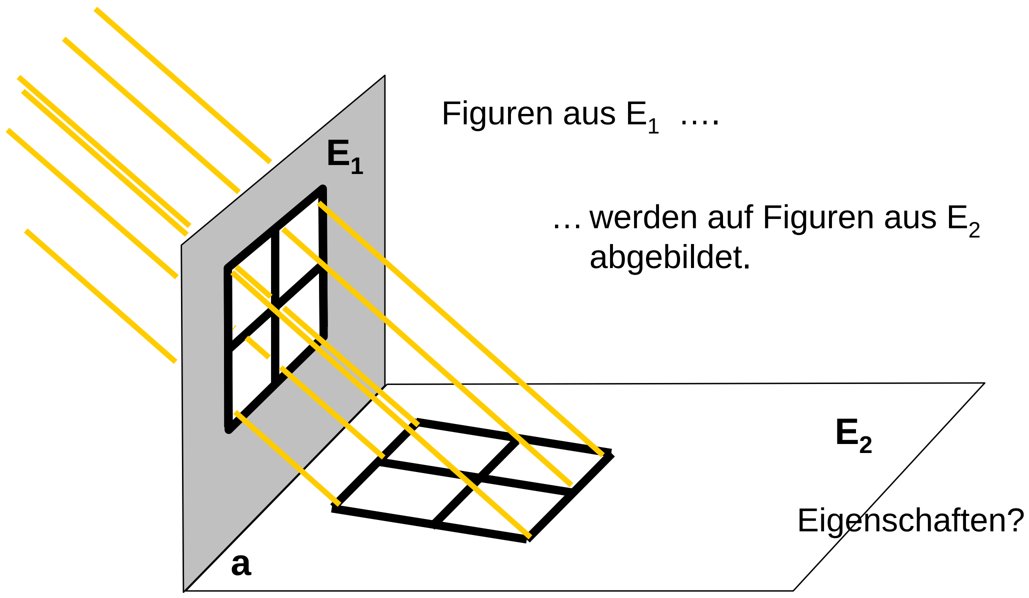
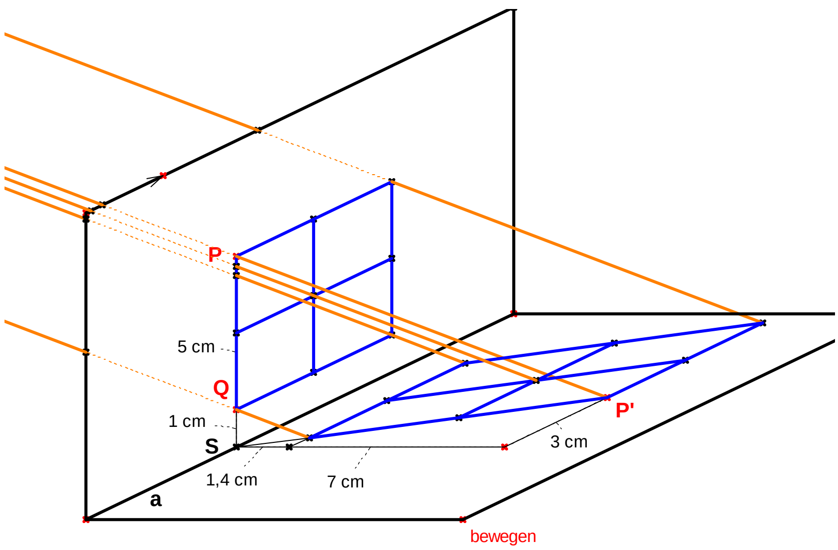
Kapitel 4: Affine Abbildungen

