

Aufgaben zur Vertiefung der Geometrie

WS 2005/06

30. / 31. Januar 2006

Blatt 4

1. Goldener Schnitt

a) In Abb. 1 wurde die Strecke AB durch T im Goldenen Schnitt geteilt.

Dazu wurden nacheinander konstruiert:

M (als Mitte von AB), dann C, D, T.

- Führen Sie eine solche Konstruktion durch
- Zeigen Sie, dass T die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt.

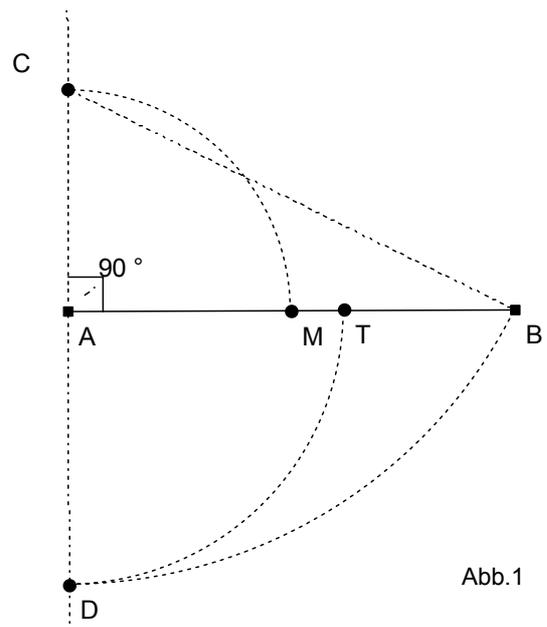


Abb. 1

b) In Abb. 2 wurden die Seiten eines Quadrats im Goldenen Schnitt geteilt.

- Zeigen Sie, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.
- Welchen Anteil des ursprünglichen Quadrats bedeckt das Quadrat EFGH ?

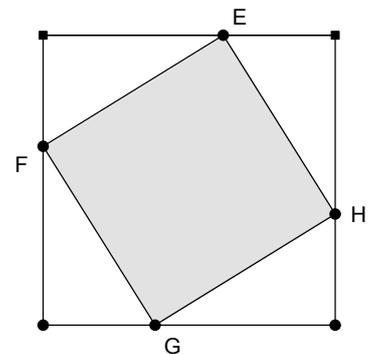


Abb. 2

c) Zeichnen Sie ein Quadrat ABCD. Teilen Sie jede der vier Seiten wie in Abb. 3 im Goldenen Schnitt. Zeigen Sie, dass PQRS ein „Goldenes Rechteck“ ist, d.h. dass das Seitenverhältnis des Rechtecks der Goldene Schnitt ist.

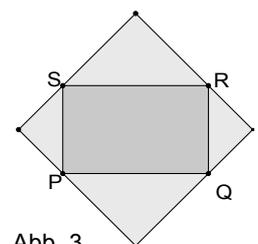
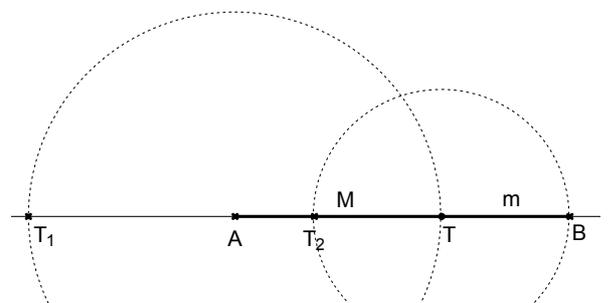


Abb. 3

2. Goldener Schnitt

a) Eine Strecke \overline{AB} wird durch den Teilpunkt T im goldenen Schnitt geteilt. Die Strecke $\overline{AT} = M$ ist die größere Teilstrecke, die Strecke $\overline{TB} = m$ die kleinere. Jetzt werden gemäß der nebenstehenden Abbildung zwei weitere Punkte T_1 und T_2 konstruiert:

- T_1 durch Abtragen von M nach außen,
- T_2 durch Abtragen von m von T aus auf M.



