Blatt4 Lösungen

1. Goldener Schnitt

a) Nachweis, dass die Strecke AB durch T im Goldenen Schnitt geteilt wird.

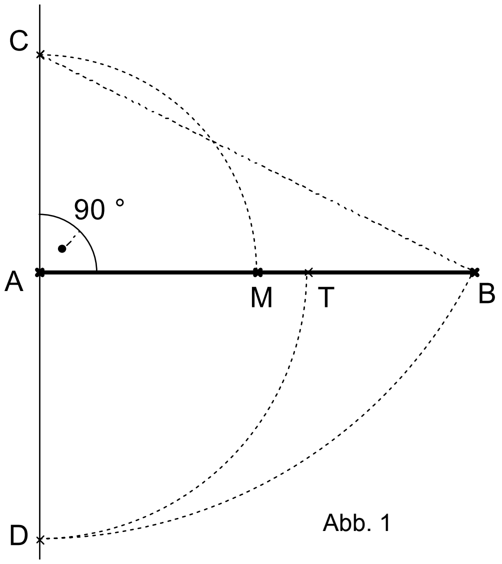


Abb. 1

$$\overline{AB} = a\,,\ \overline{AC} = \frac{a}{2} \qquad \Rightarrow$$

$$\overline{CD} = \overline{CB} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5} \quad \text{Pythagoras}$$

$$\overline{AT} = \overline{AD} = \overline{CD} - \overline{CA} = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

Damit ist gezeigt, dass T die Strecke AB im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt.

b) In Abb. 2 wurden die Seiten eines Quadrats im Goldenen Schnitt geteilt.

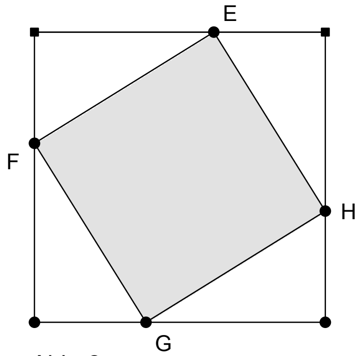


Abb. 2

- Alle Eckpunkte E, F, G, H teilen die Quadratseiten im gleichen Verhältnis (das hat nichts damit zu tun, dass dieses Verhältnis Φ ist) und sind auch in gleicher Weise jeweils von den Eckpunkten aus angetragen (hier immer das längere Teilstück von der Quadratecke aus im Uhrzeigersinn). Damit sind die entstehenden Dreiecke kongruent und rechtwinklig. Deren Hypotenusen sind die Seiten des entstehenden Vierecks EFGH und die vom rechten Winkel verschiedenen Winkel ergeben zusammen 90°, also besitzt das Viereck EFGH gleich lange Seiten und vier rechte Winkel, ist also ein Quadrat.

- Der größere Abschnitt der ursprünglichen Quadratseite ist $\frac{1}{\Phi}a$, der kleinere $\left(1-\frac{1}{\Phi}\right)a$. Mit dem Satz des Pythagoras berechnet man daraus die Seite des Quadrats EFGH:

$$a\sqrt{\frac{1}{\Phi^2}+\left(1-\frac{1}{\Phi}\right)^2} = a\sqrt{\frac{1+(\Phi-1)^2}{\Phi^2}} = a\frac{\sqrt{1+\Phi^2-2\Phi+1}}{\Phi} = a\frac{\sqrt{2+\Phi^2-2\Phi}}{\Phi}.$$

Benutzt man jetzt die speziellen Eigenschaften der Zahl Φ, dann kann man weiter vereinfachen:

$$a\frac{\sqrt{2+\Phi^2-2\Phi}}{\Phi} = a\frac{\sqrt{2+\Phi+1-2\Phi}}{\Phi} = a\frac{\sqrt{3-\Phi}}{\Phi} \quad \text{wegen } \Phi^2 = \Phi+1.$$

Für den Flächeninhalt des Quadrates EFGH ergibt sich $A_{\text{EFGH}} = a^2\frac{3-\Phi}{\Phi^2} = a^2\frac{3-\Phi}{\Phi+1}$

Der Anteil des Flächeninhalts des Quadrats EFGH am ursprünglichen Quadrat beträgt also

$$\frac{A_{EFGH}}{A_{Start}} = \frac{a^2\frac{3-\Phi}{\Phi+1}}{a^2} = \frac{3-\Phi}{\Phi+1} \approx 0{,}528$$

c) Zeichnen Sie ein Quadrat ABCD. Teilen Sie jede der vier Seiten wie in Abb. 3 im Goldenen Schnitt. Zeigen Sie, dass PQRS ein „Goldenes Rechteck“ ist, d.h. dass das Seitenverhältnis des Rechtecks der Goldene Schnitt ist.