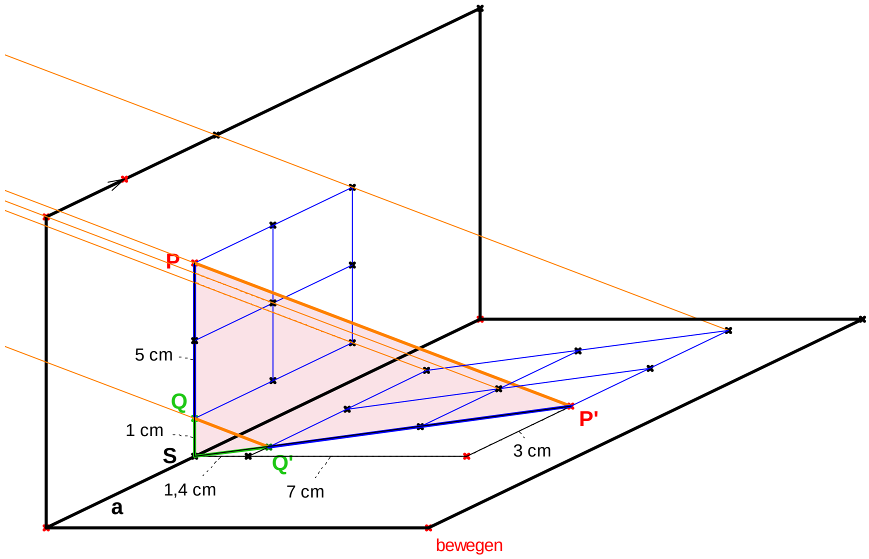
Parallelprojektion einer Ebene in eine andere Ebene:
Motivation für die Abbildungsvorschrift von Achsenaffinitäten.





Worauf werden wohl die folgenden Figuren abgebildet:
Rechteck, Quadrat, gleichseitiges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck, Trapez, Parallelogramm, Kreis?

Gegeben ist ein Punkt P in E_1 und sein Bildpunkt P‘ in E_2.
Wie findet man zu einem beliebigen weiteren Punkt Q den Bildpunkt Q‘?



Gegeben ist ein Punkt P in E_1 und sein Bildpunkt P‘ in E_2.

Wie findet man zu einem beliebigen weiteren Punkt Q den Bildpunkt Q‘?

Zeichne in der Ebene, die durch P, P‘ und Q bestimmt wird!

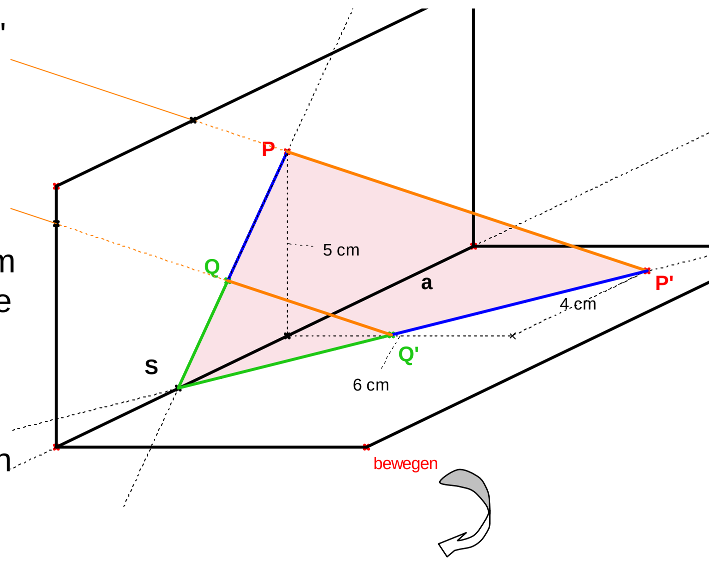
Damit die Verhältnisse einfacher werden, stellen wir nur noch P, P‘ und Q dar.

Ein Punkt P und sein Bildpunkt P' sind gegeben.

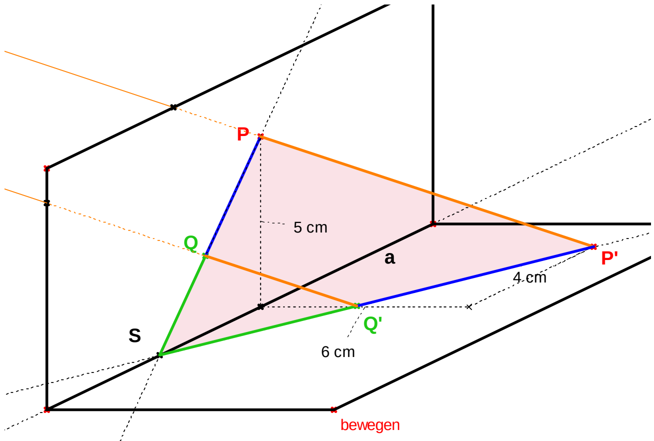
Dieses Punktepaar legt die Abbildung offenbar fest.

