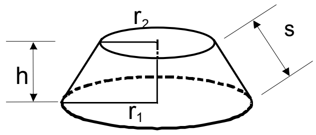
Aufgaben zur Vertiefung der Geometrie

WS 2005/06 — 28./29. November 2005 — Blatt 2

1. Formel für das Volumen und die Oberfläche von Stümpfen

Beweisen Sie die Formeln für das Volumen, die Mantelfläche und die Oberfläche

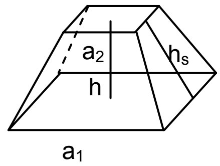
a) eines Kegelstumpfs mit den Radien r_1 und r_2, der Höhe h und der Seitenlinie s,



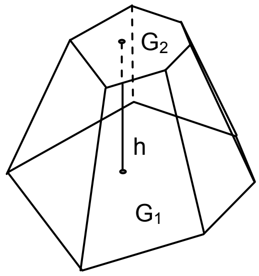
$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right), \quad M_{\text{Kegelstumpf}} = \pi \cdot s(r_1 + r_2),$$

$$O_{\text{Kegelstumpf}} = M_{\text{Kegelstumpf}} + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

b) eines quadratischen Pyramidenstumpfs mit den Quadratseiten a_1 und a_2, der Höhe h und der Seitenhöhe h_s (Formeln analog zu a)).



c) Beweisen Sie die Formeln für das Volumen eines Pyramiden- oder Kegelstumpfs mit der Grundfläche G_1 ,der Deckfläche G_2 und der Höhe h.

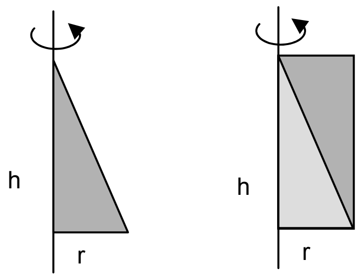


$$V_{Stumpf} = \frac{1}{3}h\left(G_1 + \sqrt{G_1}\sqrt{G_2} + G_2\right)$$

Teile a) und b) sind Spezialfälle von c), sie sollen aber zuerst diese einfacheren Fälle bearbeiten.

2. Kegelvolumen viel einfacher bestimmen?

Lässt man ein Dreieck um eine Seite rotieren, dann entsteht ein Kegel, lässt man ein Rechteck rotieren, dann erhält man einen Zylinder (nebenstehende Skizze). Der Flächeninhalt des Dreiecks ist die Hälfte des Flächeninhalts des rotierenden Rechtecks, also hat der Kegel die Hälfte des Volumens des Zylinders. Daraus erhält man sofort $V_{Kegel} = \frac{1}{2}V_{Zylinder} = \frac{1}{2}\pi\, r^2\, h$.

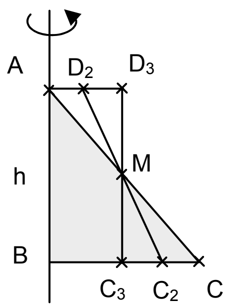


3. Rotationskörper

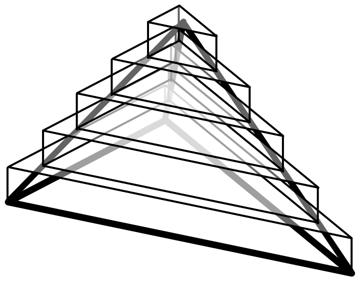
In der nebenstehenden Skizze sollen die Figuren ABC , ABC_2D_2 , ABC_3D_3 um die gezeichnete Achse rotieren. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.

Welche Körper entstehen bei der Rotation?

Können Sie ohne zu rechnen etwas über die Volumina der Rotationskörper sagen (gleich, welcher hat größtes oder kleinstes Volumen)?



4. Annäherung von Pyramiden durch Treppenkörper



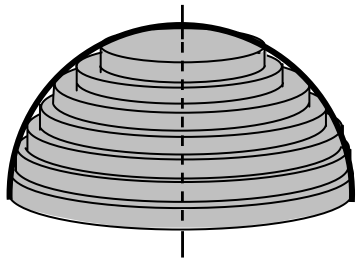
Pyramiden können durch Treppenkörper aus senkrechten Prismen angenähert werden, für die die Volumenformel $V_{Prisma} = G_{Prisma} \cdot h$ bewiesen sei.
Teilen Sie die Höhe der Pyramide in n gleiche Teile und berechnen Sie das Volumen des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Treppenkörpers (abhängig von G, h und n). Zeigen Sie, dass man durch den Grenzübergang $n \to \infty$ daraus die Volumenformel für Pyramiden erhält.