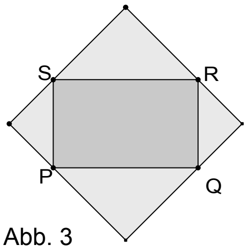
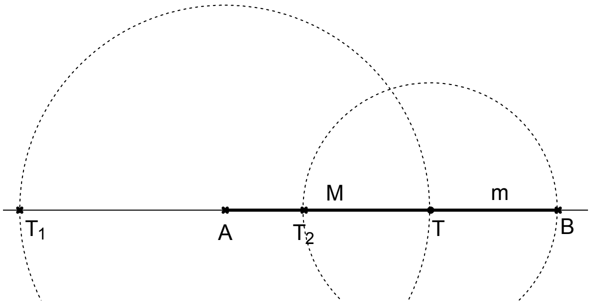


Abb. 3

Die Dreiecke, die vom ursprünglichen Quadrat abgeschnitten werden sind ähnlich, es sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Damit stehen die Katheten im gleichen Verhältnis zueinander wie die Hypotenusen. Das Verhältnis der Katheten (größere zur kleineren) ist nach Voraussetzung gerade die goldene Schnittzahl Φ, also auch das Verhältnis der Hypotenusen. Das ist das Seitenverhältnis des Rechtecks PQRS, das damit ein „Goldenes Rechteck“ ist.

2. Goldener Schnitt

a) Eine Strecke $\overline{AB}$ wird durch den Teilpunkt T im goldenen Schnitt geteilt. Die Strecke $\overline{AT} = M$ ist die größere Teilstrecke, die Strecke $\overline{TB} = m$ die kleinere. Jetzt werden gemäß der nebenstehenden Abbildung zwei weitere Punkte T_1 und T_2 konstruiert:



- T_1 durch Abtragen von M nach außen,
- T_2 durch Abtragen von m von T aus auf M.

Begründen Sie, dass A die Strecke $\overline{BT_1}$ und T_2 die Strecke $\overline{TA}$ im goldenen Schnitt teilen.

A teilt die Strecke $\overline{BT_1}$ im goldenen Schnitt:

Da *T* $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt ist $\overline{AB} : \overline{AT}$ = „Ganzes“ : „größerem Abschnitt“ = $\overline{AB}$:M= Φ.
$\overline{AB}$ ist der größere Abschnitt auf $\overline{BT_1}$, $\overline{AT_1}$ = M der kleinere Abschnitt auf $\overline{BT_1}$ und $\overline{AB} : \overline{AT_1}$ = Φ, also teilt A die Strecke $\overline{BT_1}$ im goldenen Schnitt.

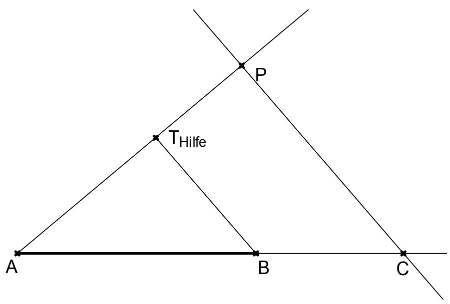
T_2 teilt die Strecke $\overline{TA}$ im goldenen Schnitt:

Da *T* $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt ist $\overline{AT} : \overline{TB}$:= „größerer Abschnitt“ : „kleinerem Abschnitt“ = $\overline{AT}$:m = Φ.
$\overline{TT_2}$ = m ist der größere Abschnitt auf $\overline{TA}$. Damit ist $\overline{AT} : \overline{TT_2}$ = $\overline{AT}$:m = Φ = „Ganzes“ : „größerem Abschnitt“ . Daher teilt auch T_2 die Strecke $\overline{TA}$ im goldenen Schnitt.

b) Beschreiben Sie eine Konstruktion, wie man zu einer Strecke $\overline{AB}$ eine Strecke $\overline{AC}$ gewinnt, so dass $\overline{AB}$ der Major (der größere Abschnitt) der im goldenen Schnitt geteilten Strecke $\overline{AC}$ ist.

1. Möglichkeit: Nutze die Zusammenhänge aus Teil a) aus.
Teile $\overline{AB}$ mit einem der Standardverfahren im goldenen Schnitt durch den Teilpunkt T und trage den größeren Teilabschnitt M „nach außen“ ab (Punkt T_1 in a)).

2. Möglichkeit: Teile eine beliebige geeignete Strecke $\overline{AP}$ mit einem der Standardverfahren im goldenen Schnitt und übertrage das Teilverhältnis (mit Hilfe von parallelen Geraden) auf die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$, so dass $\overline{AB}$ der größere Teilabschnitt der Teilung wird.



