Aufgaben zur Vertiefung der Geometrie

WS 2005/06 — 5./6. Dezember 2005 — Blatt 3

1. Umkugel und Innenkugel eines Tetraeders

Leiten Sie die Formel für das Volumen, die Oberfläche, den Radius der umbeschriebenen und der einbeschriebenen Kugel eines regelmäßigen Tetraeders abhängig von der Kantenlänge a her.

Zeichnen Sie die entsprechenden Körper im Grund- und Aufriss, wobei eine Seitenfläche des Tetraeders in der Grundrissebene liegt und eine Kante, die nicht in der Grundrissebene liegt, parallel zur Aufrissebene verläuft.

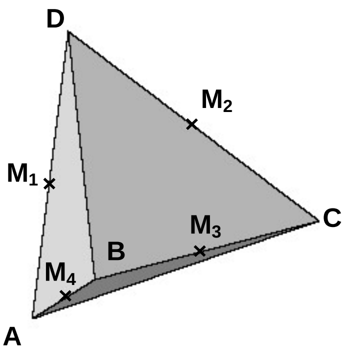
2. Oktaeder und Würfel

In einem regulären Oktaeder mit der Kantenlänge 6 cm werden die Schwerpunkte der Seitenflächen so miteinander verbunden, dass ein einbeschriebener Würfel entsteht (der zum Oktaeder duale Körper).

a) Konstruieren Sie die Grund- und Aufrisse der beiden Körper, so dass „der Oktaeder auf der Spitze steht“ (d.h. die Raumdiagonale senkrecht auf der Grundrissebene steht) und zwei Kanten des Oktaeders parallel zur Aufrissebene verlaufen.
Geben Sie eine kurze Konstruktionsbeschreibung.

b) Zeichnen Sie die Figur in Kavalierprojektion (k=0,5 und alpha=45°) und in Militärprojektion (Winkel zur Horizontalen 60°).
Sie können die benötigten Daten aus a) übernehmen.

3. Tetraederschnitt



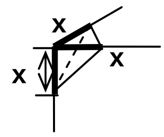
In einem regulären Tetraeder wird ein ebener Schnitt durch die drei Kantenmitten M_1, M_2 und M_3 gelegt. Begründen Sie, dass der Schnitt auch durch die Kantenmitte M_4 geht.

Welche Form hat die Schnittfläche?

Zeichnen Sie die Figur im Grundriss und im Aufriss, wobei das Dreieck ABC in der Grundrissebene liegt und AC parallel zur Rissachse verläuft.

Zeichnen Sie auch ein Schrägbild in Kavalierprojektion (k=0,5 und alpha=45°) und markieren Sie den Restkörper, der die Ecken A und C enthält, mit Farben.

4. Verstümmelte Würfel



Von einem Würfel mit der Kantenlänge a wird an jeder Ecke eine Dreieckspyramide mit der Seitenkante x abgeschnitten (Skizze).

a) Zeichnen Sie für x = a/2 den Würfel und den Restkörper in Grund- und Aufriss sowie in Kavalier- und Militärprojektion. Verwenden Sie Farben!

Beschreiben Sie die Seitenflächen und die Ecken des Restkörpers und verifizieren Sie dafür die Eulersche Polyederformel.