Sie benötigen dazu sicher eine Formel (1) für die Summe der ersten n Quadratzahlen:

(1) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Bestätigen Sie die Gültigkeit der Formel für n=1, 2, 3, 4, 5.
- Beweisen Sie diese Formel durch vollständige Induktion.

5. Annäherung einer Kugel durch Treppenkörper



Auch eine Halbkugel kann durch Treppenkörper angenähert werden. In der Skizze ist die Approximation von innen dargestellt.

Die Höhe der Halbkugel soll in n gleich große Teile geteilt werden.

a) Fertigen Sie für n=4 je eine Zeichnung eines geeigneten Schnittes für die beiden Approximationen an und schreiben Sie für beide Approximationen das Volumen der Treppenkörper auf.

b) Führen Sie die Berechnung für eine der Approximationen allgemein für n aus und bestimmen Sie den Grenzwert für $n \to \infty$. Sie benötigen wieder (1) aus Aufgabe 4.

c) Können Sie mit nur kurzer Rechnung angeben, welche Differenz sich für n=1000 zwischen der äußeren und der inneren Approximation für r=1 ergeben wird?
Für welche Art von Körpern lässt sich die letzte Art der Abschätzung des Fehlers in dieser Weise durchführen?

6. Quadratur des Kreises (ebene Geometrie)

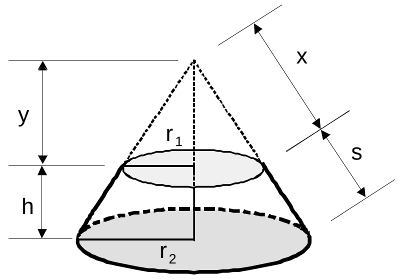
Unter dem Problem der „Quadratur des Kreises“ versteht man seit der Antike das Problem, zu einem durch seinen Radius gegebenen Kreis nur mit Zirkel und Lineal ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren.

Zeigen Sie: wenn man zu einer einzigen Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge $\pi \cdot 1$ konstruieren könnte, dann wäre auch das Problem der Quadratur des Kreises gelöst.

1. Formel für das Volumen und die Oberfläche von Stümpfen

a) Volumen und Mantel des Kegelstumpfes

Gemäß nebenstehender Skizze erhält man mit Hilfe der Strahlensätze



$$\frac{y+h}{y}=\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow y+h=\frac{r_2}{r_1}y \Rightarrow y=\frac{h\cdot r_1}{r_2-r_1} \Rightarrow h+y=\frac{h\cdot r_2}{r_2-r_1}\ .$$

Das Volumen des Kegelstumpfes ist die Differenz des Volumens zweier Kegel mit den Höhen y+h und y und den Grundkreisradien r_2 und r_1.
Man erhält

$$V_{\text{Kegelstumpf}}=\frac{1}{3}\pi\left(r_2^2(h+y)-r_1^2y\right)=\frac{1}{3}\pi\, h\frac{r_2^3-r_1^3}{r_2-r_1}=\frac{1}{3}\pi\, h(r_2^2+r_1r_2+r_1^2)$$

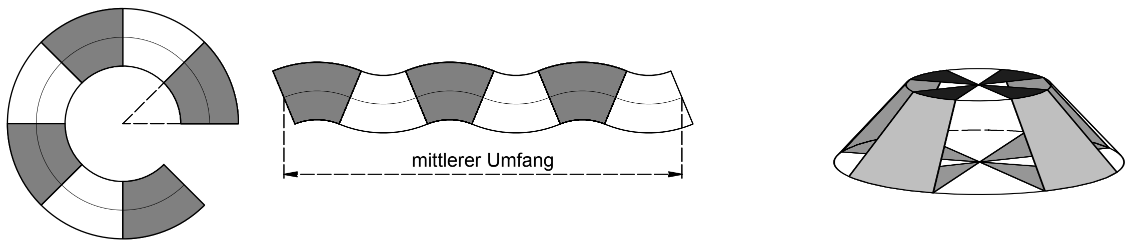
Ebenso erhält man mit Hilfe der Strahlensätze

$$\frac{x+s}{x}=\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow x+s=\frac{r_2}{r_1}x \Rightarrow x=\frac{s\cdot r_1}{r_2-r_1} \Rightarrow s+x=\frac{s\cdot r_2}{r_2-r_1}\ .$$

