch für den allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} V(\text{Pyramide}) &= 1/3\ G_1 \bullet h + 1/3\ G_2 \bullet h + \ldots + 1/3\ G_n \bullet h \\ &= 1/3\ (G_1 + G_2 + .. + G_n) \bullet h = 1/3\ G \bullet h \end{aligned}$$

Euklid

Dreieckspyramiden: Alternative

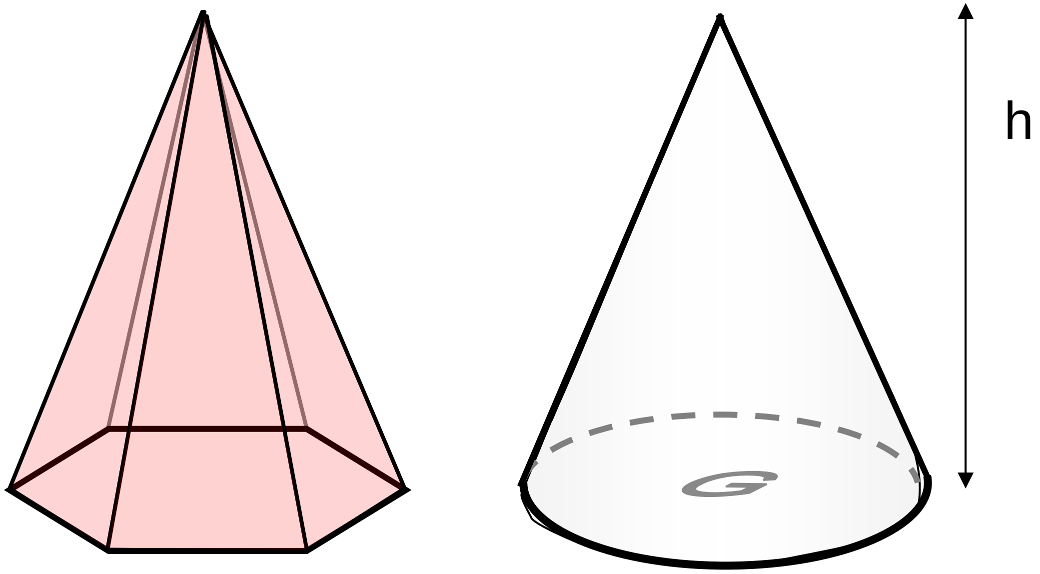
Statt mit speziellen Dreieckspyramiden (bei der die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche G liegt) zu arbeiten kann man die Ergänzung zu schiefen Prismen auch unmittelbar durchführen, analog zur zuvor durchgeführten Konstruktion. Mit einem dynamischen Geometrieprogramm (DynaGeo) kann man dies gut veranschaulichen.



Die Pyramiden mit den kongruenten Grundflächen G und G' und den Spitzen A' (schwarz) bzw. C (blau) haben offensichtlich gleiche Höhe und daher gleiches Volumen. Das Viereck BCC'B' ist ein Rechteck (Verschiebung von BC senkrecht zu BC auf B'C'). Daher sind die Dreiecke BCB' und CC'B' flächeninhaltsgleich. Die Pyramiden mit diesen Dreiecken als Grundflächen und der Spitze A' (blau und grün) haben wiederum gleiche Höhe und daher auch gleiches Volumen.

Kegel

Ein Kegel mit einem Kreis als Grundfläche G und der Höhe h kann von innen und außen durch Pyramiden beliebig genau angenähert werden.