3. Goldenes Rechteck und Fibonacci Zahlen

Ein Rechteck ABCD heißt „goldenes Rechteck“, wenn das Verhältnis seiner Seitenlängen die goldene Schnittzahl Φ ist.

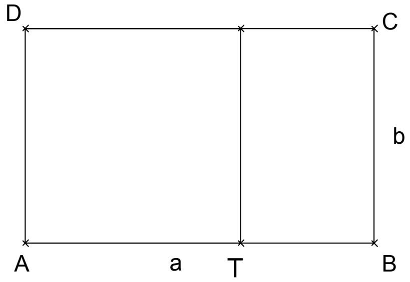


Abb.1

a) Konstruieren Sie ein goldenes Rechteck, dessen längere Seite 10 cm lang ist.

Teile eine Strecke der Länge 10 cm im goldenen Schnitt und verwende den Major der Teilung als zweite Rechtecksseite.

b) Beweisen Sie:

- Wenn von einem goldenen Rechteck ein Quadrat abgeschnitten wird (Abb.1), dann ist das verbleibende Rechteck wieder ein goldenes Rechteck.

Das verbleibende Rechteck hat als Seitenlängen den Major und den Minor der im goldenen Schnitt geteilten längeren Rechtecksseite und ist damit wieder golden.

- Wenn ein Rechteck, bei dem ein Quadrat abgeschnitten wird, ähnlich zum verbleibenden Rechteck ist, dann ist das Rechteck golden.

In Abbildung 1 sieht man: Aus der genannten Bedingung ergibt sich mit $\overline{AT} = \overline{AD}$ dass $\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}$ ist, und damit T die Seite $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt, das Rechteck damit also golden ist.

c) Beschreiben Sie die Konstruktion in Abb.2 und führen diese mit dem Rechteck aus a) durch, so lange Ihnen das möglich ist.
Wie lange kann man die Konstruktion fortsetzen?
Überlegen Sie, wie man die „Spirale“ „nach außen“ fortsetzen kann.

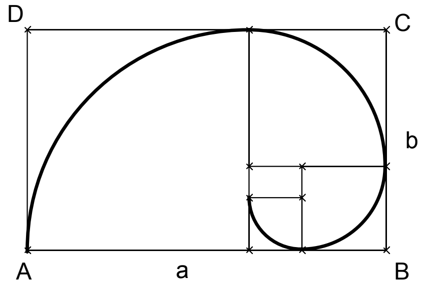
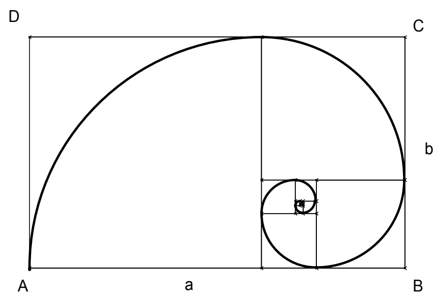


Abb.2

Man teilt immer wieder die größere Rechtecksseite im goldenen Schnitt und trennt ein Quadrat ab. Da das übrig bleibende Rechteck wieder golden ist, kann diese Konstruktion beliebig lange fortgesetzt werden (natürlich in der Realität nur innerhalb der Zeichengenauigkeit).
Nach außen kann die Konstruktion ebenfalls beliebig lange fortgesetzt werden, indem immer wieder Quadrate angesetzt werden. Dass dabei immer wieder goldene Rechtecke entstehen ist offensichtlich.



d) Fertigen Sie eine Zeichnung gemäß Abb.3 an.
Sie beginnen mit einem Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB}$ = 1 cm.

- Berechnen Sie die Seitenlängen der nachfolgenden Quadrate.
  Benennen Sie diese Seitenlängen mit f_i , wobei f_1=1 ist.

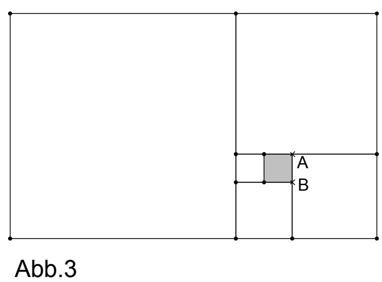


Abb.3

Man erhält offensichtlich die Zahlenfolge
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,…, die so genannte Folge der Fibonacci-Zahlen. Man erhält jede Zahl der Folge als Summe der beiden vorangehenden Zahlen, wobei die ersten beiden Zahlen jeweils 1 sind. Fomaler ausgedrückt: Die Folge kann rekursiv definiert werden durch die Festlegungen
$f_1=1$, $f_2=1$, $f_n= f_{n-1}+f_{n-2}$ für n ≥ 3.