Der Mantel des Kegelstumpfes ist ein Ausschnitt eines Kreisringes, dessen Flächeninhalt sich als Differenz des Inhalts der Mäntel zweier Kegel mit den Seitenlinien x+s und x und den Grundkreisradien r_2 und r_1 ergibt.
Man erhält

$$M_{Kegelstumpf}=\pi\, r_2(s+x)-\pi\, r_1x=\pi\cdot s\cdot\left(\frac{r_2^2}{r_2-r_1}-\frac{r_1^2}{r_2-r_1}\right)=\pi\cdot s\cdot(r_2+r_1)\ .$$

Statt dieser Standard-Herleitung für den Flächeninhalt des Mantels kann man auch ein „trickreicheres“ Argument einsetzen, das man aber nicht unbedingt sofort findet: So wie man einen Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Flächeninhalt eines Kreises hergestellt hat, kann man jetzt auch einen Zusammenhang zwischen den Umfängen der Grund- und Deckkreise und der Mantelfläche des Kegelstumpfes herstellen. Statt eines Vollkreises zerschneidet man jetzt nur einen Kreisausschnitt bzw. einen Ausschnitt eines Kreisringes.



Für die Mantelfläche eines Kegelstumpfes erhält man so die Formel

$$M_{\text{Kegelstumpf}} = \text{mittlerer Umfang}\cdot\text{Seitenlinie} = \frac{1}{2}\,(2\, r_1\pi + 2\, r_2\pi)\, s = \pi\cdot s\cdot (r_1 + r_2)$$

b) Volumen und Mantel des quadratischen Pyramidenstumpfes

Wie bei a) erhält man

$$\frac{y+h}{y}=\frac{a_2}{a_1} \Rightarrow y+h=\frac{a_2}{a_1}y \Rightarrow y=\frac{h\cdot a_1}{a_2-a_1} \Rightarrow h+y=\frac{h\cdot a_2}{a_2-a_1}\ .$$

Das Volumen des Pyramidenstumpfes ist die Differenz des Volumens zweier quadratischer Pyramiden mit den Höhen y+h und y und den Quadratseitenlängen a_2 und a_1.
Man erhält

$$V_{Pyramidenstumpf}=\frac{1}{3}\left(a_2^2(h+y)-a_1^2y\right)=\frac{1}{3}h\frac{a_2^3-a_1^3}{a_2-a_1}=\frac{1}{3}h(a_2^2+a_1a_2+a_1^2)$$

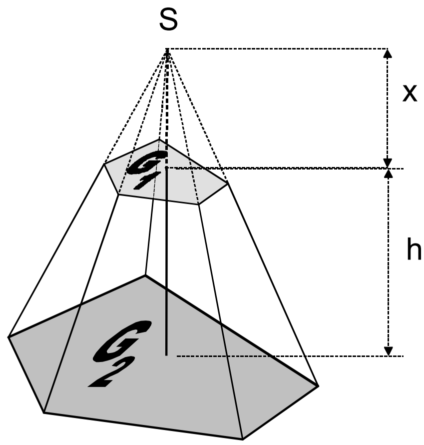
Der Mantel des quadratischen Pyramidenstumpfes ist die Summe von vier Trapezen. Man erhält

$$M_{Pyramidenstumpf}=4\cdot\frac{a_1+a_2}{2}\cdot h_S=U_{Mittel}\cdot h_S=2(a_1+a_2)\cdot h_S$$

c) Volumen des Pyramidenstumpfes allgemein

G_2 ist Bild von G_1 unter der zentrischen Streckung mit Zentrum S und Faktor $k = \frac{x+h}{x}$. Durch Umstellen ergibt sich

$x = \frac{h}{k-1}$. Für die Abbildung von Flächen durch zentrische Streckungen gilt



$k^2 = \frac{G_2}{G_1}$ und damit $k = \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}}$.