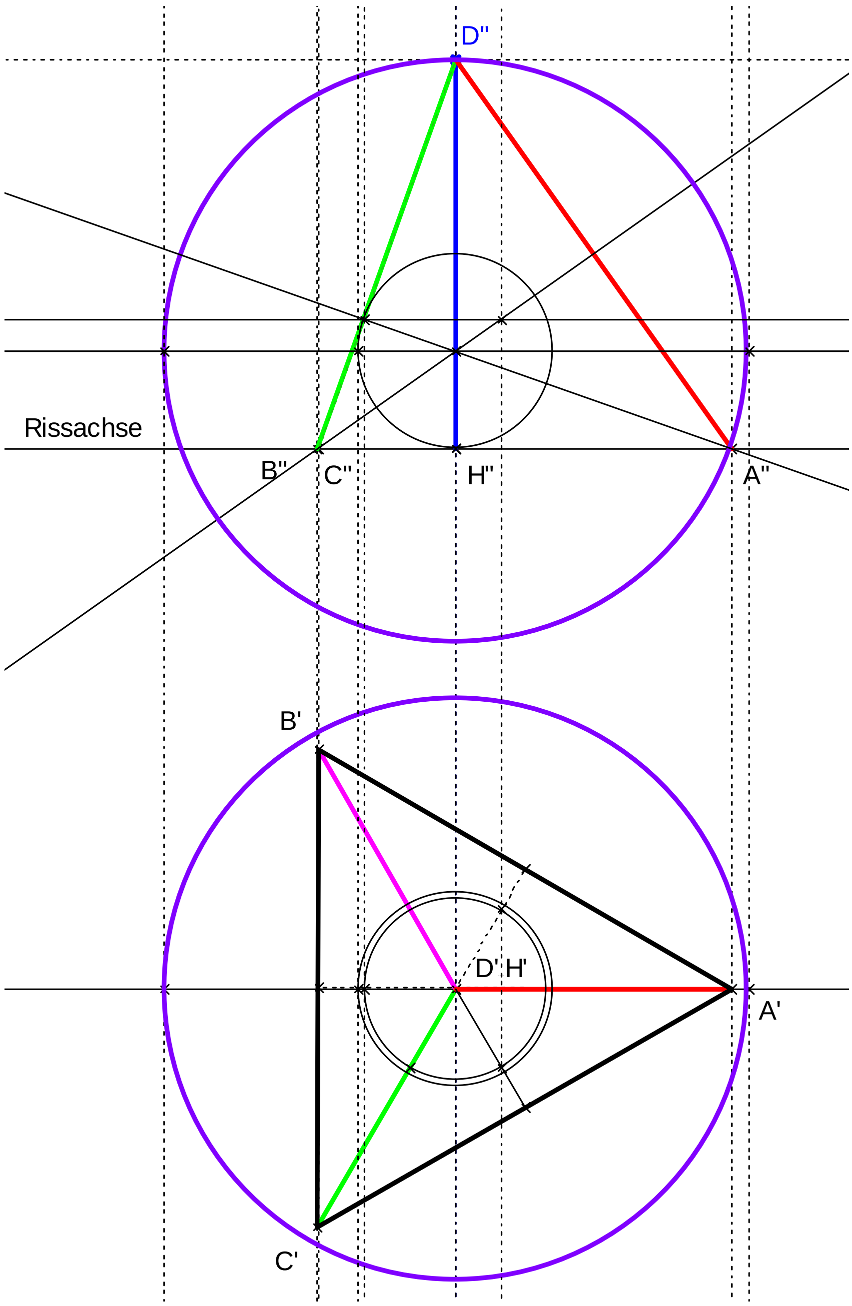
Zeigen Sie, dass es sich beim Restkörper um einen archimedischen Körper handelt, d.h. einen konvexen Körper, dessen Seitenflächen alle regelmäßige Vielecke sind und dessen Ecken alle „von der gleichen Art“ sind (zu je zwei Ecken gibt es eine Deckabbildung des Körpers, die die Ecken aufeinander abbildet).