- Berechnen Sie jeweils die Quotienten $\frac{f_{i+1}}{f_i}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
f_{n+1}/f_n	1	2	1,5	1,667	1,6	1,625	1,615	1,619	1,618	1,618	1,618	-

Man sieht, dass sich die Quotienten der goldenen Schnittzahl Φ anzunähern scheinen, die gezeichneten Rechtecke werden also immer „goldener“.

- Können Sie eine „Spirale“ wie in c) zeichnen?
- Können Sie einen Zusammenhang mit c) herstellen?
  Gemeinsamkeiten, Unterschiede?

Nach außen lässt sich die Spirale immer weiter durch Anfügen von Quadraten beliebig fortsetzen. Nimmt man nun eines der entstehenden Rechtecke als „fast golden“ als Start-Rechteck, dann sieht man, dass man nach innen solange Quadrate abtrennen kann, bis man bei der ursprünglichen Figur aus den zwei Quadraten angelangt ist, danach endet die Spirale, im Gegensatz zum Start mit einer „echten“ goldenen Spirale.

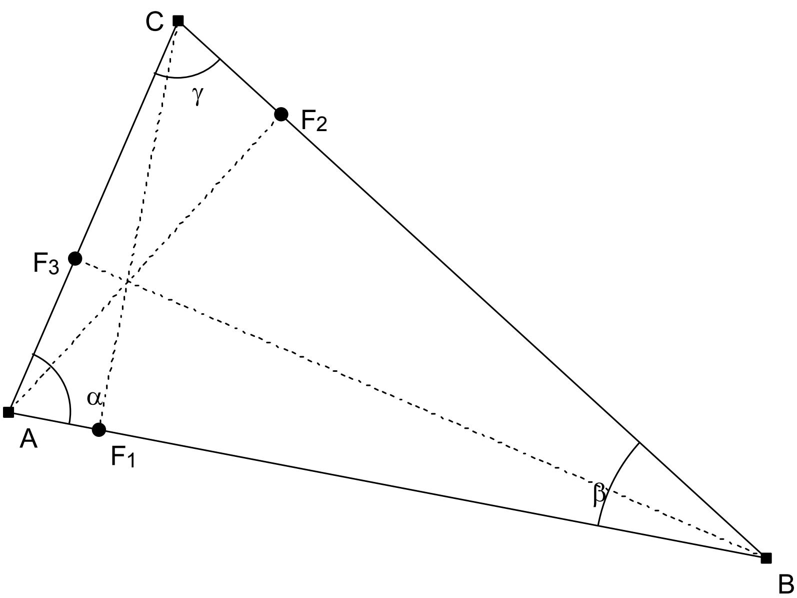
4. Teilverhältnisse

Im Dreieck ABC sind die Höhenfußpunkte F_1, F_2 und F_3 eingetragen.

Bestimmen Sie mit Hilfe trigonometrischer Funktionen, in welchem Verhältnis die Dreiecksseiten von den Lotfußpunkten jeweils geteilt werden.

Zeigen Sie:

$$\frac{|AF_1|}{|F_1B|}\cdot\frac{|BF_2|}{|F_2C|}\cdot\frac{|CF_3|}{|F_3A|}=1$$



Am einfachsten arbeitet man mit der Cosinusfunktion. Die zu untersuchenden Abschnitte auf den Dreiecksseiten sind gerade die Projektionen der Dreiecksseiten auf benachbarte Dreiecksseiten (diese Stücke spielen auch beim Beweis des Cosinussatzes die entscheidende Rolle). Es ist allerdings zu beachten, dass die in der Behauptung auftretenden Verhältnisse undefiniert sind, wenn ein Winkel 90° ist.
Man erhält sofort (zumindest für spitzwinklige Dreiecke)

$$\frac{|AF_1|}{|F_1B|}\cdot\frac{|BF_2|}{|F_2C|}\cdot\frac{|CF_3|}{|F_3A|}=\frac{|AC|\cdot\cos\alpha}{|BC|\cdot\cos\beta}\cdot\frac{|AB|\cdot\cos\beta}{|AC|\cdot\cos\gamma}\cdot\frac{|BC|\cdot\cos\gamma}{|AB|\cdot\cos\alpha}=1$$

Man überzeugt sich leicht (?) an einer Skizze, dass diese Beziehung auch für stumpfwinklige Dreiecke gilt (analog zum Beweis des Cosinussatzes in der Vorlesung).