Damit ist

$$x = \frac{h}{\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}} - 1} = h \cdot \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} \quad .$$

$$V_{\text{Stumpf}} = \frac{1}{3} G_2 (x+h) - \frac{1}{3} G_1 \cdot x = \frac{1}{3}(G_2 - G_1)x + \frac{1}{3} G_2 \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} h \left(\frac{(G_2 - G_1)\sqrt{G1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + G_2 \right) = \frac{1}{3} h \left(\left(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1} \right) \sqrt{G_1} + G_2 \right)$$

Daraus erhält man schließlich

$$V_{\text{Pyramidenstumpf}} = \frac{1}{3} h \left(G_1 + \sqrt{G_1}\sqrt{G_2} + G_2 \right)$$

2. Kegelvolumen viel einfacher bestimmen?

Diesem „Beweis“ liegt folgende falsche Annahme zu Grunde:

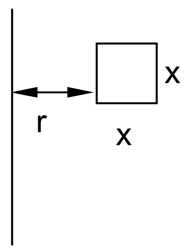
„Gleich große Flächen erzeugen bei der Rotation gleich große Volumina“.

Tatsächlich nimmt das Volumen, das eine Fläche bei der Rotation um eine Achse erzeugt, vom Abstand der Fläche von der Rotationsachse ab:

Je größer dieser Abstand, umso größer ist das erzeugte Rotationsvolumen.

Wenn man dies genauer fassen will, kann man rechnen:

Wir lassen ein Quadrat mit Seitenlänge x, dessen „innere“ Seite parallel zur Rotationsachse im Abstand r liegt, um die Achse rotieren. Das erzeugte Rotationsvolumen ist die Differenz der Volumina zweier Zylinder mit der Höhe x und den Radien r+x und r.



Man erhält für das Rotationsvolumen

$$V_{Rotation} = \pi(r+x)^2 \cdot x - \pi r^2 \cdot x = \pi(2rx^2 + x^3) = \pi x^3 + 2r\pi x^2 = \pi x^3 + U_{innen} x^2$$

Wenn man das weiter deuten will:

V_{Rotation}= $\pi x^3 + U_{\text{innen}}\, x^2$
Volumen eines Zylinders mit Grundkreisradius x und Höhe x +
Volumen eines Quaders mit Querschnittssfläche x^2 und Umfang des inneren Kreises als Höhe

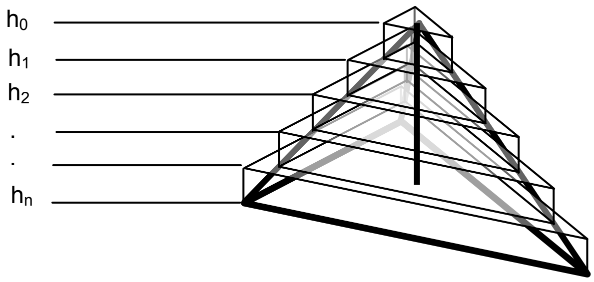
Der erste Summand ist unabhängig von r, der zweite proportional zu r.

3. Rotationskörper

Da die Flächeninhalte der rotierenden Flächen gleich groß sind und teilweise in einander enthalten sind, erzeugt diejenige Fläche das größte Rotationsvolumen, bei der die Flächenanteile den größten Abstand von der Rotationsachse haben. Daher hat der Kegel das größte, der Zylinder das kleinste Volumen.

4. Annäherung von Pyramiden durch Treppenkörper

In der nebenstehenden Skizze ist n=5.



Die Höhe der Pyramide sei h, die Grundfläche G.

Wir teilen h in n gleich große Teile.

$$h_i = \frac{i}{n} \cdot h \quad , \quad i = 0 \ldots n$$

Die Schnittfläche in der Höhe h_i wird mit G_i bezeichnet. Es ist $G=G_n$.