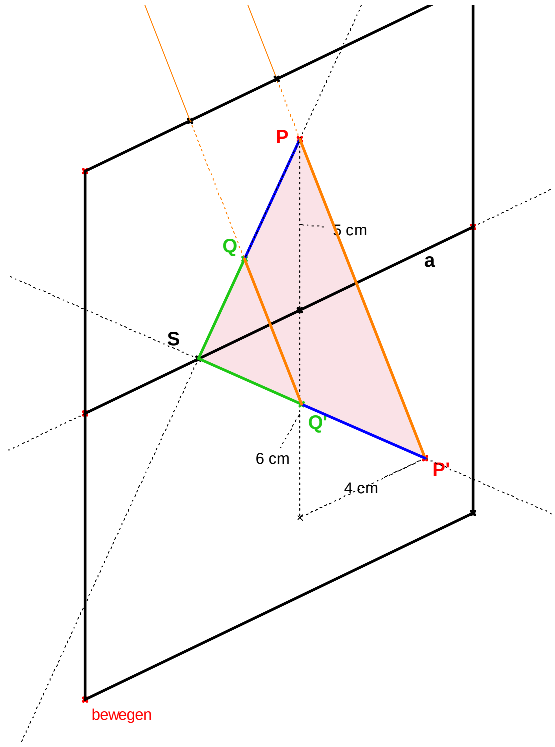
Zeichnen Sie zwei Ebenen wie im nebenstehenden Bild, wählen Sie zwei Punkte P und P‘ und bilden Sie weitere Punkte ab.

Das Bild ist die Kavalierprojektion von zwei Ebenen.



Wir wollen diese Abbildung als Abbildung einer Ebene in sich darstellen, indem wir die Bildebene in die Urbildebene drehen.

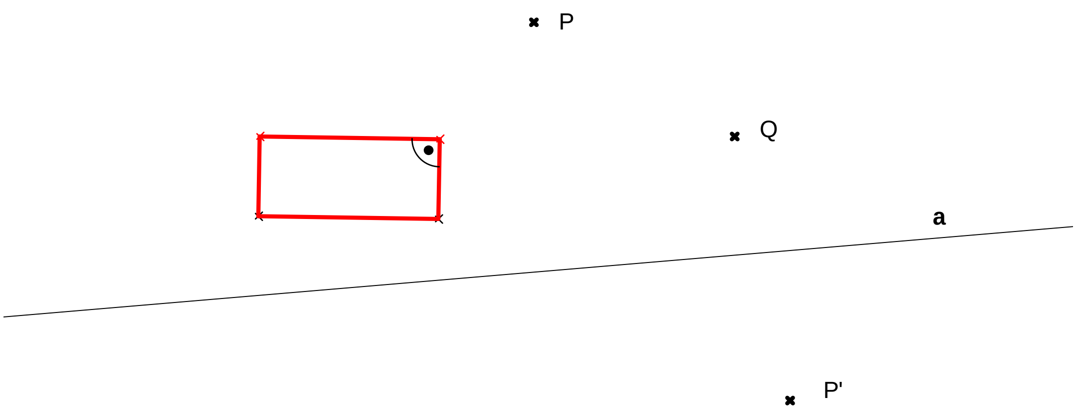




Zeichnen Sie jetzt in einer *einzigen* Zeichenebene die Achse a sowie zwei Punkte P und P‘.