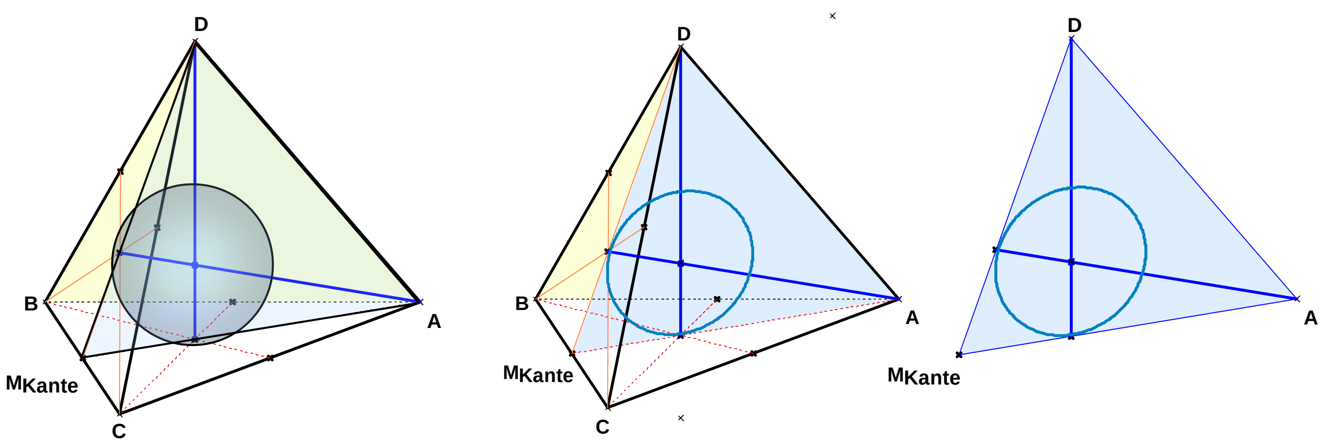
Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina von Restkörper und Würfel.

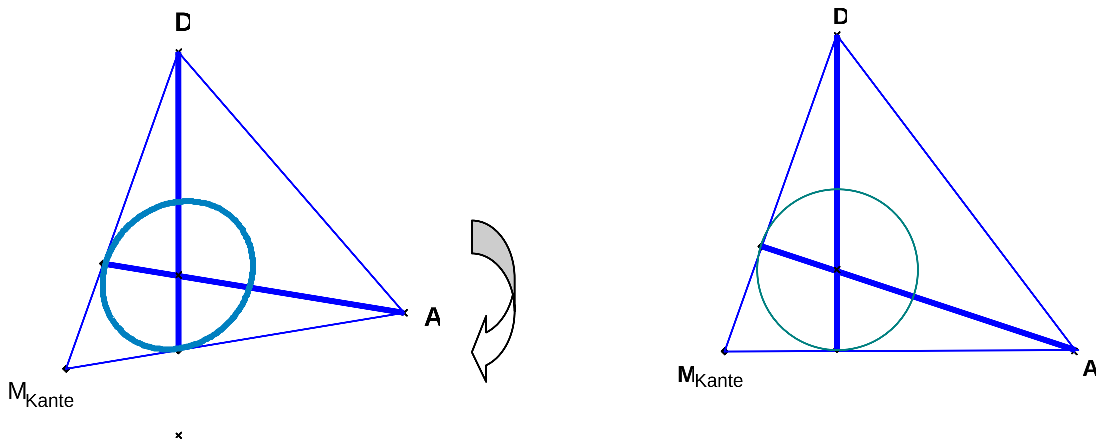
b) Es gibt noch einen zweiten Wert für x, der zu einem archimedischen Restkörper führt.

Bestimmen Sie diesen Wert, beschreiben Sie die Flächen und Ecken des Körpers und zeichnen Sie wieder Grund- und Aufriss sowie die Darstellung in Kavalier- und Militärprojektion.

1. Umkugel und Innenkugel eines Tetraeders

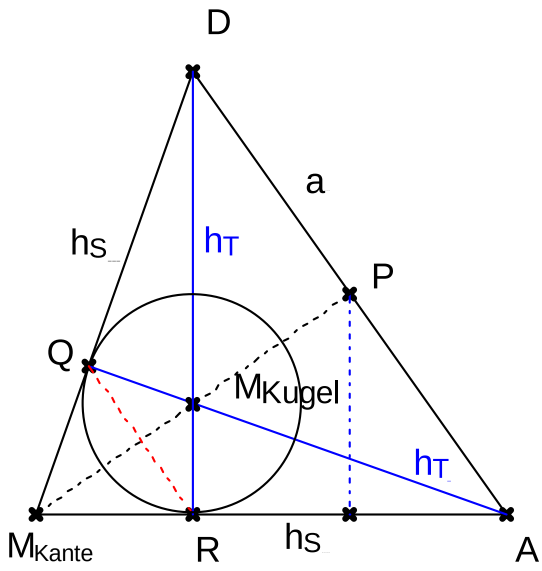






Behauptung:

Die Höhen h_T des Tetraeders teilen sich im Verhältnis 1:3, der Radius der Innenkugel ist daher 1/4 h_T.