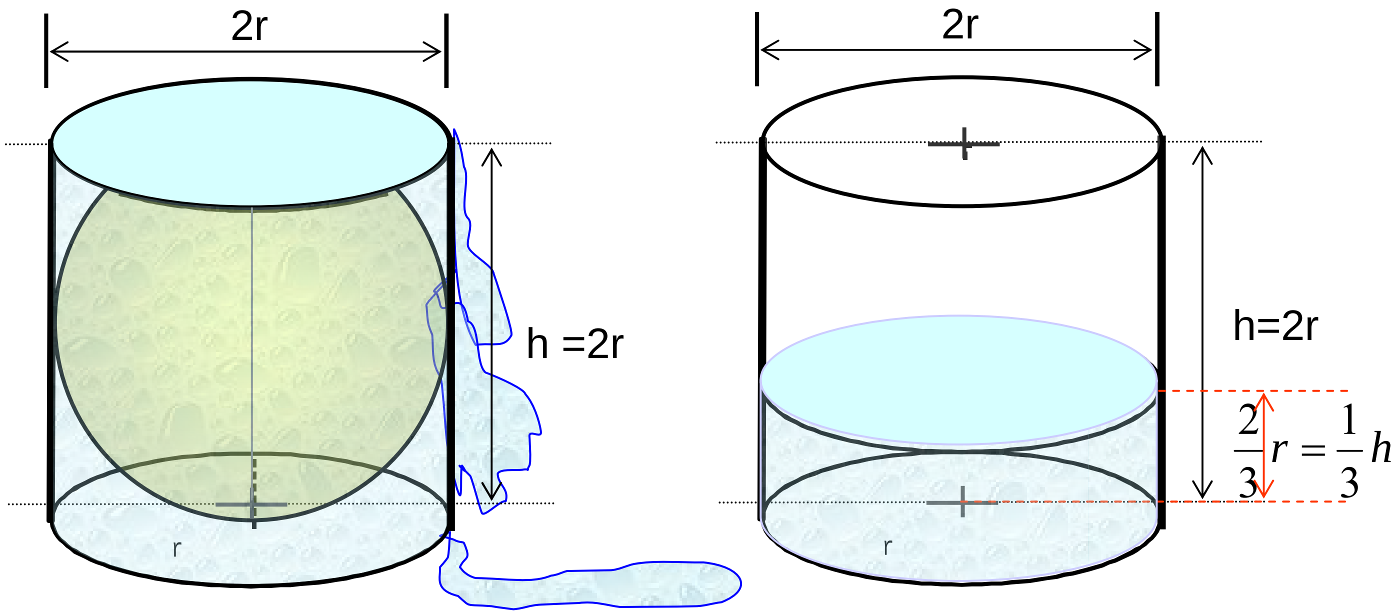
V(Kegel) = Grenzwert von V(n-Pyramide) = Grenzwert von 1/3 $G_n \cdot h$
= 1/3 $G \cdot h$

Euklid

Kugel

Experimentell (Schule):

Um das Volumen einer Kugel zu bestimmen, wird eine Kugel in einen geeigneten mit Wasser gefüllten Zylinder eingetaucht (h=2r). .



Wird die Kugel wieder entfernt, bleibt $\frac{1}{3}$ des Wassers noch übrig.

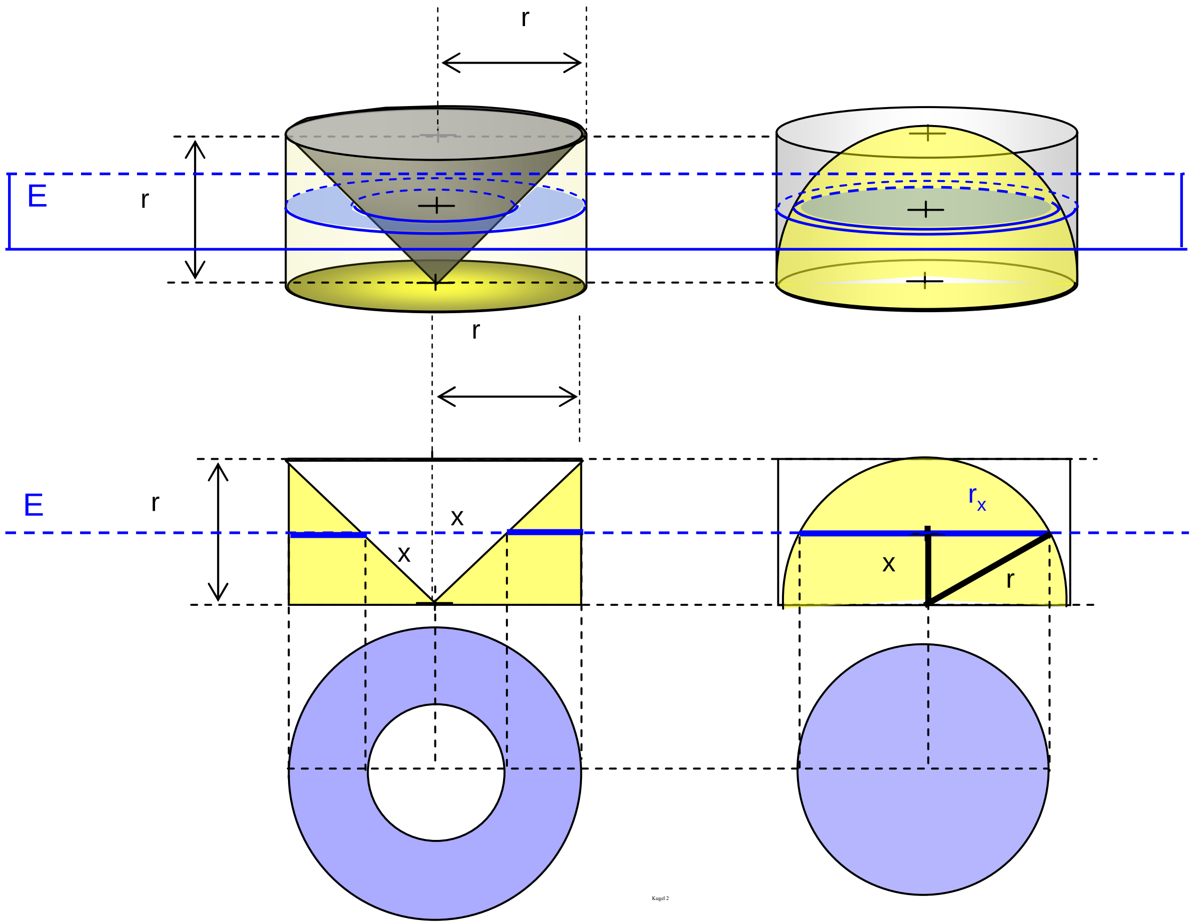
Das lässt vermuten: $V_{Kugel} = 2/3\ V_{Zylinder} = 2/3\ r^2\pi \cdot 2r = 4/3\ \pi\ r^3$

