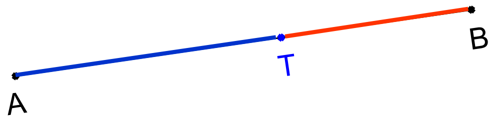
Kapitel 5: Teilverhältnisse und Ähnlichkeit

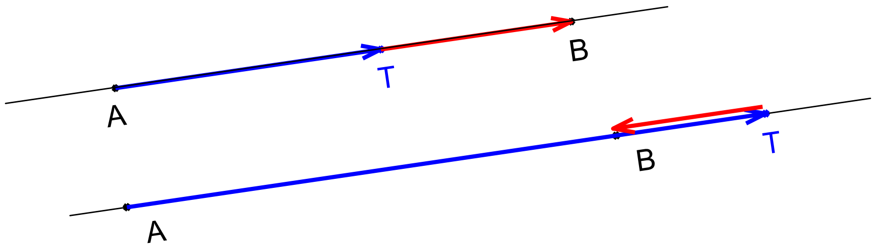
Definition Teilverhältnis λ

$$\lambda = \frac{|AT|}{|TB|}$$



Allgemeiner

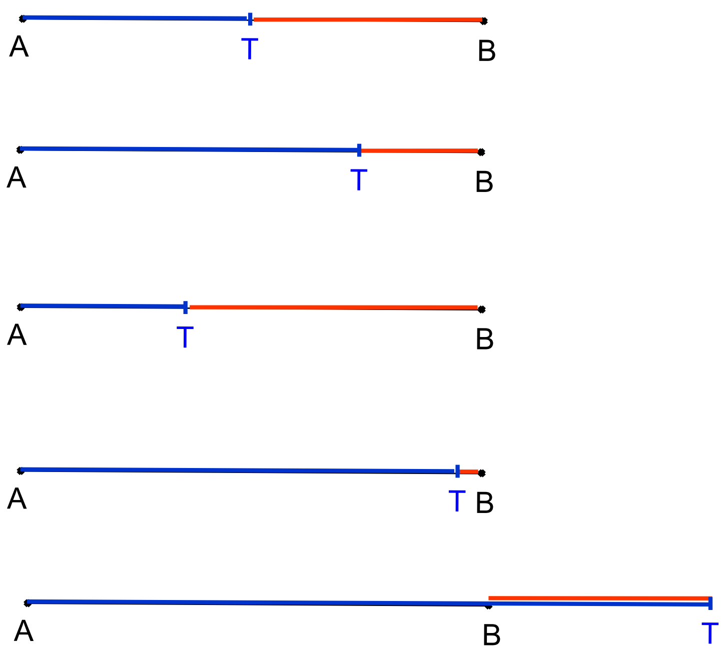
$$\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{TB}$$



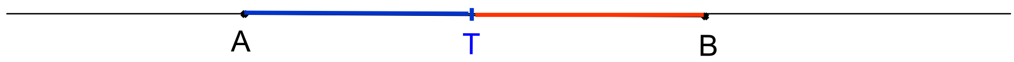
T ist **innerer** Teilpunkt, falls $\lambda > 0$
T ist **äußerer** Teilpunkt, falls $\lambda < 0$

Notation λ =TV(A,B;T)

Schätzen Sie die Werte für das Teilverhältnis λ=TV(A,B;T)

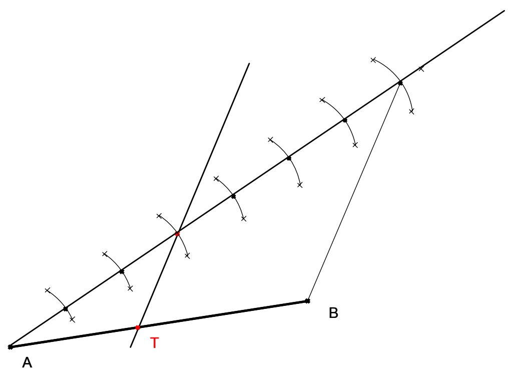


Schreiben Sie die Werte für das Teilverhältnis λ=TV(A,B;T) unter die Skizze
z.B. $\lambda \approx 0$, positiv oder $\lambda \approx -2$



Teilen Sie die Strecke AB im Verhältnis λ = TV(A,B;T) = $\frac{n}{m}$ > 0 .

Konstruktion mit Zirkel und Lineal (Strahlensatz)



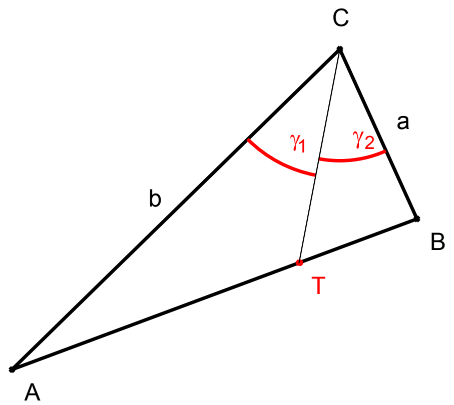
Führen Sie die Konstruktion für $\lambda = \frac{3}{4}$ durch.

Übertragen Sie die Konstruktion auf den Fall $\frac{n}{m}$ < 0 .

Führen Sie die Konstruktion für $\lambda = -\frac{3}{4}$ durch.

Winkelhalbierende im Dreieck

Kann man eine Aussage darüber machen, in welchem Verhältnis eine Winkelhalbierende im Dreieck die gegenüberliegende Seite teilt?
TV(A,B;T) = ?



Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

d.h. $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{b}{a}$

Beweis:
Wir zeigen sogar etwas verschärft - und damit auch eine Umkehr des obigen Satzes

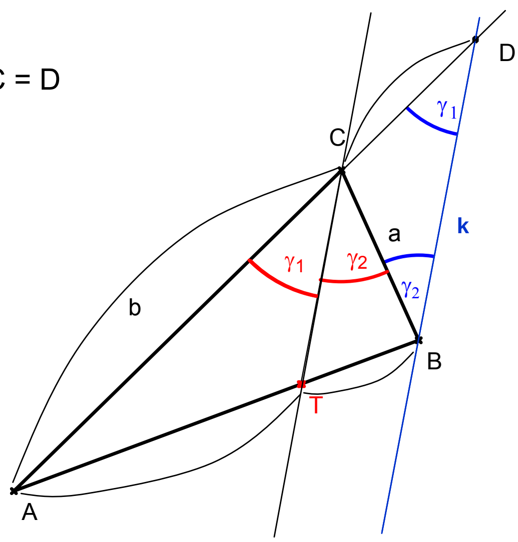
$$\gamma_1 = \gamma_2 \Leftrightarrow \frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$$

Behauptung

$$\gamma_1 = \gamma_2 \Leftrightarrow \frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$$

Beweis

Zeichne *Parallele k* zu CT durch B; k ∩ AC = D
(Winkelsätze an Parallelen)



Der 1. Strahlensatz liefert $\frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{|CD|}$

$\gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow$ Δ DCB gleichwinklig
$\Rightarrow$ Δ DCB gleichschenklig
$\Rightarrow$ |CD| = |CB| = a
$\Rightarrow \frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$

Sei umgekehrt $\frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$.

$\Rightarrow$ |CD| = a =|CB|
$\Rightarrow$ Δ DCB gleichschenklig
$\Rightarrow$ Δ DCB gleichwinklig
$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$

Ein ganz besonderes Teilverhältnis: Der goldene Schnitt

Seit der Antike hat ein als besonders harmonisch empfundenes Teilverhältnis die Mathematik beschäftigt und außergewöhnlich große Bedeutung auch in der Architektur und der Kunst erlangt:

Die Teilung einer Strecke im so genannten „**Goldenen Schnitt**", auch **stetige Teilung** oder **göttliche Teilung** (*proportio divina)*

Dieses Teilverhältnis tritt auch vielfach in den Naturwissenschaften auf und hat daher einen eigenen Namen bekommen:

Die **goldene Schnittzahl** Φ (großes Phi).

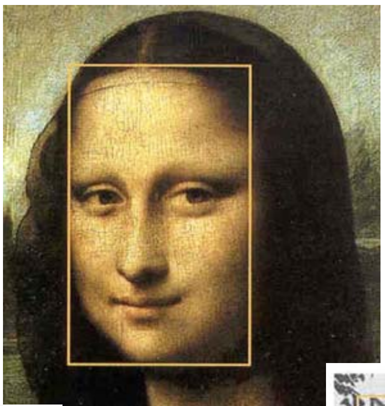
(manchmal wird diese Zahl auch mit anderen Buchstaben bezeichnet, etwa τ, φ).

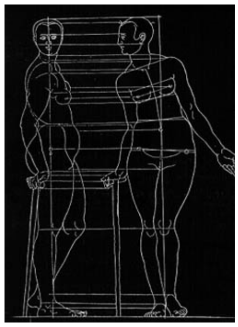
In engem Zusammenhang mit der goldenen Schnittzahl Φ steht auch die Folge der **Fibonacci-Zahlen** („Fibonacci" eigentlich Leonardo von Pisa, der mit den Kaninchen).