Es gilt wegen der Eigenschaften der zentrischen Streckung

$$\frac{G_i}{G} = \frac{h_i^2}{h^2} \text{, d.h. } G_i = \frac{G}{h^2} h_i^2$$

Das Volumen der i-ten Schicht des Treppenkörpers ist

$$V_i = G_i \cdot \frac{h}{n} = \frac{G}{h^2} h_i^2 \cdot \frac{h}{n} = \frac{G}{n \cdot h} \cdot h_i^2$$

Damit ist das Volumen des äußeren Treppenkörpers

$$\begin{aligned}
V_{außen} &= V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{n-1} + V_n \\
&= \frac{G}{n \cdot h} \left(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots + h_{n-1}^2 + h_n^2 \right) \\
&= \frac{G}{n \cdot h} \left(\left(\frac{1}{n} \cdot h \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \cdot h \right)^2 + \left(\frac{3}{n} \cdot h \right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n} \cdot h \right)^2 + \left(\frac{n}{n} \cdot h \right)^2 \right) \\
&= \frac{G \cdot h}{n^3} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 \right) \\
&= \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= G \cdot h \cdot \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{6} \xrightarrow[n \to \infty]{} G \cdot h \cdot \frac{2}{6} = G \cdot h \cdot \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Das Volumen des inneren Treppenkörpers ist

$$\begin{aligned}
V_{innen} &= V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{n-1} \\
&= \frac{G}{n \cdot h} \left(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \ldots + h_{n-1}^2 \right) \\
&= \frac{G}{n \cdot h} \left(\left(\frac{1}{n} \cdot h \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \cdot h \right)^2 + \left(\frac{3}{n} \cdot h \right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n} \cdot h \right)^2 \right) \\
&= \frac{G \cdot h}{n^3} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \right) \\
&= \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} \\
&= \frac{G \cdot h}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= G \cdot h \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right)}{6} \xrightarrow[n \to \infty]{} G \cdot h \cdot \frac{2}{6} = G \cdot h \cdot \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die Differenz zwischen dem äußeren und inneren Treppenkörper ist genau $V_n = \frac{h}{n} \cdot G$.

Diese Differenz kann durch genügend großes n beliebig klein gemacht werden. Damit kann man bei gegebener Grundfläche G und Höhe h von vorne herein berechnen, in wie viele Schichten n man die Pyramide zerlegen muss, um eine vorgegebene Fehlerschranke zu unterschreiten.

Beispiel: G=10 cm^2 , h=4 cm, Fehler ≤ 0,001 cm^3

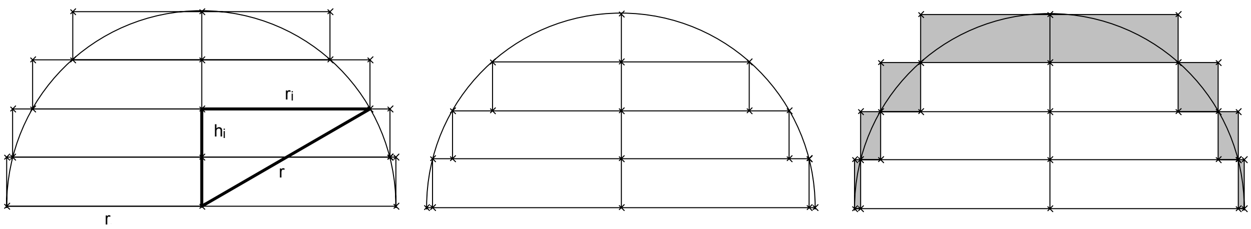
$$\Rightarrow \frac{h}{n} \cdot G = \frac{4cm}{n} \cdot 10cm^2 \le 0{,}001cm^3$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{4cm}{0{,}001cm^3} \cdot 10cm^2 = 40000$$

Beweis der Summenformel durch vollständige Induktion: Standardverfahren.

5. Annäherung einer Kugel durch Treppenkörper

a)



$$h_i = \frac{r}{n} \cdot i \quad , \quad i = 0 \ldots n$$

Die Höhen h_i werden von der Grundfläche der Halbkugel aus gemessen. Es ist $h_0 = 0$, $h_1 = \frac{r}{n}$, , $h_n = r$

Für die Radien r_i ergibt sich $r_i^2 = r^2 - h_i^2 = r^2 - \left(\frac{r}{n} i\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$, also

$$r_0 = r \, , \; r_1 = r\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \, , \; r_2 = r\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}} \, , \; r_3 = r\sqrt{1 - \frac{9}{n^2}} \, , \; \ldots, \; r_n = r\sqrt{1 - \frac{n^2}{n^2}} = 0$$

Für n=4 ergibt sich

$$r_1 = r\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = r\frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}97\, r \, , \; r_2 = r\sqrt{1 - \frac{4}{16}} = r\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87\, r, \; r_3 = r\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = r\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}66\, r \; , \; r_4 = 0.$$