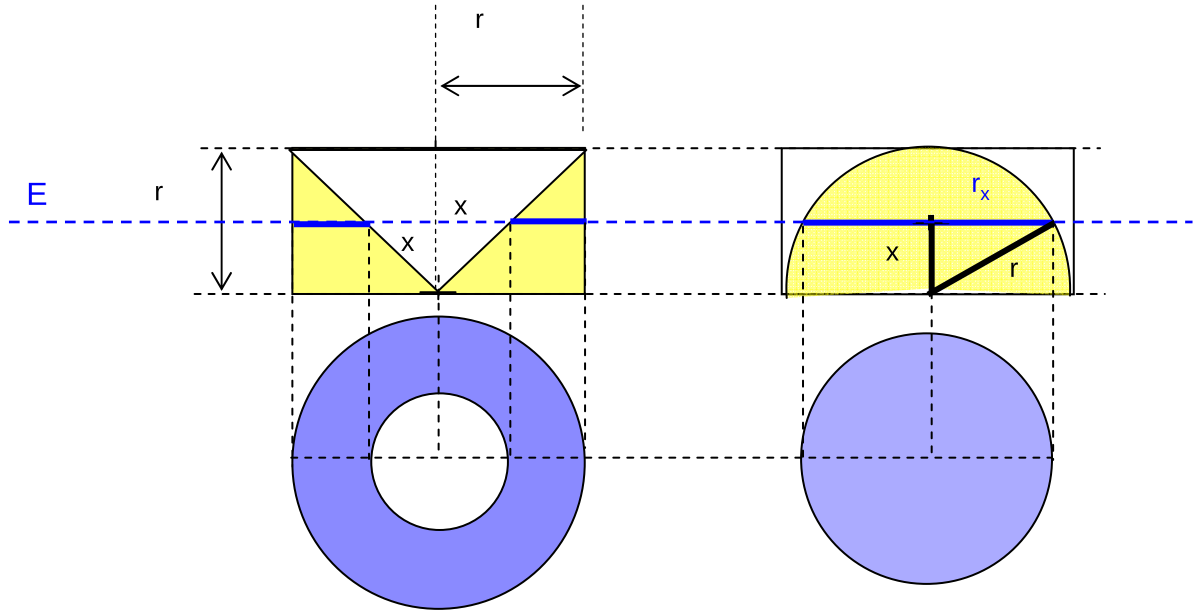
Euklid

Um diese Vermutung exakt zu bestätigen, vergleichen wir das Volumen einer Halbkugel mit dem Volumen des Restkörpers aus einem Zylinder mit Radius und Höhe r, aus dem ein Kegel mit der Höhe und dem Radius r entfernt wurde.

Wir zeigen mit Hilfe des Satzes von Cavalieri, dass diese Volumina gleich sind.

Da der Kegel 1/3 des Zylindervolumens einnimmt, wird damit die Vermutung bestätigt.





Es genügt zu zeigen, dass die Schnittflächen der beiden Körper mit jeder zur Grundfläche parallelen Ebene E in der Höhe x den gleichen Flächeninhalt haben.

Kreisring in der Höhe x:

Der innere Kreis hat offensichtlich den Radius x. $\Rightarrow$

$A_{Ring} = \pi r^2 - \pi x^2 = \pi (r^2 - x^2)$

Kreisfläche, in der Höhe x aus der Kugel ausgeschnitten:

Radius $r_x^2 = r^2 - x^2$ $\Rightarrow$

$A_{Kreis} = \pi (r^2 - x^2)$

Damit ist gezeigt: $\boxed{V_{Kugel} = 2/3\ V_{Zylinder} = 2/3\ r^2\pi \bullet 2r = 4/3\ \pi\ r^3}$

Oberfläche und Mantel

Bei Prismen und Pyramiden wird die Berechnung auf die Berechnung geeigneter Polygone zurückgeführt.