Bilder zum goldenen Schnitt

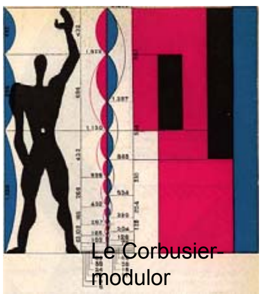
Leonardo da Vincis berühmtes Bild „Vitruv"

Auch in Schulbüchern, Didaktik-Büchern, allgemein-bildenden Büchern findet man den „goldenen Schnitt"

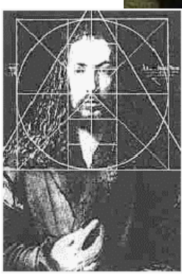


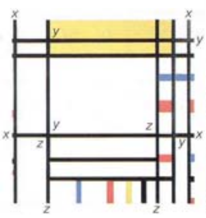


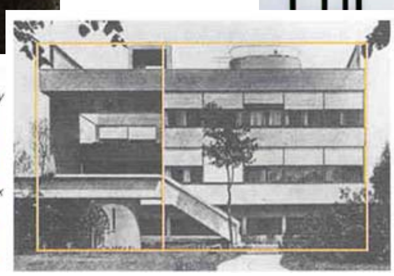
Mondrian



Le Corbusier-modulor



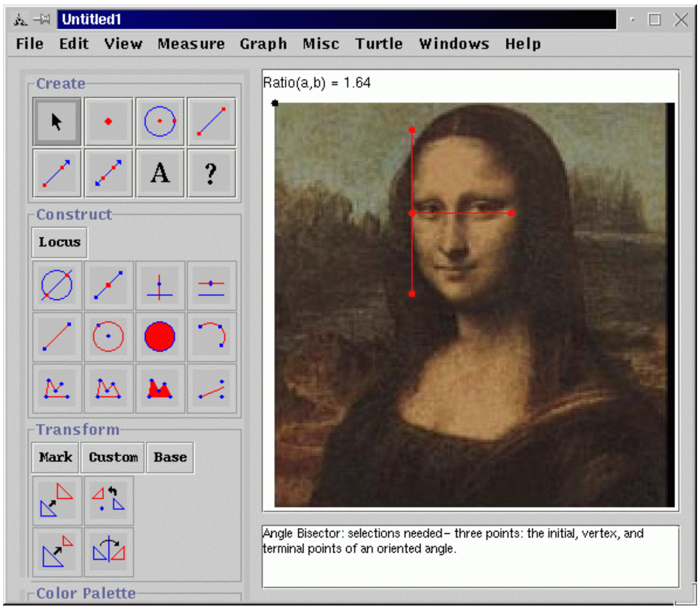




Le Corbusier

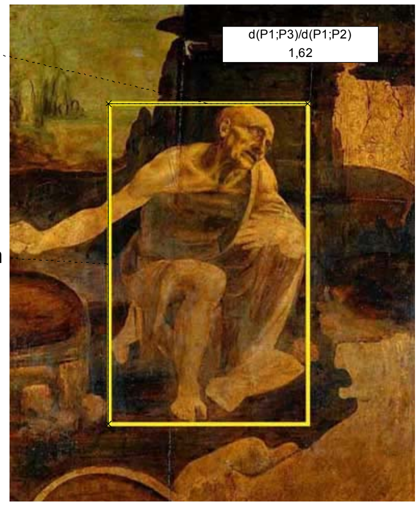
http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/goldenerschnitt/lu/

…auch als Beispiel der Möglichkeiten von Geometrie-Software

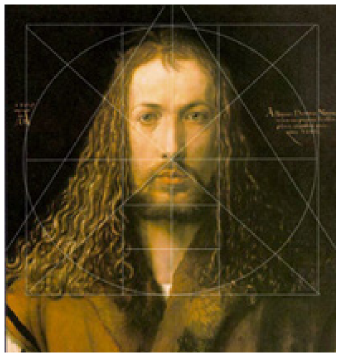


5,1 cm

8,2 cm



Da Vinci - Jeremias



Stöbern Sie einmal im Internet, schauen sich die Artikel von Wikipedia an, …….

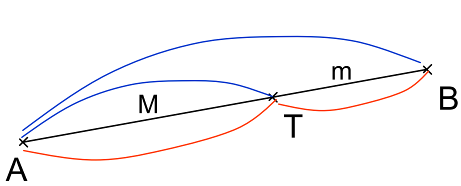
Jetzt aber zur **Definition** dieses Teilverhältnisses.

T sei Teilpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

T teilt $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt $\Leftrightarrow$

$$\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{TB} = \Phi$$

$$\frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{größererAbschnitt}} = \frac{\text{größererAbschnitt}}{\text{kleinererAbschnitt}} = \Phi$$



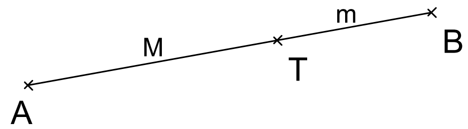
Kurz: $\boxed{\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m} = \Phi}$

Kurze Bezeichnungen:
Größerer Abschnitt: Major M
kleinerer Abschnitt: Minor m

$$\frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{Major}} = \frac{\text{Major}}{\text{Minor}} = \Phi$$

Berechnung der goldenen Schnittzahl Φ

$$\frac{M+m}{M}=\frac{M}{m}=\Phi \quad \Leftrightarrow$$



$$1+\frac{m}{M}=\frac{M}{m} \quad \Leftrightarrow$$

$$1+\frac{1}{\Phi}=\Phi \quad \Leftrightarrow$$

$$\Phi+1=\Phi^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Phi^2-\Phi-1=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$ (oder $\Phi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, da aber Φ >0 sein muss, scheidet dieser Wert aus)

$$\boxed{\Phi\approx 1{,}618}$$

Eigenschaften der goldenen Schnittzahl Φ

Die goldene Schnittzahl Φ hat merkwürdige Eigenschaften.
Formulieren Sie diese in der Form, die in der Sekundarstufe I zum Aufstellen von Termen und Gleichungen verwandt wird.

$1+\frac{1}{\Phi}=\Phi$ Die Zahl Φ ist um 1 größer als ihr Kehrwert.

$\frac{1}{\Phi}=\Phi-1$ Der Kehrwert von Φ ist um 1 kleiner als Φ.

$\Phi^2=\Phi+1$ Das Quadrat von Φ ist um 1 größer als Φ.

Der Wert von Φ ist ungefähr 1,618. Bestimmen Sie das Quadrat und den Kehrwert von Φ näherungsweise.

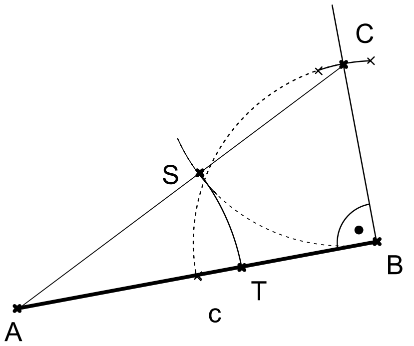
Konstruktion der Teilung im goldenen Schnitt

Eine der zahlreichen Konstruktionen der Teilung einer Strecke im goldenen Schnitt:

CB $\perp$ AB ; |CB| = ½ |AB|

S = AC $\cap$ Kreis(C, |BC|)

T = AB $\cap$ Kreis(A, |AS|)



Behauptung:

$\overline{AB}$ wird durch T im Goldenen Schnitt geteilt.

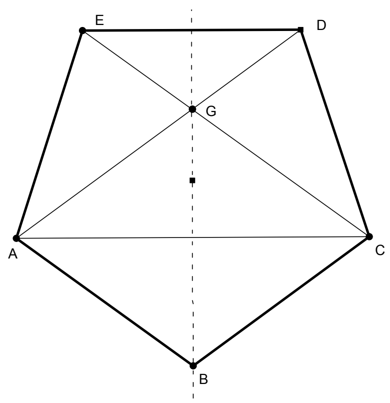
$$\overline{AC} = \frac{c\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AT} = \overline{AS} = \frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}$$

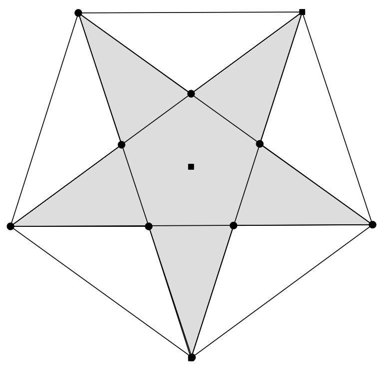
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{c}{\frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2c}{c(\sqrt{5}-1)} = \frac{2c(\sqrt{5}+1)}{c(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

Prüfen Sie (zur Kontrolle) dass auch $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \Phi$ ist.