Begründung:

R teilt $M_{Kante}A$ im Verhältnis 1:2, der 1. Strahlensatz mit Zentrum M_{Kante} liefert damit QR:AD = 1:3.

Der 2. Strahlensatz mit Zentrum M_{Kugel} ergibt dann QR:AD = RM_{Kugel}: $M_{Kugel}D$ =1:3.

Man berechnet mit Hilfe des Satzes von Pythagoras (mehrmals anwenden und nicht verrechnen):

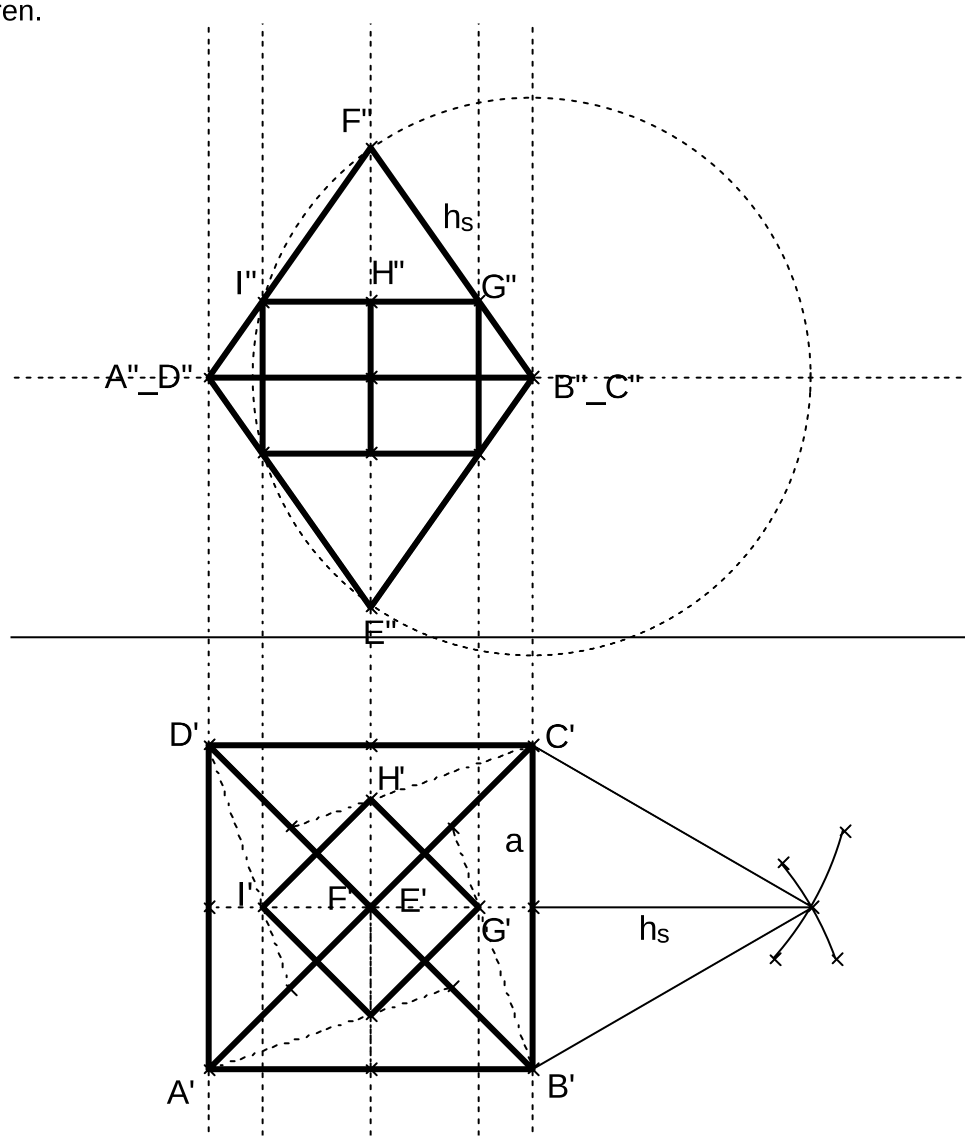
$h_S = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\qquad h_T = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\qquad r_{innen} = \frac{1}{4}\, h_T = \frac{a}{12}\sqrt{6}$