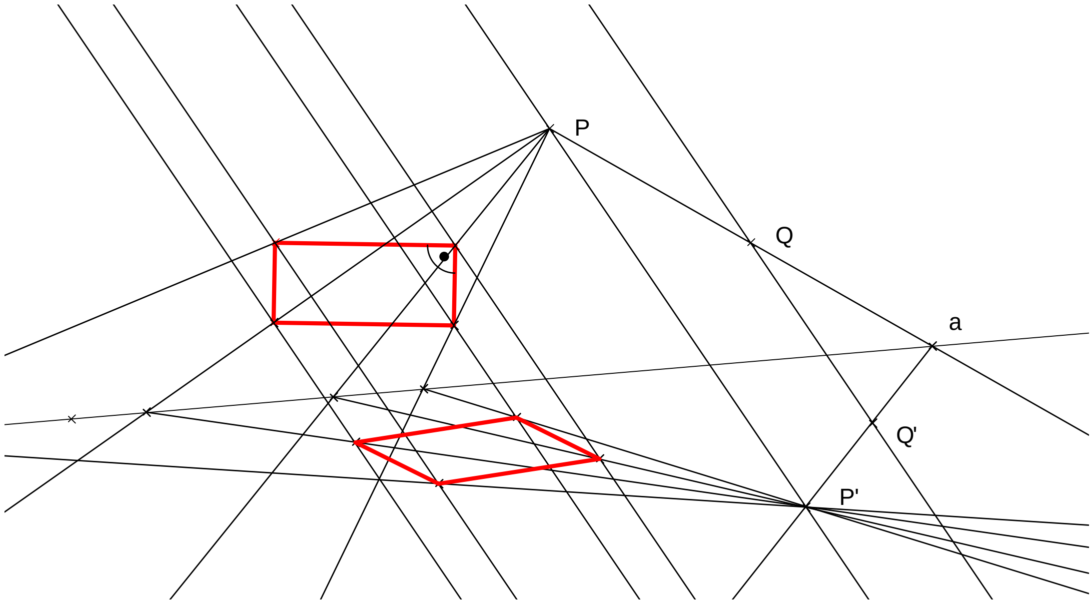
Bilden Sie weitere Punkte Q ab.
Zeichnen Sie auch ein Rechteck und bilden dieses ab.

Formulieren Sie die Abbildungsvorschrift, die Sie verwenden.
Gibt es Punkte, bei denen Ihre Vorschrift Schwierigkeiten bereitet?



Bilden Sie weitere Punkte Q ab.
Zeichnen Sie auch ein Rechteck und bilden dieses ab.

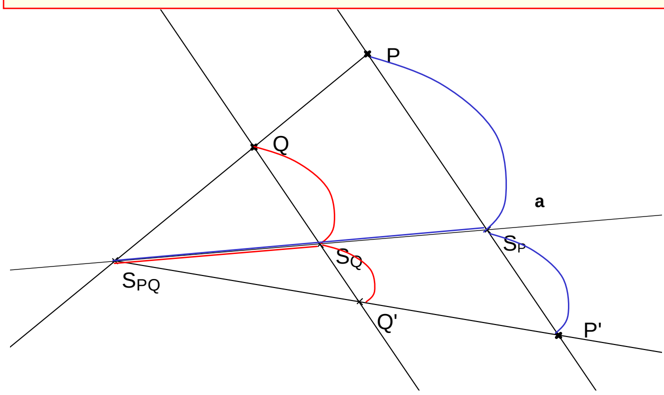
Formulieren Sie die Abbildungsvorschrift, die Sie verwenden.
Gibt es Punkte, bei denen Ihre Vorschrift Schwierigkeiten bereitet?



Abbildungen dieser Art nennen wir Achsenaffinitäten.
Eine Achsenaffinität ist festgelegt durch die Affinitätsachse a und ein Punktepaar P, P‘ .
Welche Bedingungen muss man an P,P‘ stellen, damit eine bijektive Abbildung der Ebene definiert wird?

Lösung zu Achsenaffinität mit a, P, P'

Achsenaffinität



Aus den Strahlensätzen ergibt sich, dass für alle Punkte Q gilt

$$\overline{S_Q Q'} : \overline{S_Q Q} = \overline{S_P P'} : \overline{S_P P} =: k$$

$$\overline{S_Q Q'} = k \cdot \overline{S_Q Q}$$

Begründung?