Das regelmäßige Fünfeck und seine Diagonalen

Das regelmäßige Fünfeck und das aus seinen Diagonalen gebildete überschlagene Fünfeck, das Pentagramm oder der „Drudenfuß“ spielen seit der Antike eine magische Rolle.



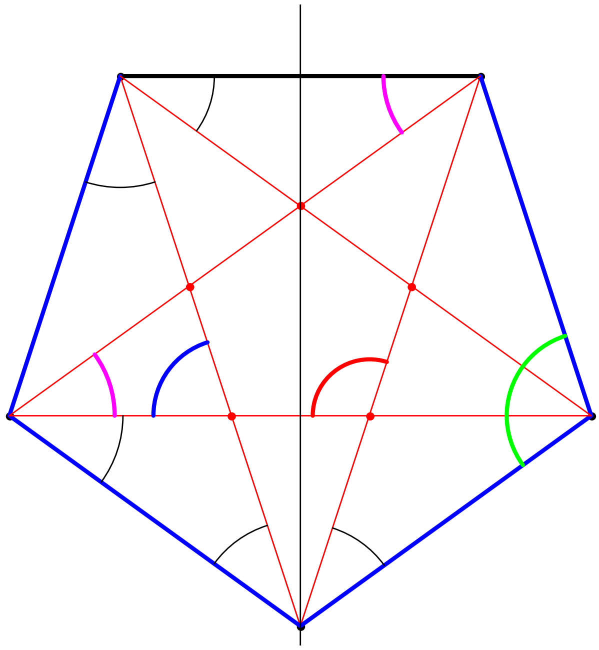


Das Pentagramm war das Wahrzeichen des Geheinbundes der Pythagoreer (der Anhänger des Pythagoras von Samos in Kroton),
der Drudenfuß sollte den Teufel abwehren (in Goethes Faust kann Mephistopheles die Türschwelle nicht überschreiten, weil dort ein Drudenfuß zu sehen ist).

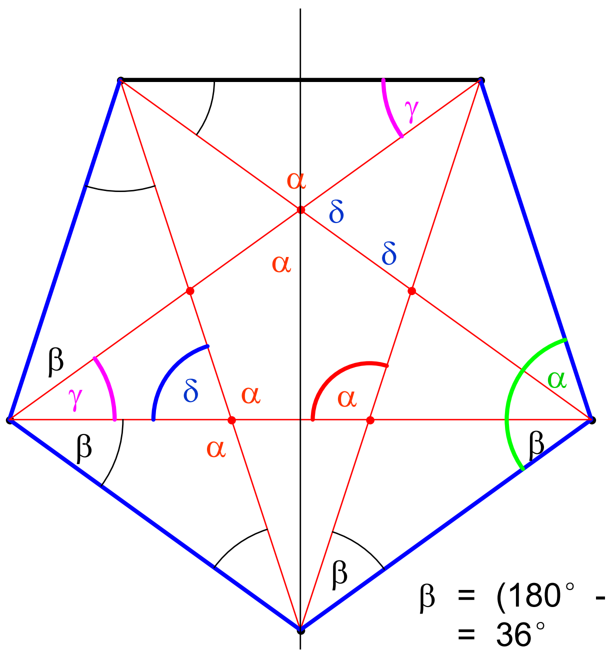
Wir wollen zeigen:

Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks teilen sich im Goldenen Schnitt

Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks teilen sich im Goldenen Schnitt



Berechnen Sie die in der Figur auftretenden Winkel.



$$\alpha = 3\cdot 180°/5 = 108°$$

$$\gamma = 108° - 2\beta = 36°$$

$$\delta = 180° - \alpha = 72°$$

$$\beta = (180° - \alpha)/2 = 36°$$

In der Figur treten 2 Typen von zueinander ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken auf.

Wir betrachten die stumpfwinkligen Dreiecke

ECD und EGD

Dann folgt aus deren Ähnlichkeit

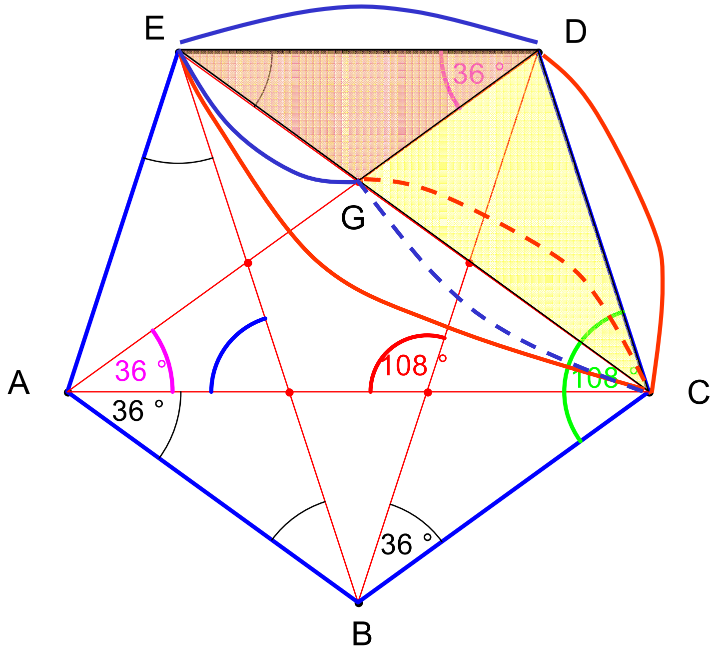
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EG}}$$

und da die Strecken

$\overline{CG}$, $\overline{CD}$ und $\overline{ED}$

gleich lang sind auch

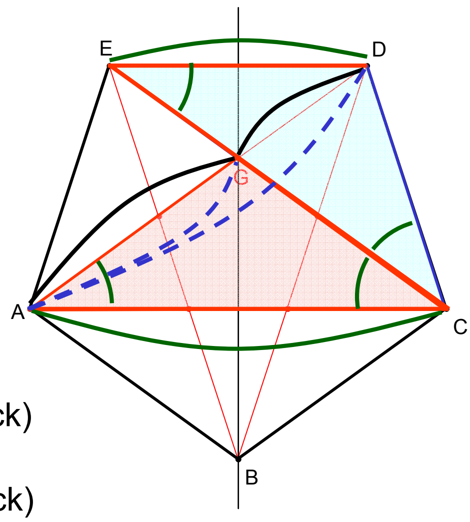
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{EG}}$$



⇒ Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis des goldenen Schnitts.

Anderer Beweis

Ein regelmäßiges Fünfeck ist
- achsensymmetrisch zur Mittelsenkrechten
- drehsymmetrisch zum Mittelpunkt.



Aus den Symmetrieeigenschaften folgt:

$\overline{AC} = \overline{EC}$ (gleichlange Diagonalen)

ED || AC (Achsensymmetrie)

∠ DCE = ∠ DEC (gleichschenkliges Dreieck)

= ∠ GCA (Wechselwinkel)

= ∠ GAC (gleichschenkliges Dreieck)

⇒ Δ EDC ≡ Δ AGC

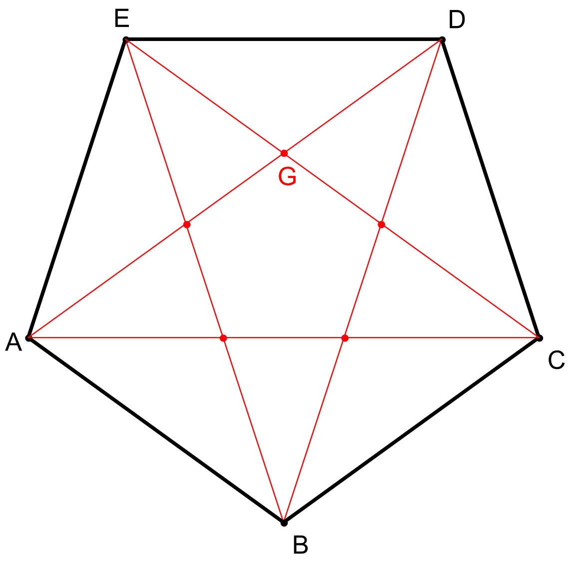
Bestimme das Teilverhältnis $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}}$:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ED}}$$ (Strahlensatz)

$$= \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}}$$ ($\overline{AC}$, $\overline{AD}$ Diagonalen ; $\overline{AG} = \overline{ED}$ Kongruenz)

⇒ Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis des goldenen Schnitts.

Aufgabe:



Berechnen Sie jeweils das Verhältnis von

- größerem Diagonalenabschnitt zur Diagonalen,
- Fünfecksseite zu Diagonale,
- kleinerem Diagonalenabschnitt zur Diagonalen,
- innerer Fünfecksseite zur ursprünglichen Fünfecksseite.