Damit ist der Radius der Innenkugel bestimmt. Der Radius der Umkugel ist 3 mal so groß, also

$r_{außen} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$.

2. Oktaeder und Würfel

Da Parallelprojektionen teilverhältnistreu sind, werden die Schwerpunkte der Seitendreiecke auf die Schwerpunkte der projizierten Dreiecke abgebildet. Diese kann man mit Hilfe der Seitenhalbierenden konstruieren.



(12)

Konstruktionsbeschreibung:

Quadrat im Grundriss, 2 Seiten parallel zur Rissachse

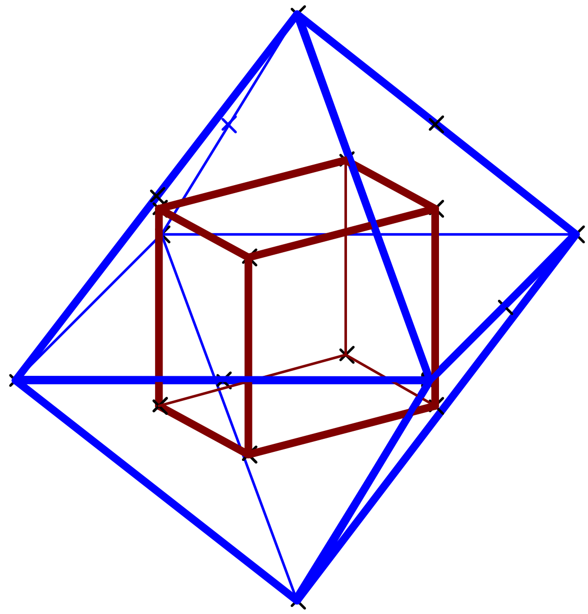
Wahre Länge der Seitenhöhe h_S mit Hilfe eines in die Grundrissebene geklappten Dreiecks mit den Seitenlängen a.

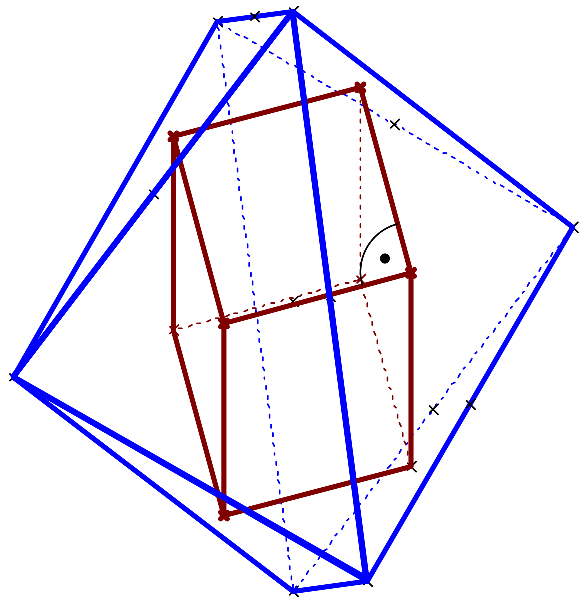
Parallele zur Rissachse, Übertragung der Eckpunkte A’’, B’’, C’’, D’’ des Quadrates mit Hilfe der Ordnerlinien.