Das Volumen der i-ten Schicht wird mit V_i bezeichnet. Es ist

$$V_i = r_i^2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} = \frac{r^3 \cdot \pi}{n}\left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

Volumen des äußeren Treppenkörpers

$$
\begin{aligned}
V_{außen} &= V_0 + V_1 + V_2 + V_3 \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(1 - \frac{0}{16} + 1 - \frac{1}{16} + 1 - \frac{4}{16} + 1 - \frac{9}{16}\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(4 - \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right)\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(4 - \frac{1}{16}(1 + 4 + 9)\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(4 - \frac{14}{16}\right) = \frac{r^3 \cdot \pi \cdot 50}{64} \approx 0{,}78 \cdot \pi \cdot r^3
\end{aligned}
$$

Volumen des inneren Treppenkörpers

$$
\begin{aligned}
V_{innen} &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(1 - \frac{1}{16} + 1 - \frac{4}{16} + 1 - \frac{9}{16}\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(3 - \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right)\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(3 - \frac{1}{16}(1 + 4 + 9)\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{4}\left(3 - \frac{14}{16}\right) = \frac{r^3 \cdot \pi \cdot 34}{64} \approx 0{,}53 \cdot \pi \cdot r^3
\end{aligned}
$$

Die Differenz zwischen den Treppenkörpern ist wiederum genau $V_0 = \frac{r^3 \cdot \pi}{4}$, das Volumen der untersten Schicht. Dies ist auch unmittelbar an der 3.Abbildung zu erkennen.

b) Allgemeine Berechnung: Volumen des äußeren Treppenkörpers

$$
\begin{aligned}
V_{außen} &= V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1} \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{n}\left(1 - \frac{0^2}{n^2} + 1 - \frac{1^2}{n^2} + 1 - \frac{2^2}{n^2} + ... + 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{n}\left(n - \left(\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{n}\left(n - \frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right)\right) \\
&= \frac{r^3 \cdot \pi}{n}\left(n - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2(n-1)+1)}{6}\right) \\
&= r^3 \cdot \pi\left(1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}\right) \\
&= r^3 \cdot \pi\left(1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right) \\
&= r^3 \cdot \pi\left(1 - \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} r^3 \cdot \pi\left(1 - \frac{2}{6}\right) = \frac{2}{3} r^3 \cdot \pi
\end{aligned}
$$

c) Die Differenz zwischen den beiden Treppenkörpern ist wieder V_0.

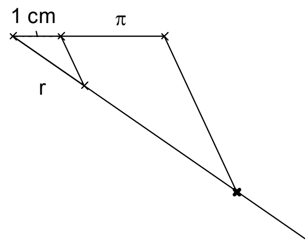
Es ist $V_0 = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{n} = \frac{r^3 \cdot \pi}{n} = \frac{\pi}{1000} \approx 0{,}00314$ für r=1 und n=1000.

Man könnte auch hier wiederum umgekehrt bei vorgegebener Fehlertoleranz berechnen, welche Anzahl n von Schichten ausreicht, um diese Fehlertoleranz zu unterschreiten.

Diese Art der Fehlerabschätzung ist immer dann möglich, wenn die Projektion der Schnittfläche der (n+1)-ten Schicht ganz in der Schnittfläche der n-ten Schicht enthalten ist.

6. Quadratur des Kreises (ebene Geometrie)

1. Wenn man zu einer Strecke der Länge 1 eine Strecke der Länge π konstruieren kann, dann kann man mit Hilfe des 1.Strahlensatzes zu jeder Strecke einer Länge r die Strecke der Länge π·r konstruieren (nebenstehende Skizze).



2. Wenn ein Kreis durch seinen Radius r gegeben ist, dann ist sein Flächeninhalt $r^2 \cdot \pi$, es ist also die Seite eines Quadrates mit dem Flächeninhalt $r^2 \cdot \pi$ zu konstruieren. Zum Radius r konstruiert man eine Strecke mit Länge π·r (Punkt 1), man hat damit ein Rechteck mit den Seiten r und π·r konstruiert. Dieses hat den Flächeninhalt $r^2 \cdot \pi$.
   Mit Hilfe des Höhensatzes oder des Kathetensatzes kann man zu diesem Rechteck die Seite eines flächeninhaltsgleichen Quadrats konstruieren.