Ähnlichkeiten am rechtwinkligen Dreieck

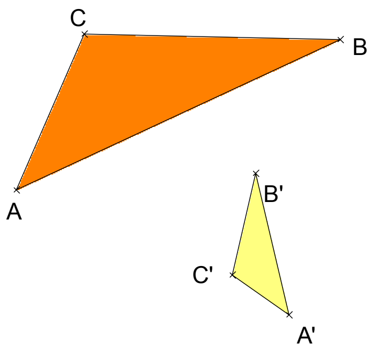
Ähnlichkeit beliebiger Dreiecke

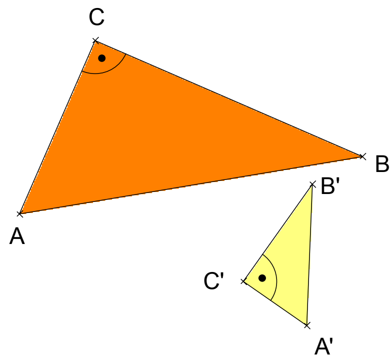
Zwei Dreiecke sind ähnlich wenn sie in *zwei* Winkeln übereinstimmen.

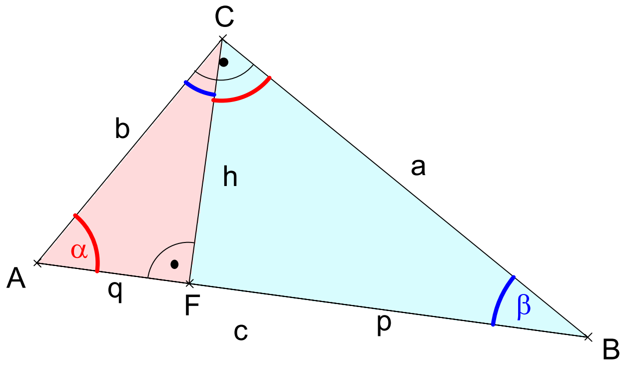
Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke

Zwei *rechtwinklige* Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in *einem Winkel <90°* übereinstimmen.

Begründungen?

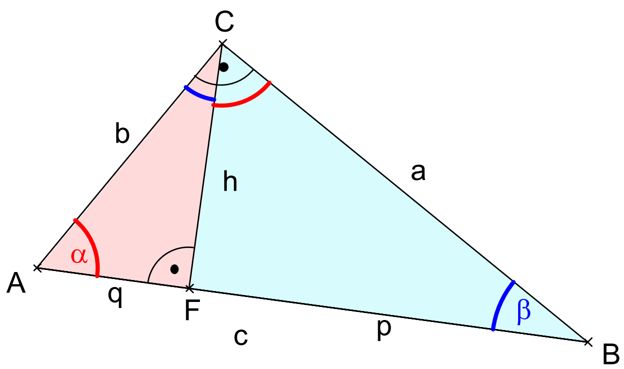






Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB und dem Höhenfußpunkt F auf AB.

Dann sind die Dreiecke ABC, BCF und CAF zueinander ähnlich.



Damit kann man die Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras sehr kurz beweisen:

$\frac{p}{h} = \frac{h}{q}$ $\Rightarrow$ $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz)

$\frac{p}{a} = \frac{a}{c}$ $\Rightarrow$ $a^2 = p \cdot c$ (Kathetensatz)

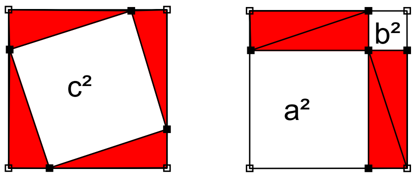
$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ $b^2 = q \cdot c$ (Kathetensatz)

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = (p+q) \cdot c = c^2$ (Satz des Pythagoras)

Gegenüberstellung einiger Beweise zum Satz des Pythagoras

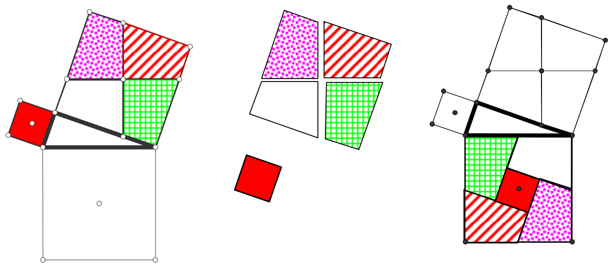
Ergänzungsbeweis

Die weißen Quadratflächen sind ergänzungsgleich.

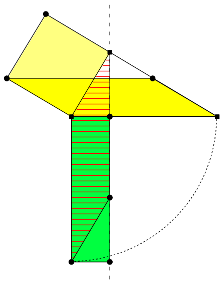


Zerlegungsbeweis

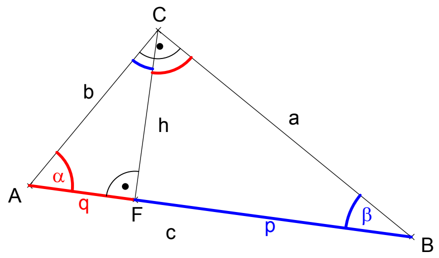
Die Quadratflächen über den Katheten und die Quadratfläche über der Hypotenuse sind zerlegungsgleich.



Scherungsbeweis



Beweis über Ähnlichkeit

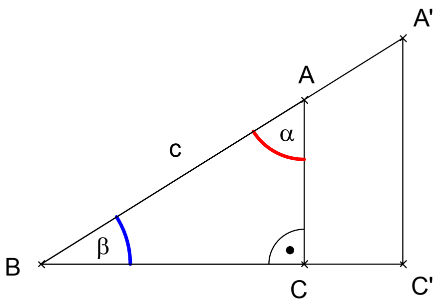


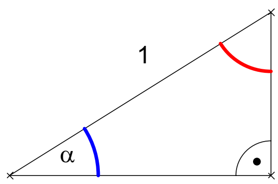
Rechtwinkliges Dreieck und trigonometrische Funktionen

Ein rechtwinkliges Dreieck ist eindeutig bestimmt durch

- eine Seite und einen Winkel (< 90°)
- eine Seite und das *Verhältnis* von zwei Seitenlängen

Kathete : Hypotenuse	sinus, cosinus
Kathete 1 : Kathete 2	tangens, cotangens



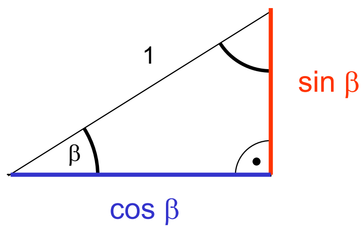


Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in einem Winkel $\neq 90°$ überein, dann sind die Längen*verhältnisse* entsprechender Seiten gleich.

Um solche Verhältnisse durch Strecken*längen* eindeutig zu repräsentieren, wählt man Dreiecke mit der Hypotenusenlänge 1 LE bzw. Kathetenlänge 1 LE.

Definitionen

Hypotenuse 1 LE



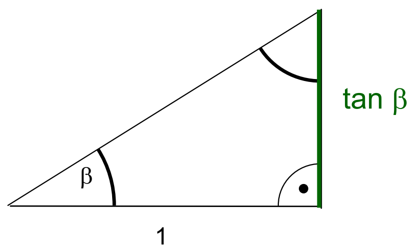
$$\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der Gegenkathete zu β

$$\cos\beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Ankathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der Ankathete zu β

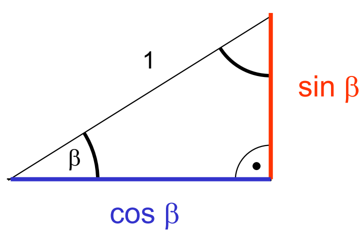
Ankathete 1 LE



$$\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der Gegenkathete zu β

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

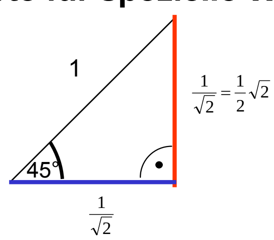


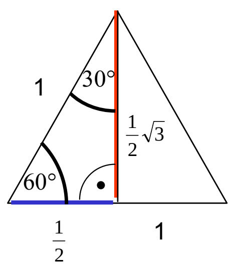
$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin\beta = \cos(90° - \beta) \qquad \cos\beta = \sin(90° - \beta)$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

Werte für spezielle Winkel





$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45° = 1$$

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3} \qquad \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

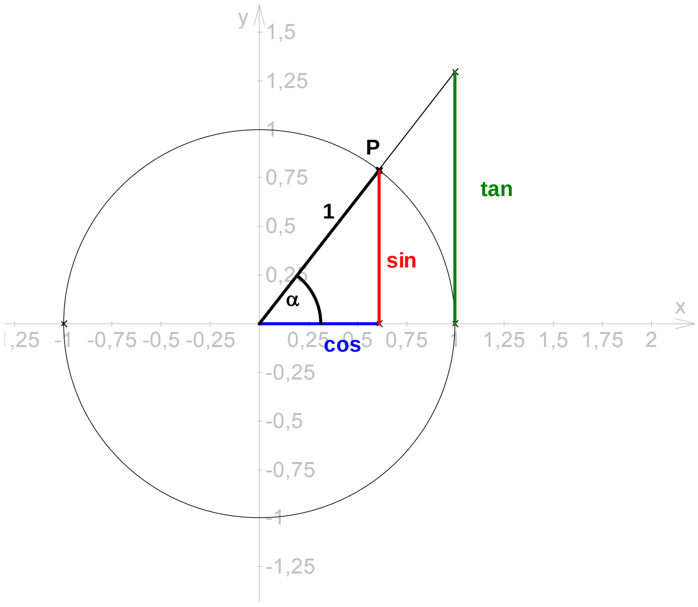
Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Betrachte zunächst noch einmal die Definition der trigonometrischen Funktionen an rechtwinkligen Dreiecken mit Eckpunkt P, bei denen die Hypotenuse die Länge 1 hat. P bewegt sich auf einem Einheitskreis.