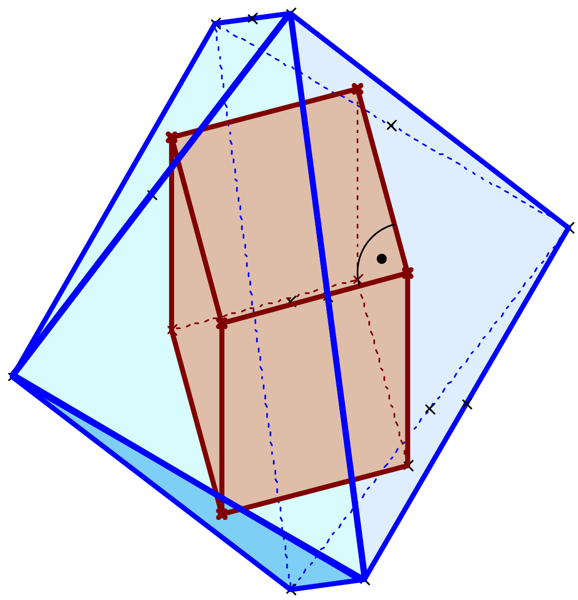
Kreis um B’’ mit Radius h_S, Schnittpunkt mit dem Ordner von E gibt F’’ und E’’.

Konstruktion der Eckpunkte des Würfels mit Hilfe der Seitenhalbierenden im Grundriss.

Übertragung der Eckpunkte des Würfels mit Hilfe der Ordner in den Aufriss.