Methoden um fehlende Längen zu erhalten:

- Zentrische Streckung, Strahlensätze, Ähnlichkeit
- Satzgruppe des Pythagoras
- Trigonometrie

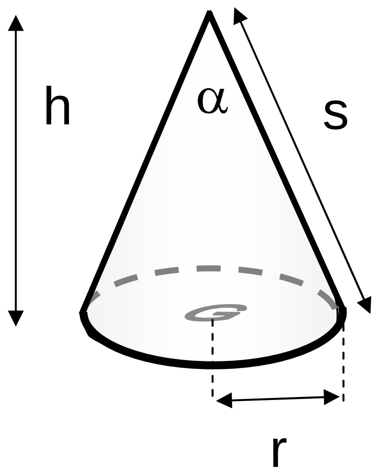
Zu speziellen Formeln für regelmäßige Prismen und Pyramiden → Übungen

Beweisen Sie:
Für regelmäßige Pyramiden, Pyramidenstümpfe, Kegel und Kegelstümpfe gilt für die Mantelfläche M

$$\boxed{M = \text{mittlerer Umfang} \cdot \text{Seitenhöhe}}$$

Präzisieren Sie die in hier vorkommenden Begriffe.

Kegelmantel und Oberfläche

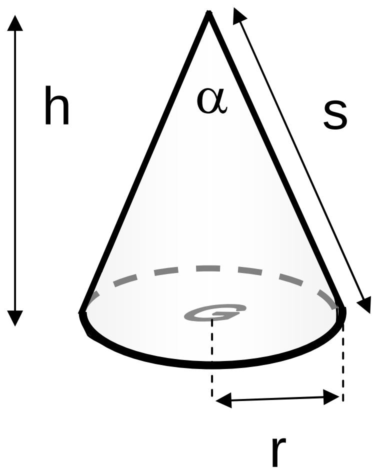


Ein Kegel sei mit der Höhe h = 5 cm und r = 3 cm sei gegeben.
Fertigen Sie eine Skizze des Mantels.

Berechnen Sie
- die Länge der Seitenlinie s,
- den Öffnungswinkel α,
- die Größe der Mantelfläche
- die Oberfläche.

Zeichnen Sie die Mantelfläche genau.

Wie hängen die einzelnen Größen zusammen?
Schreiben Sie die Beziehungen zwischen den Größen auf.
Beweisen Sie die in Ihrer Formelsammlung angegebenen Formeln.

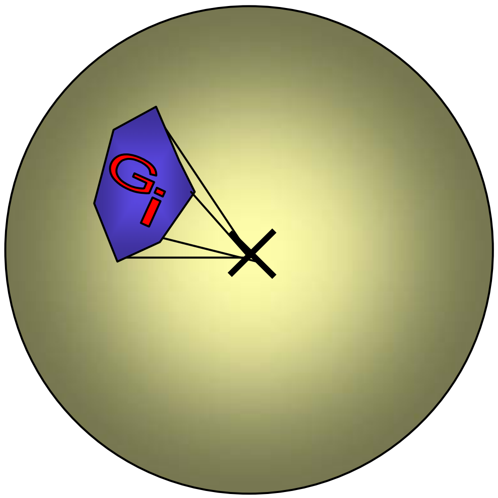


Ein Kegel mit der Seitenlinie s = 5 cm und einem Öffnungswinkel von $\alpha = 40°$ sei gegeben.
Zeichnen Sie den Mantel so, dass Sie daraus ein Modell des Kegels bauen können.

Kugeloberfläche

Um die Oberfläche einer Kugel mit Radius r zu berechnen stellt man sich die Kugel in „kleine“ Kugelsektoren zerlegt vor, die annähernd Pyramiden sind.

Es ist V_{Kugel} = Summe aller Pyramidenvolumen
= Summe $(1/3\ r\ G_i)$
= $1/3\ r$ (Summe G_i)
= $1/3\ r\ O_{Kugel}$



$\Rightarrow \quad V_{Kugel} = 1/3 \cdot r \cdot O_{Kugel}$

$\Rightarrow \quad O_{Kugel} = 3/r \cdot V_{Kugel}$

$\Rightarrow \quad = 3/r \cdot 4/3\ \pi\ r^3$

$\Rightarrow \quad O_{Kugel} = 4\ \pi\ r^2$

Die Formel zeigt, dass die Oberfläche der Kugel genau das 4-fache der Äquatorfläche beträgt.
Diese Tatsache ist die Grundlage für viele experimentelle Zugänge zur Formel für die Kugeloberfläche in der Schule.

Euklid