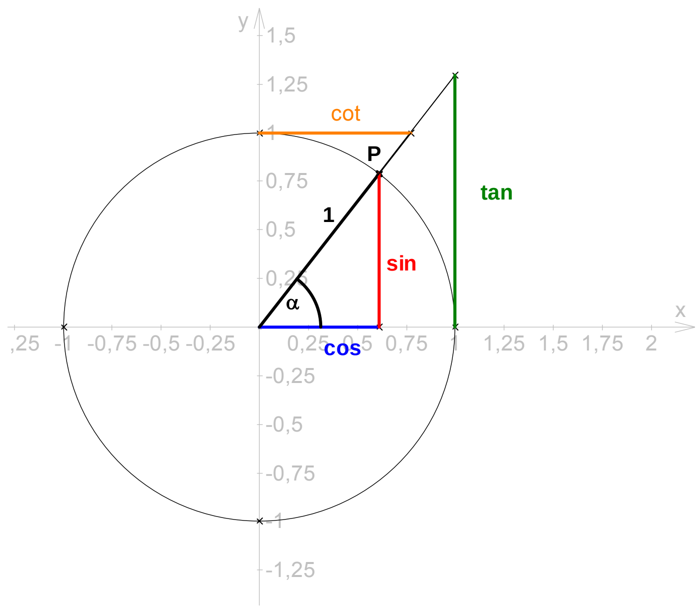
Dann lassen sich die Winkelfunktionen wieder als Längen gewisser Strecken interpretieren.

Insbesondere ist

- sin(α) die y-Koordinate von P
- cos(α) die x-Koordinate von P
- tan(α) = sin(α) /cos(α)



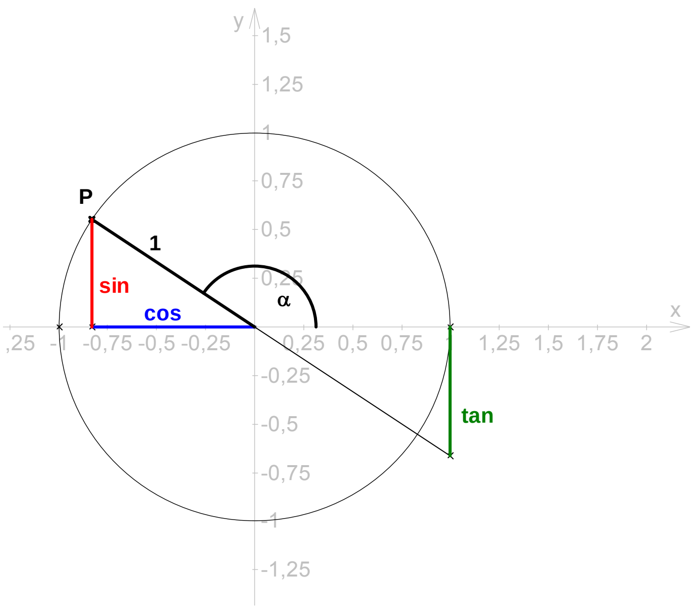
Hier ist auch noch die Cotangensfunktion cot berücksichtigt.



Diese Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis lassen sich jetzt auf Winkel > 90° erweitern. Der Winkel zu einem Punkt wird stets im Gegenuhrzeigersinn von der positiven x-Achse zum Strahl OP gemessen.

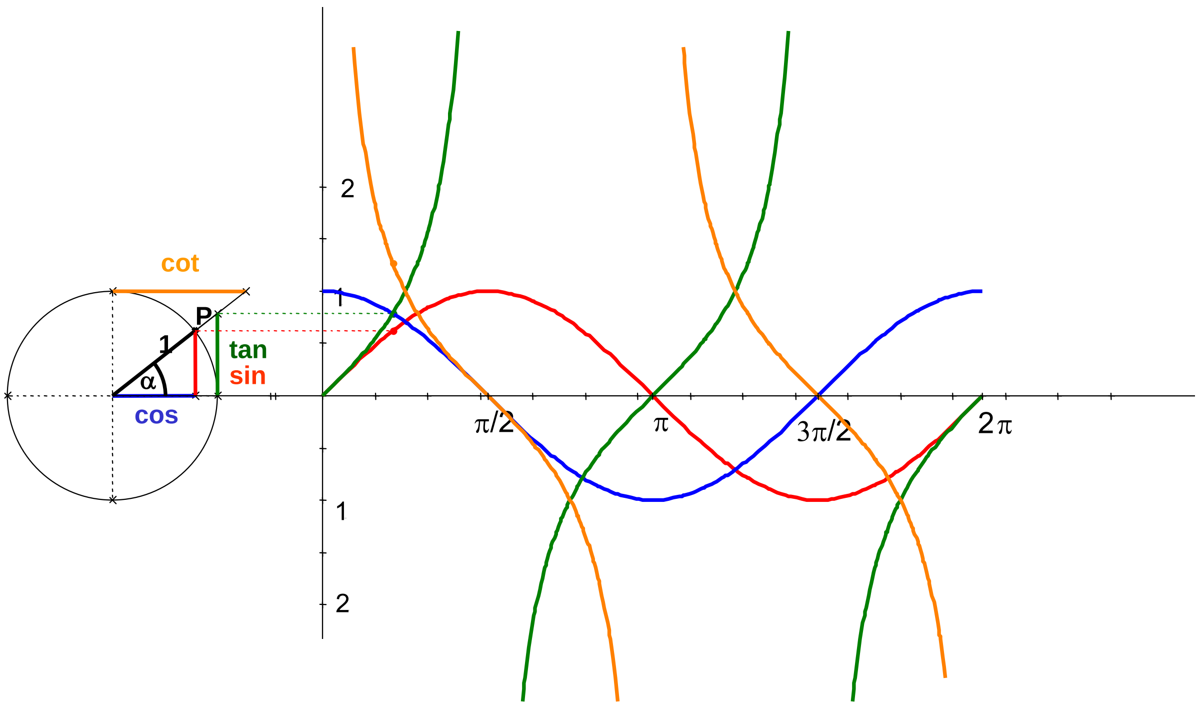
Hier ist wieder

- sin(α) die y-Koordinate von P
- cos(α) die x-Koordinate von P
- tan(α) = sin(α) /cos(α)
- cot(α) = cos(α)/ sin(α) =1/ tan(α)



Trigonometrische Funktionen: Funktionsgraphen

Hier die entstehenden Graphen (Winkel im Bogenmaß auf der horizontalen Achse) :



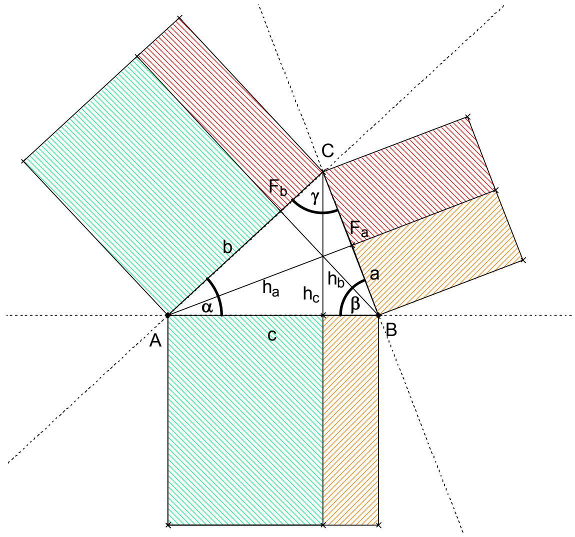
Dreiecke berechnen: Sinus- und Cosinussatz für beliebige Dreiecke

Während beim Kathetensatz und beim Satz des Pythagoras der rechte Winkel ausgezeichnet ist stehen jetzt alle Ecken gleichberechtigt nebeneinander.
Wir zeigen mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze, dass bei *spitzwinkligen* Dreiecken jeweils die an Dreiecksecken zusammenstoßenden gleich schraffierten Rechtecke flächeninhaltsgleich sind.

Diese Flächen entstehen, wenn die Quadrate über den Dreiecksseiten durch die Verlängerungen der Dreieckshöhen in Rechtecke geteilt werden.