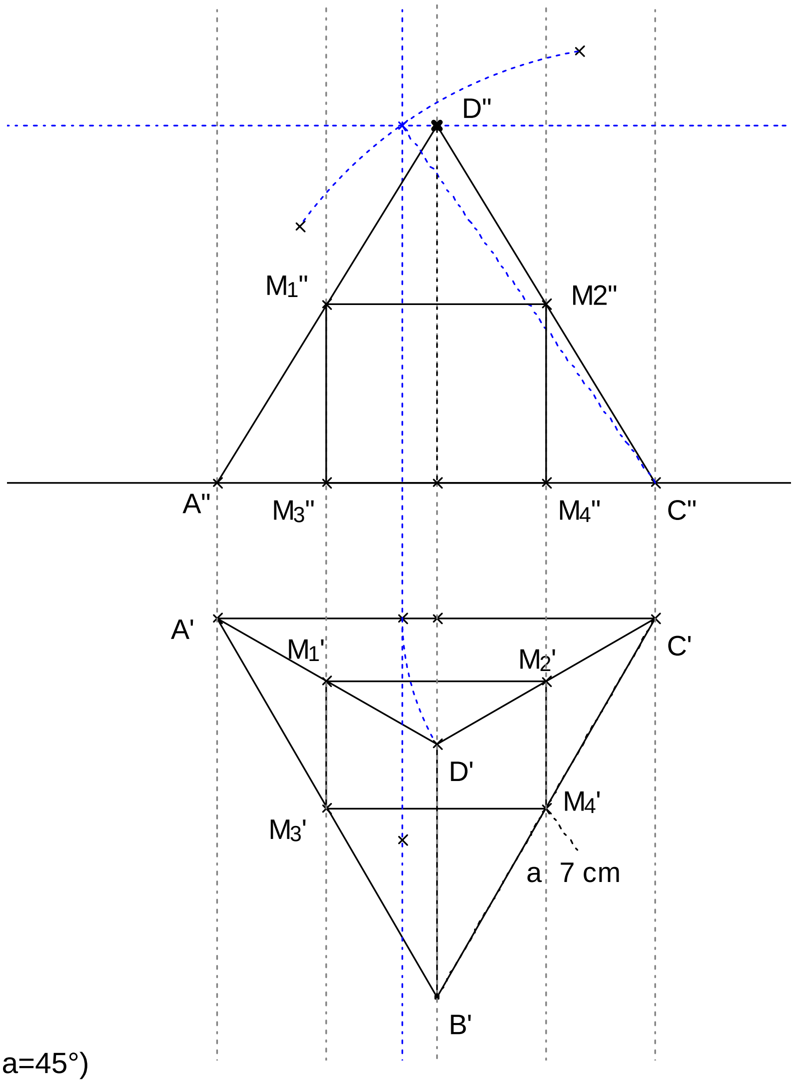


3. Tetraederschnitt

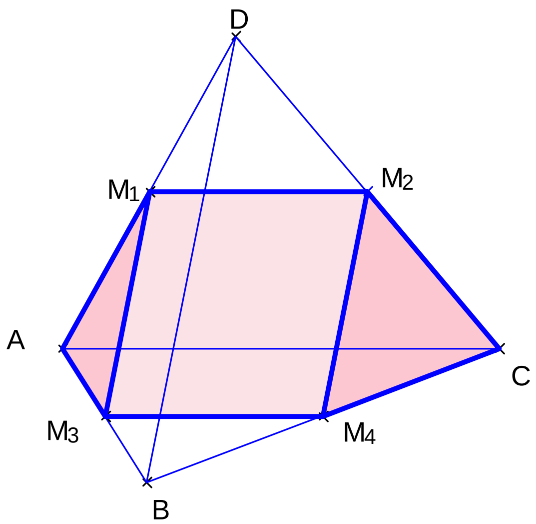
Ein ebener Schnitt, der durch die drei Kantenmitten M_1, M_2 und M_3 geht, enthält auch die Kantenmitte M_4 , da M_2M_3. parallel zur Kante DB verläuft (Mittelparallele im Dreieck) und auch M_1M_4 parallel zu DB ist.

Da alle Strecken M_1M_2, M_3M_3, M_3M_4, M_4M_1 als Mittelparallelen im gleichseitigen Dreieck gleich lang sind ist die Schnittfläche ein Parallelogramm. Da alle diese Kantenmitten durch Deckabbildungen des Tetraeders auf einander abgebildet werden können, sind auch alle Winkel gleich groß, die Schnittfläche ist daher ein Quadrat.

Grundriss und im Aufriss:

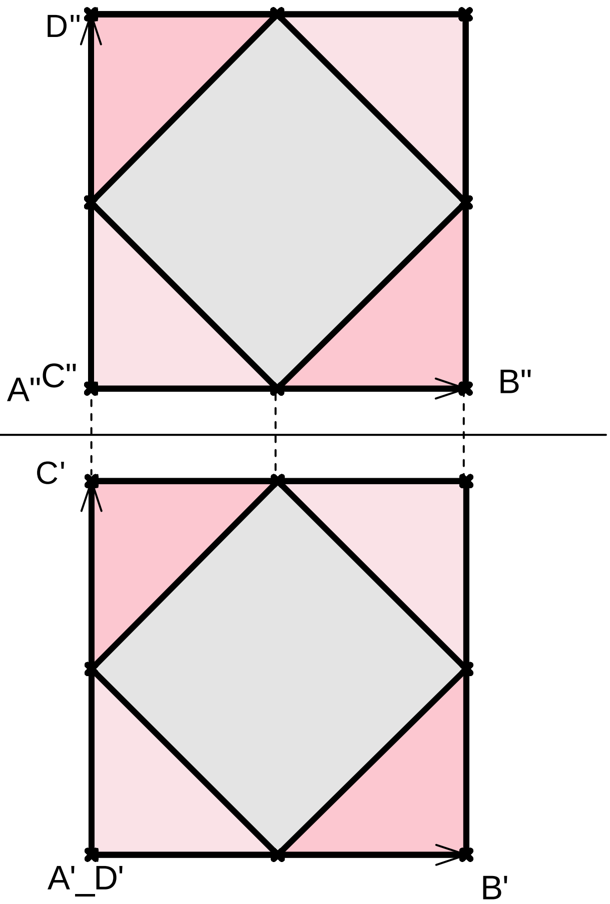


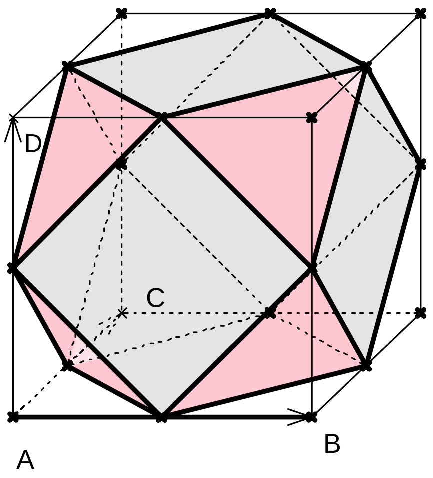
Kavalierprojektion (k=0,5 und alpha=45°)