Damit kann die Abbildungsvorschrift folgendermaßen formuliert werden:

Definiere $k := \overline{S_P P'} : \overline{S_P P}$

Für alle Punkte Q gilt
- Q‘Q ist parallel zu P‘P,
- für den Schnittpunkt S_Q von Q‘Q mit a gilt $\overline{S_Q Q'} = k \cdot \overline{S_Q Q}$

Wir geben eine etwas abgewandelte Definition an, da sie leichter handhabbar ist als die Angabe eines Punktepaares P, P‘.

Abbildungsvorschrift Achsenaffinität

Achsenaffinität

Eine Achsenaffinität kann festgelegt werden durch
- eine **Affinitätsachse a**,
- einen **Affinitätswinkel α**, der die Affinitätsrichtung bestimmt, ($0< \alpha <180°$)
- einen **Affinitätsfaktor $k \neq 0$**

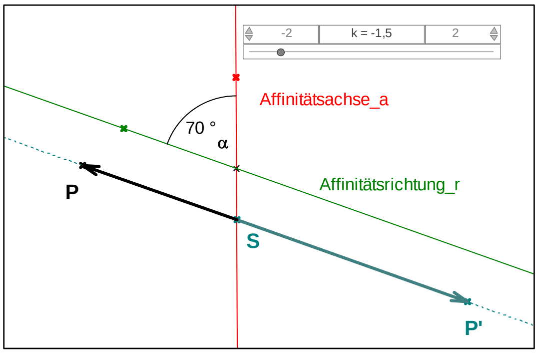
sowie die folgende Vorschrift zur Abbildung von Punkten P der Ebene in sich

$P \in a \Rightarrow$ P‘ = P

$P \notin a \Rightarrow$ S ist der Schnittpunkt von PP‘ mit a, PP‘ schließt mit g den Winkel α ein,

$$\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$$

(d.h. für k>0 liegen P und P‘ auf der gleichen Seite von a, für k<0 liegen P und P‘ auf verschiedenen Seiten von a).



Alternative: Statt des Winkels α gibt man eine Gerade $r \not\parallel a$ als Affinitätsrichtung an.

Aufgaben

Bilden Sie ein beliebiges Dreieck, ein Rechteck, ein Quadrat mit folgenden Achsenaffinitäten ab:

1. $\alpha = 90°$, k = -1
2. $\alpha = 90°$, k = -3
3. $\alpha = 90°$, k = -0,5
4. $\alpha = 90°$, k = 2
5. $\alpha = 90°$, k = 0,5
6. $\alpha = 30°$, k = -1
7. $\alpha = 60°$, k = -2
8. $\alpha = 60°$, k = 3

Spezialfälle von Achsenaffinitäten:

Spezialfälle von Achsenaffinitäten:

Identität:		$k = +1$
Achsenspiegelung:	$\alpha = 90^\circ$,	$k = -1$
Schrägspiegelung:		$k = -1$
Senkrechte Achsenaffinität:	$\alpha = 90^\circ$	

Eigenschaften von Achsenaffinitäten

Fixelemente:

Fixpunkte:	Alle Punkte der Affinitätsachse
Fixpuktgerade:	Affinitätsachse
Fixgeraden:	alle Geraden parallel zur Affinitätsrichtung

Invarianten:
geradentreu,
parallelentreu,
teilverhältnistreu
nicht längenverhältnistreu.