Aus dieser Figur erkennt man sofort die Verallgemeinerungen des Kathetensatzes und des Satzes von Pythagoras:

Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Dreiecksseiten vermindert um die zwei gleich großen entsprechenden Rechtecke.



Cosinussatz für spitzwinklige Dreiecke

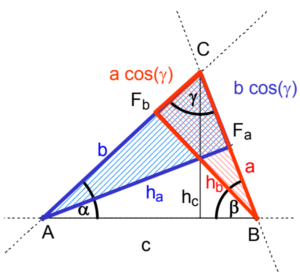
Wir betrachten jetzt die beiden Dreiecke AF_aC und BF_bC .

Es gilt

$$\overline{CF_a} = b\cos(\gamma)$$

$$\overline{CF_b} = a\cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow a \cdot \overline{CF_a} = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \overline{CF_b}$$



Cosinussatz für spitzwinklige Dreiecke

Wir betrachten jetzt die beiden Dreiecke AF_aC und BF_bC .

Es gilt

$$\overline{CF_a} = b\cos(\gamma)$$

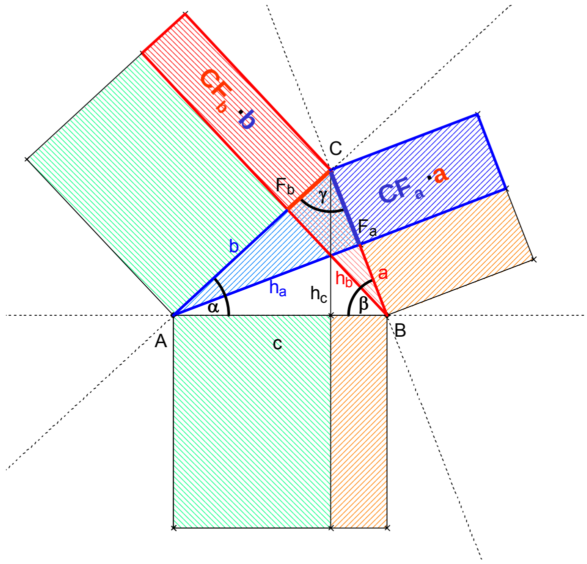
$$\overline{CF_b} = a\cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow a \cdot \overline{CF_a} = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \overline{CF_b}$$

Dies sind gerade die Flächeninhalte der beiden rot und blau schraffierten Rechtecke

Daraus ergibt sich wieder der Cosinussatz

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)}$$



Cosinussatz für stumpfwinklige Dreiecke

Für stumpfwinklige Dreiecke sind die Figuren etwas unübersichtlicher.
Wir betrachten den Fall, dass der Winkel γ stumpf ist.

Wir zeigen wieder, dass folgende Rechtecke flächeninhaltsgleich sind:

AF_bGF und $ALNF_c$

F_aIJB und F_cBMN

F_aIKC und F_bGHC

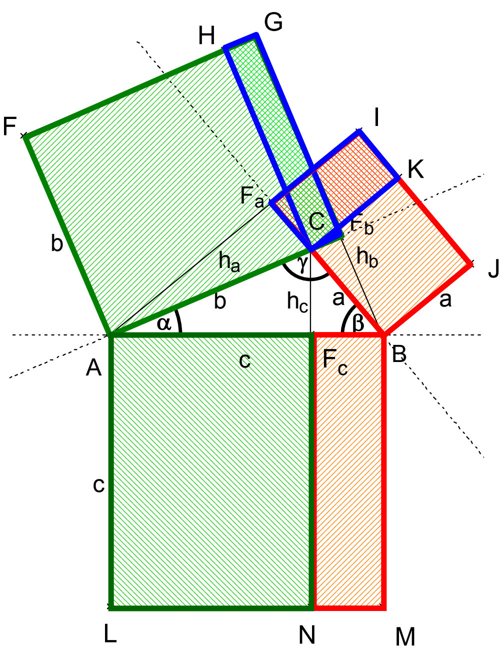
Wir zeigen weiter, dass die blau umrandeten Rechtecke den *negativ bewerteten* Flächeninhalt

$a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

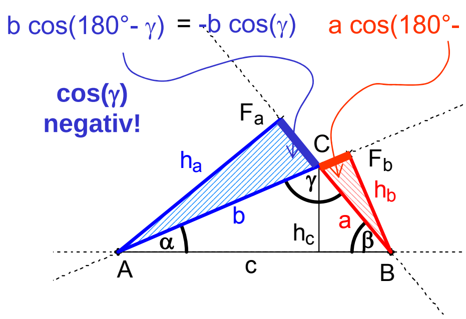
besitzen.

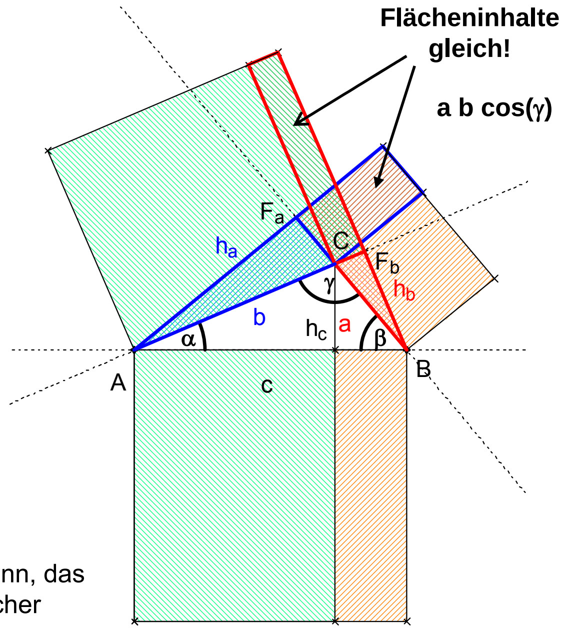
Auch daraus ergibt sich wieder der Cosinussatz

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)}$$



Zuerst betrachten wir die beiden Rechtecke am Winkel γ
(Farben gegenüber der vorangehenden Zeichnung verändert, um den Unterschied zwischen den Rechtecken zu sehen).





Wenn man diese “Flächeninhalte“ als

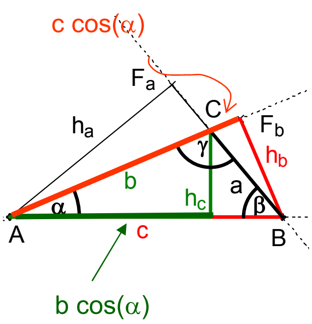
$a\,b\cos(\gamma)$

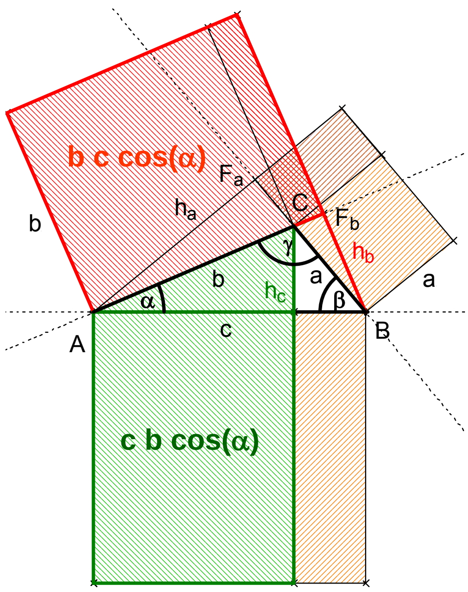
ausdrückt, dann sind diese negativ!

Dieses sind dann zwar keine Flächeninhalte im strengen Sinn, das Vorzeichen lässt aber zu, dass der Cosinussatz in einheitlicher Form geschrieben werden kann.

Man kann das Vorzeichen von Flächeninhalten über den Umlaufsinn deuten.

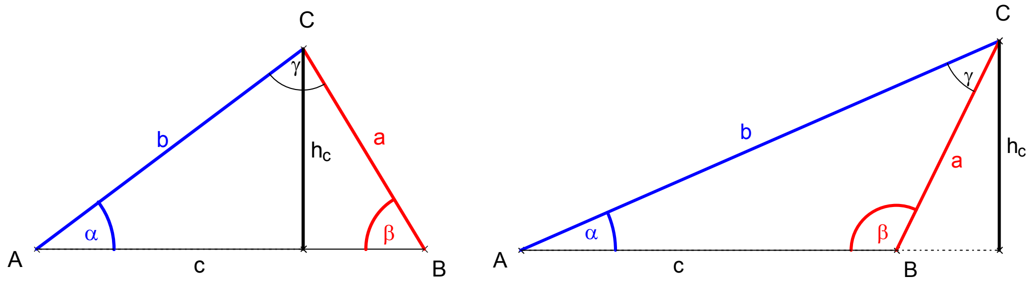
Jetzt sind noch die Rechtecke um die spitzen Winkel, etwa α, zu untersuchen.
(Auch hier sind die Farben gegenüber der ursprünglichen Zeichnung verändert).





Sinussatz

Der Sinussatz ist wesentlich einfacher zu beweisen als der Cosinussatz. Der Beweis verläuft für spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke gleich.