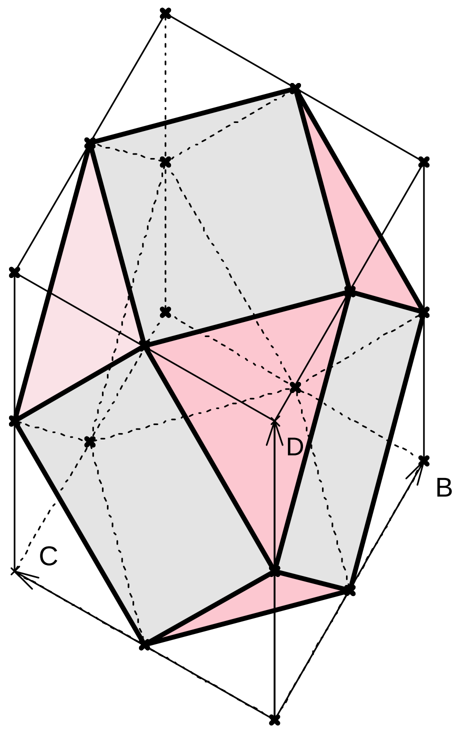


4. Verstümmelte Würfel

a) Zeichnen Sie für x = a/2 den Würfel und den Restkörper in Grund- und Aufriss sowie in Kavalier- und Militärprojektion. Verwenden Sie Farben!







Seitenflächen: 8 regelmäßige Dreiecke, 6 Quadrate, f=14

Ecken: 12 Ecken, an denen je 2 Dreiecke und zwei Quadrate unter den gleichen Winkeln aneinander stoßen, e=12

Kanten: 24 Kanten, k=24

Polyederformel: e+f-2=k gilt: 12+14-2=24.

Jede Ecke entsteht in der gleichen Weise aus dem Mittelpunkt einer Würfelkante. Daher kann jede Ecke durch eine Deckabbildung des Würfels auf jede andere Ecke abgebildet werden, der Körper ist also ein archimedischer Körper.

Volumina:

Die abgeschnittenen Dreieckspyramiden haben jeweils das Volumen

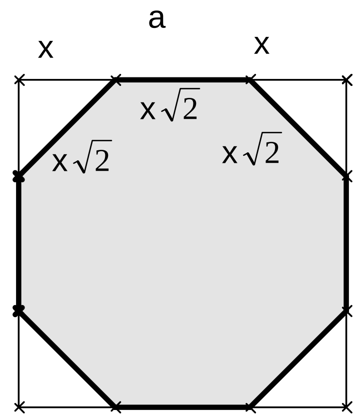
$$V_{Eckpyramide} = \frac{1}{3} \cdot Dreiecksfläche \cdot Pyramidenhöhe = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{48} a^3$$

Da 8 Pyramiden abgeschnitten werden hat der Restkörper das Volumen

$$V_{\mathrm{Re}\,stkörper} = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{48} a^3 = \frac{5}{6} a^3$$

Damit verhalten sich $V_{\mathrm{Re}\,stkörper} : V_{Würfel}$ wie 5:6.

b) Die Schnittflächen, die beim Abschneiden entstehen, sind immer gleichseitige Dreiecke. Die Reste der Würfelflächen können auch regelmäßige Achtecke werden.



Wird auf jeder Würfelkante von der Ecke aus eine Strecke der Länge x abgeschnitten, dann sind die Längen der Hypotenusen der entstehenden Dreiecke $x\sqrt{2}$ lang. Damit ein regelmäßiges Achteck entsteht, müssen auch die übrig bleibenden Stücke der Würfelkanten $x\sqrt{2}$ lang sein.
Damit erhält man

$$2x + x\sqrt{2} = a \quad , \quad \text{also} \quad x = \frac{1}{2+\sqrt{2}} a \approx 0{,}293 \cdot a$$