Nur in speziellen Fällen:

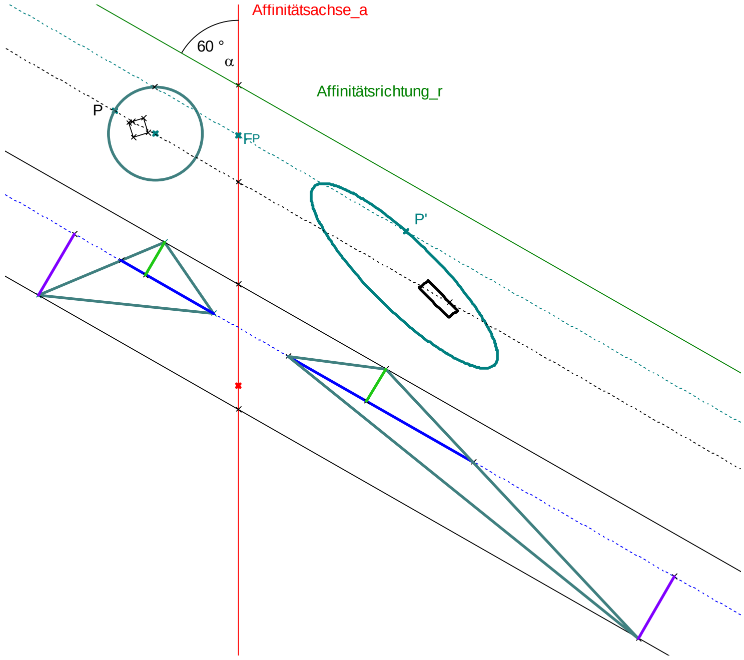
Umlaufsinn erhalten wenn $k>0$

Veränderung des Flächeninhalts bei Achsenaffinitäten

Dreiecke mit
„Grundseite“ parallel zur
Affinitätsrichtung:

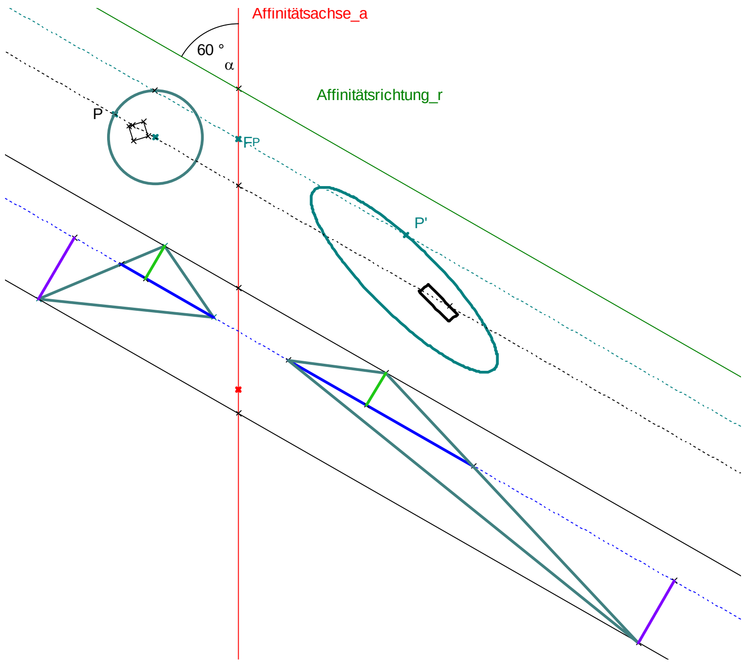
Länge der Grundseite mit |k| multipliziert,
Länge der Höhe unverändert
⇒
Flächeninhalt mit |k| multipliziert.

Beliebige Dreiecke:
Zerlegen in zwei Dreiecke mit „Grundseite“ parallel zur Affinitätsrichtung
⇒
Flächeninhalt mit |k| multipliziert.



Veränderung des Flächeninhalts bei Achsenaffinitäten

Beliebige n-Ecke:
Zerlegen in Dreiecke
⇒
Flächeninhalt mit |k| multipliziert.



Beliebige Figuren, z.B. Kreis:
Annähern durch n-Ecke
⇒
Flächeninhalt mit |k| multipliziert.

Anmerkung:
Beachten Sie im Folgenden jeweils den Unterschied zwischen den folgenden leicht zu verwechselnden Eigenschaften von Abbildungen.
Geben Sie jeweils ein Beispiel dazu an.

Längentreue:

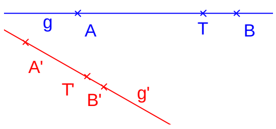
Alle Streckenlängen bleiben erhalten.