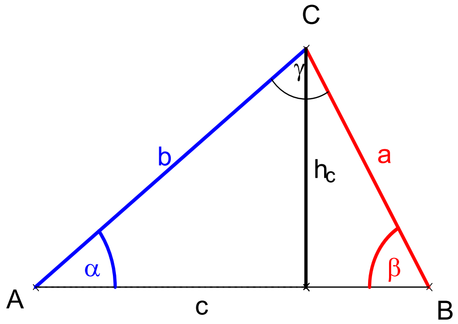


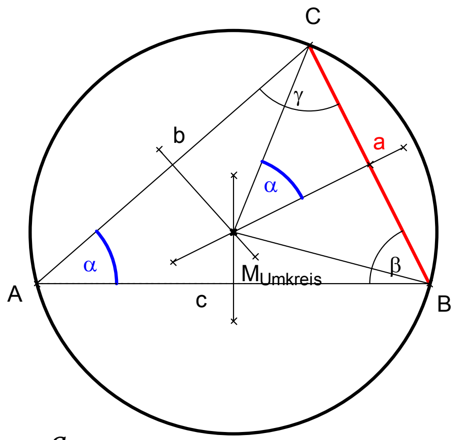
Die Höhe h_c lässt sich sowohl mit Hilfe von a und α als auch mit b und β ausdrücken:

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Das ist im Wesentlichen der Sinussatz.
Wir wollen diese konstanten Verhältnisse aber noch deuten.

Man zeichnet zum Dreieck ABC den Umkreis. Der Winkel α auf dem Umkreis ist gerade die Hälfte des zur Seite a gehörenden Mittelpunktswinkels (Umfangswinkelsatz).

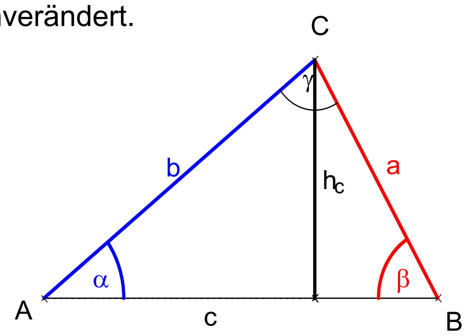


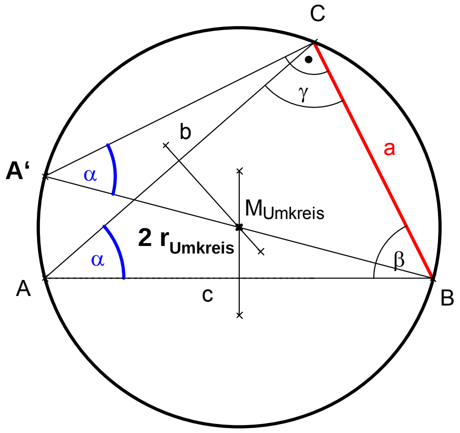


Daraus ergibt sich sofort $\sin(\alpha) = \dfrac{\frac{a}{2}}{r_{Umkreis}} = \dfrac{a}{2r_{Umkreis}}$

Damit erhält man den Sinussatz $\boxed{\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)} = 2\,r_{Umkreis}}$

Man zeichnet zum Dreieck ABC den Umkreis. Hält man die Seite a fest und bewegt den Punkt A‘ auf dem Umkreis des ursprünglichen Dreiecks, dann bleibt der Umfangswinkel α unverändert.



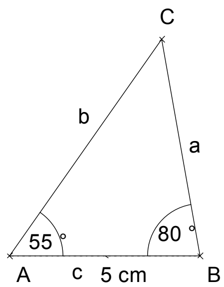


Betrachtet man die Lage des Punktes A‘, bei der BA‘ durch den Umkreismittelpunkt verläuft, dann ist das Dreieck rechtwinklig und der Sinus von α lässt sich mit Hilfe des Umkreisradius ausdrücken: $\sin(\alpha) = \frac{a}{2 r_{Umkreis}}$

Daraus ergibt sich der Sinussatz $$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2 r_{Umkreis}}$$

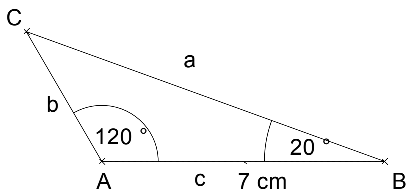
Aufgabe 1

Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seitenlänge c = 5 cm und den Winkeln α=55° und β=80° . **Berechnen** Sie die übrigen Seiten des Dreiecks. Berechnen Sie auch den Radius des Umkreises.



Aufgabe 2

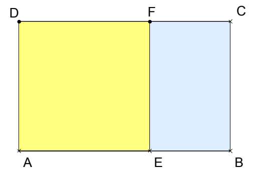
Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seitenlänge c = 7 cm und den Winkeln α = 120° und β=20° . **Berechnen** Sie die übrigen Seitenlängen in diesem Dreieck.



Rechtecksformate

Wir wollen noch eine weitere Anwendung des Ähnlichkeitsbegriffs geben.
Wir hatten schon in den Übungen goldene Rechtecke definiert:

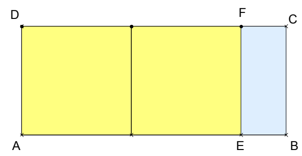
Ein Rechteck heißt golden, wenn durch Abtrennen eines Quadrates (dessen Seitenlänge die kürzere Rechtecksseite ist) ein zum ursprünglichen Rechteck ähnliches Rechteck entsteht.



In analoger Weise definieren wir weitere Rechtecksfomen.

Aufgabe

Ein Rechteck heiße silbern, wenn durch Abtrennen zweier Quadrate (deren Seitenlänge die kürzere Rechtecksseite ist) ein zum ursprünglichen Rechteck ähnliches Rechteck entsteht.



Berechnen Sie das Seitenverhältnis von silbernen Rechtecken.

DIN-Format

Die Papierformate der DIN-A-Reihe werden durch folgende Bedingungen definiert:

- Halbiert man die längere Seite des Rechtecks, dann entstehen zwei zum ursprünglichen Rechteck ähnliche Rechtecke.
- DIN A(n+1) ist das aus DIN An durch Halbieren entstehende Format.
- DIN A0 hat den Flächeninhalt 1 m^2.

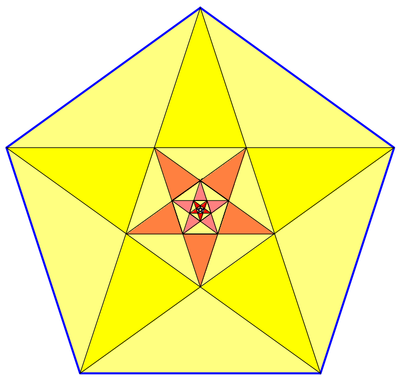
Aufgabe

- Berechnen Sie das Seitenverhältnis von Rechtecken der DIN A Reihe.
- Bestimmen Sie die Seitenlängen von DIN A0.
- Stellen Sie die Tabelle der Seitenlängen von DIN A0 bis DIN A4 auf.
- Begründen Sie nochmals, mit welchem prozentualen Verkleinerungsfaktor zwei DIN A4 Seiten auf ein DIN A4 Blatt kopiert werden können und erläutern Sie, weshalb diese Eigenschaft charakteristisch für das DIN A Format ist.

Anhang

Ende

Pentagramm im „Faust“



MEPHISTO:
Gesteh' ich's nur! Dass ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleine Hindernis:
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle ---

FAUST:
Das Pentagramma macht dir Pein?
Ei, sage mir du Sohn der Hölle:
Wenn dich das bannt, wie kamst du den herein?

….
Faust erkennt die Chance, Mephisto festzuhalten, dem der Rückzug aus dem Zimmer durch ein sich dort befindliches Pentagramm verwehrt bleibt.
Doch Mephisto geht (noch) keinen Pakt mit Faust ein, wie es dieser vorschlägt.
Durch Geistergesang wird Faust in tiefen Schlaf versetzt, so dass Mephisto mit Hilfe einer Ratte, die den Drudenfuss benagt, fliehen kann.

Zurück

Magische Pentagramme

Zurück

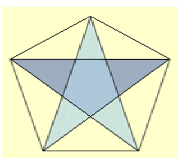
Das Zeichen der Pythagoreer

Der Bund der Pythagoreer hatte auch sein geheimes Zeichen. Das war der (regelmäßige) fünfzackige Stern, das „**Pentagramm**“, das im Mittelalter als Amulett verwendet wurde. (Auch GOETHEs Faust zeichnet eine solche Figur, „Drudenfuß“ genannt, auf seine Schwelle, um den Teufel fernzuhalten.)