Begründen Sie, dass A die Strecke $\overline{BT_1}$ und T_2 die Strecke \overline{TA} im goldenen Schnitt teilen.

b) Beschreiben Sie eine Konstruktion, wie man zu einer Strecke \overline{AB} eine Strecke \overline{AC} gewinnt, so dass \overline{AB} der Major (der größere Abschnitt) der im goldenen Schnitt geteilten Strecke \overline{AC} ist.

3. Goldenes Rechteck und Fibonacci Zahlen

Ein Rechteck ABCD heißt „goldenes Rechteck“, wenn das Verhältnis seiner Seitenlängen die goldene Schnittzahl Φ ist.

- a) Konstruieren Sie ein goldenes Rechteck, dessen längere Seite 10 cm lang ist.
- b) Beweisen Sie:
- Wenn von einem goldenen Rechteck ein Quadrat abgeschnitten wird (Abb.1), dann ist das verbleibende Rechteck wieder ein goldenes Rechteck.
 - Wenn ein Rechteck, bei dem ein Quadrat abgeschnitten wird, ähnlich zum verbleibenden Rechteck ist, dann ist das Rechteck golden.

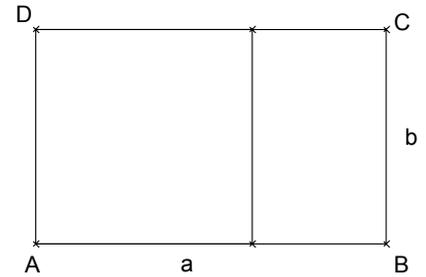


Abb.1

- c) Beschreiben Sie die Konstruktion in Abb.2 und führen diese mit dem Rechteck aus a) durch, so lange Ihnen das möglich ist. Wie lange kann man die Konstruktion fortsetzen? Überlegen Sie, wie man die „Spirale“ „nach außen“ fortsetzen kann.

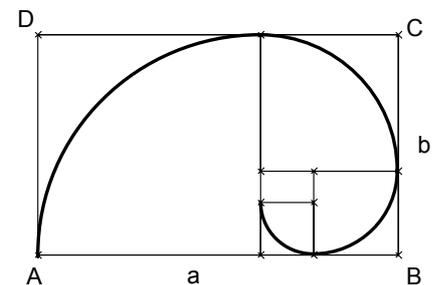


Abb.2

- d) Fertigen Sie eine Zeichnung gemäß Abb.3 an. Sie beginnen mit einem Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 1 \text{ cm}$.

- Berechnen Sie die Seitenlängen der nachfolgenden Quadrate. Benennen Sie diese Seitenlängen mit f_i , wobei $f_1=1$ ist.
- Berechnen Sie jeweils die Quotienten $\frac{f_{i+1}}{f_i}$.
- Können Sie eine „Spirale“ wie in c) zeichnen?
- Können Sie einen Zusammenhang mit c) herstellen? Gemeinsamkeiten, Unterschiede?

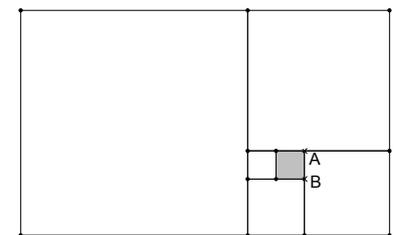


Abb.3

4. Teilverhältnisse

Im Dreieck ABC sind die Höhenfußpunkte F_1 , F_2 und F_3 eingetragen.

Bestimmen Sie mit Hilfe trigonometrischer Funktionen, in welchem Verhältnis die Dreiecksseiten von den Lotfußpunkten jeweils geteilt werden.

Zeigen Sie:

$$\frac{|AF_1|}{|F_1B|} \cdot \frac{|BF_2|}{|F_2C|} \cdot \frac{|CF_3|}{|F_3A|} = 1$$