Längen*verhältnis*treue:

Verglichen werden die Längen von 2 beliebigen Strecken a, b und die Längen ihrer Bildstrecken a‘ und b‘: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

***Teil*verhältnistreue**

Verglichen werden die Längenverhältnisse auf **einer Geraden** mit den Längenverhältnissen auf der Bildgeraden: $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{A'T'}}{\overline{T'B'}}$ wenn A, B, T auf einer Geraden liegen.



Parallelentreue:

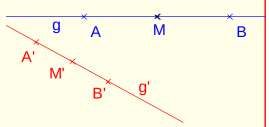
Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet, g || h ⇒ g‘ || h‘

Geraden und Bildgeraden sind parallel: g‘ || g

Aufgaben

Begründen Sie:

Für die Gültigkeit der Teilverhältnistreue einer geradentreuen Abbildung reicht schon aus, dass die Mitte einer jeden Strecke auf die Mitte der Bildstrecke abgebildet wird.



Bijektive, geradentreue Abbildungen sind parallelentreu.

Affine Abbildungen

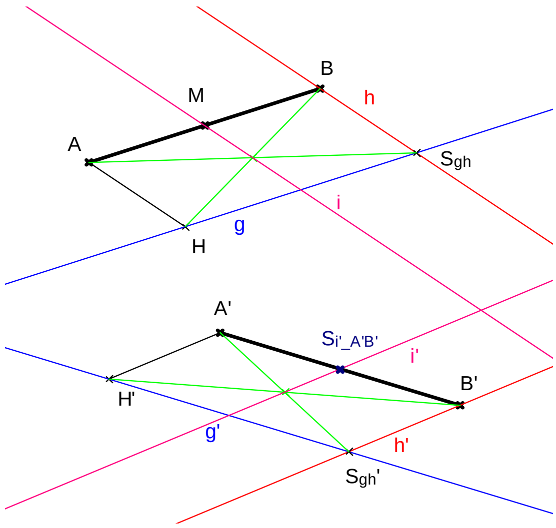
Wir definieren:

Eine Abbildung f: E $\rightarrow$ E heißt **affine Abbildung** $\Leftrightarrow$
f ist bijektiv und geradentreu

Folgerungen:

- Affine Abbildungen sind parallelentreu.
- Achsenaffinitäten sind affine Abbildungen.
- Verkettungen von Achsenaffinitäten sind affine Abbildungen.
- Affine Abbildungen sind teilverhältnistreu (Beweis nächste Seite)

- Affine Abbildungen sind teilverhältnistreu



Begründung:

Eine Strecke AB mit Mittelpunkt M wird auf eine Strecke A‘B‘ abgebildet.
Zu zeigen:
Das Bild von M ist Mittelpunkt von A‘B‘.

Zeichne einen Hilfspunkt $H \notin AB$.
Die Parallelen g zu AB durch H und h zu AH durch H werden abgebildet auf entsprechende Parallelen g‘ und h‘.

Die Diagonalen des Parallelogramms $ABS_{gh}H$ werden abgebildet auf die entsprechenden Diagonalen von $A'B'S_{gh}'H'$.

Die Parallele i zu AH durch den durch den Diagonalenschnittpunkt geht durch M und wird abgebildet auf die Parallele i‘ durch den entsprechenden Diagonalenschnittpunkt von $A'B'S_{gh}'H'$ zu A‘H‘.
Der Schnittpunkt $S_{i'\_A'b'}$ von i‘ mit mit A‘B‘ ist Mittelpunkt von A‘B‘. Da $S_{i'\_A'b'}$ das Bild von M ist folgt die Behauptung.

Aus der Teilverhältnistreue affiner Abbildungen folgt zusammen mit der Geradentreue mit den gleichen Argumenten wie bei Kongruenzabbildungen:

Eine affine Abbildung wird eindeutig festgelegt durch die Abbildung eines einzigen Dreiecks.

Beweisidee übernächste Seite.