Es begab sich, dass einst ein alter, gebrechlicher und kranker Wanderer an einem Haus anklopfte und um etwas zu essen und zu trinken bat. Der Wirt des Hauses war ein gutherziger Mann, gab dem Wanderer Nahrung und ein Nachtlager und versorgte ihn auch weiterhin, da der alte Mann sterbenskrank war. Als es mit ihm zu Ende ging, bat er seinen Wirt um eine Tafel und ein Stück Kreide, malte ein Pentagramm darauf und forderte den Wirt auf, die Tafel in das Fenster zu stellen, denn er habe sonst nichts, womit er die Güte, die er erfahren hatte, vergelten könne. Dann starb er. Einige Zeit später kam ein vornehmer Reisender an dem Haus vorbei, sah die Tafel und fragte den Wirt, welche Bewandtnis es damit habe. Als der Wirt den Hergang erzählte, wurde er von dem Reisenden mit einen Beutel Geldes entlohnt.

Doch ausgerechnet die Figur des Pentagramms brachte die Philosophie der Pythagoreer ins Wanken, denn die Länge des Umkreises und die Seitenlänge des Fünfecks lassen sich nicht in einem Verhältnis natürlicher Zahlen ausdrücken. Auf solches Problem war man schon bei der Basis und den Schenkeln eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks gestoßen. Heute wissen wir, dass dies zu irrationalen Zahlen führt. Als einer der Pythagoreer, ein gewisser HIPPASOS, solches auszusprechen wagte, war das wie eine Gotteslästerung, und die Götter sollen ihn bei einem Schiffbruch umkommen lassen haben. Immerhin begegneten die Pythagoreer dabei dem Problem des „Goldenen Schnitts“.

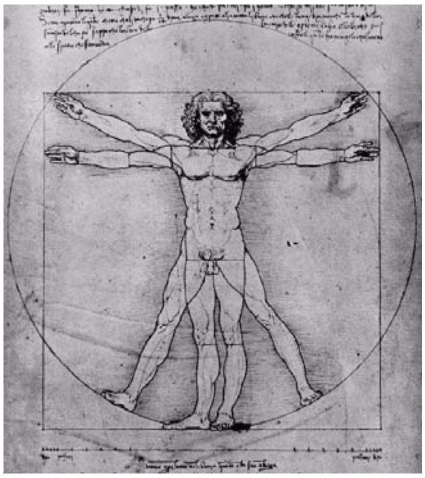
Die Geheimniskrämerei der Pythagoreer und ihre ungewöhnliche Lebensweise erregten den Unmut der Bevölkerung. So wurden sie zunächst aus Kroton, dann auch aus Megapontum, wohin sie sich geflüchtet hatten, vertrieben. Möglicherweise kam PYTHAGORAS bei einem solchen Pogrom ums Leben.



Vitruv – Leonardo da Vinci

Vitruv
Eine zentrale Passage in Vitruvs Abhandlung stellt die Theorie des wohlgeformten Menschen (homo bene figuratus) vor. Anhand geometrischer Formen werden die Proportionen des Menschen zueinander beschrieben. Dies inspirierte mehrere Künstler der Renaissance zu Skizzen, unter anderem auch Albrecht Dürer. Die berühmteste Illustration stammt von Leonardo da Vinci und erlangte unter dem Namen "Der vitruvianische Mensch" Berühmtheit.

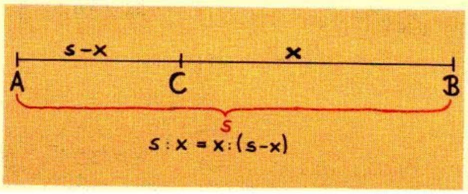
Proportionsschema der menschlichen Gestalt nach Vitruv – Skizze von Leonardo da Vinci, 1485/90, Venedig, Galleria dell' Accademia



Der goldene Schnitt im Schulbuch: Schnittpunkt 10 (alt) Klett

DER GOLDENE SCHNITT

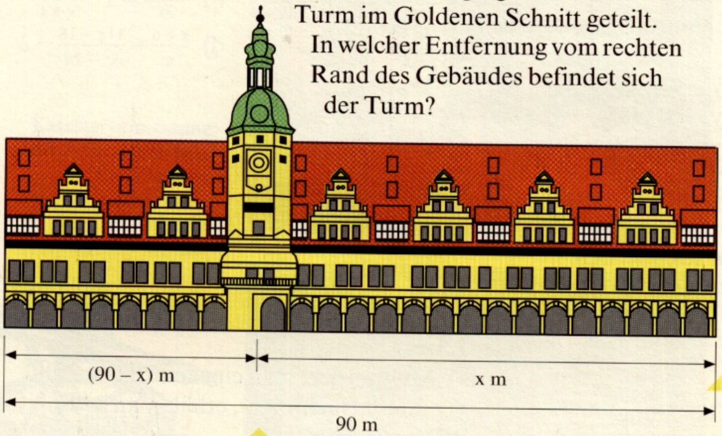
Bereits im antiken Griechenland wurden beim Erschaffen von Kunstwerken und Gebäuden Gesetzmäßigkeiten angewandt, die das Gefühl von Schönheit und Harmonie vermitteln sollten. Auch Dürer und andere Künstler der Renaissance beschäftigten sich mit der „Göttlichen Proportion", bei der Teilstrecken einer Figur in einem bestimmten Verhältnis stehen.
Eine Strecke ist im Goldenen Schnitt geteilt, wenn das Verhältnis der Gesamtstrecke s zum größeren Teil gleich dem Verhältnis des größeren Teils zum kleineren ist.



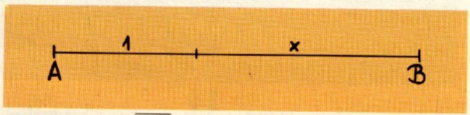
3
Im **Liber abacci** des **Leonardo von Pisa** (ca. 1170−1250) findet man die nach ihm benannte Fibonacci-Zahlenfolge
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
a) Nach welcher Gesetzmäßigkeit entstehen die Glieder der Zahlenfolge?
b) Wie lautet die 11., wie die 12. Zahl?
c) Mit den Gliedern der Fibonacci-Folge lassen sich Quotienten auf folgende Weise bilden: $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{13}{8}$; ...
Setze die Folge der Quotienten um 5 weitere Glieder fort und berechne jeweils deren Dezimalwert auf 6 Nachkommastellen genau. Was fällt dir auf?
d) Bestimme mit einer Tabellenkalkulation die ersten 30 Fibonacci-Zahlen und die zugehörigen Quotienten. Vergleiche die Quotienten mit $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

1

Das 1556 in der Renaissancezeit erbaute Alte Rathaus in Leipzig wird durch seinen Turm im Goldenen Schnitt geteilt. In welcher Entfernung vom rechten Rand des Gebäudes befindet sich der Turm?



2



Die Strecke $\overline{AB}$ ist im Goldenen Schnitt geteilt. Bestimme die zugehörige Verhältnisgleichung und zeige, daß $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ eine Lösung ist. Gib die Lösung auch als Näherungswert an.

3

Im **Liber abacci** des **Leonardo von Pisa** (ca. 1170–1250) findet man die nach ihm benannte Fibonacci-Zahlenfolge
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

a) Nach welcher Gesetzmäßigkeit entstehen die Glieder der Zahlenfolge?

b) Wie lautet die 11., wie die 12. Zahl?

c) Mit den Gliedern der Fibonacci-Folge lassen sich Quotienten auf folgende Weise bilden: $\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \ldots$
Setze die Folge der Quotienten um 5 weitere Glieder fort und berechne jeweils deren Dezimalwert auf 6 Nachkommastellen genau. Was fällt dir auf?

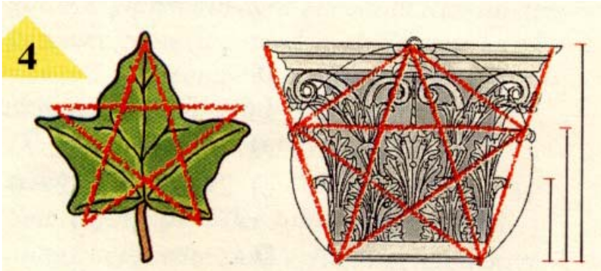
d) Bestimme mit einer Tabellenkalkulation die ersten 30 Fibonacci-Zahlen und die zugehörigen Quotienten. Vergleiche die Quotienten mit $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Die Fibonacci-Zahlen ...

S 1	S 2
Zahlen	Quotient
1	–
1	1
2	2
3	1,5
5	1,6666 ...

... und die zugehörigen Formeln

...	...
Z(−1)S + Z(−2)S	ZS(−1)/ Z(−1)S(−1)
Z(−1)S + Z(−2)S	ZS(−1)/ Z(−1)S(−1)
...	...



Bei Pflanzen, aber auch in der Architektur, sind regelmäßige Fünfecke zu erkennen. Die Diagonalen schneiden sich im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck und prüfe die Aussage durch Messen von geeigneten Teilstrecken nach.

Schreiben Sie die Werte für das Teilverhältnis λ=TV(A,B;T) unter die Skizze
z.B. $\lambda \approx 0$, positiv oder $\lambda \approx -2$