Für Kongruenzabbildungen konnte leicht gezeigt werden, dass sich ***jedes Dreieck*** mit ***höchstens 3 Achsenspiegelungen*** auf ***jedes kongruente Dreieck*** abbilden lässt.

Analog können wir beweisen:

Jedes Dreieck kann mit ***höchstens 3 Achsenaffinitäten*** auf ***jedes beliebige*** andere ***Dreieck*** abgebildet werden.

Alle Dreiecke sind zueinander affin!

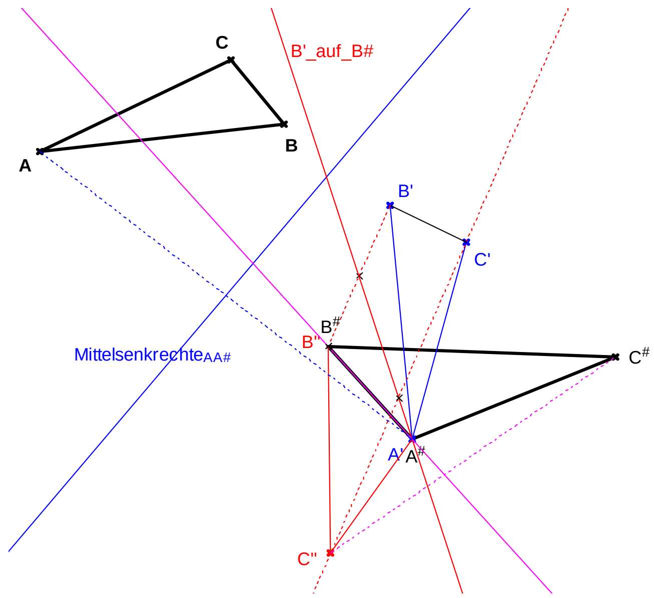
Beweisidee nächste Seite.

Wieder folgert man daraus wie bei der Untersuchung der Kongruenzabbildungen:

Die **affinen Abbildungen** sind genau die **Verkettung von Achsenaffinitäten**.

Jedes Dreieck kann mit ***höchstens 3 Achsenaffinitäten*** auf ***jedes beliebige*** andere ***Dreieck*** abgebildet werden.

Alle Dreiecke sind zueinander affin!

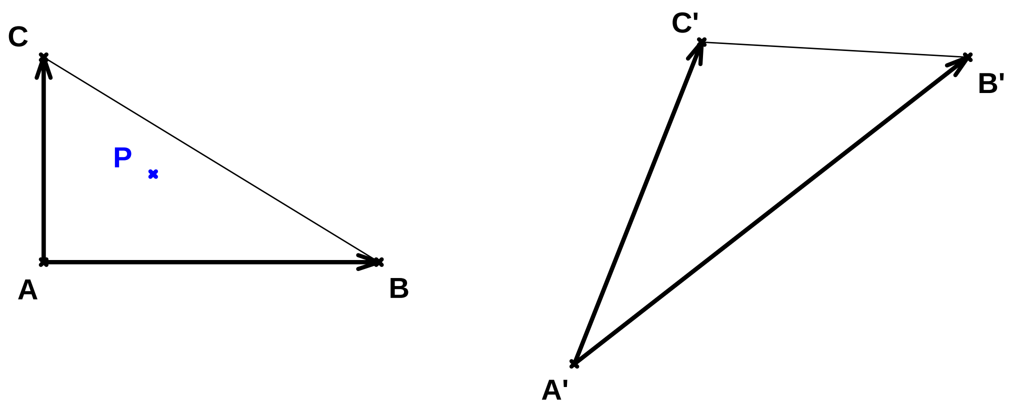


Man kann sogar zeigen, dass jedes Dreieck kann mit *höchstens 2 Achsenaffinitäten* auf *jedes beliebige* andere *Dreieck* abgebildet werden.

Dieser Beweis ist allerdings schwieriger und verwendet Sätze aus der Geometrie, die bisher nicht bewiesen wurden.

Aufgabe:

Das Dreieck ABC wird durch eine affine Abbildung auf das Dreieck A‘B‘C‘ abgebildet. Konstruieren Sie das Bild eines beliebigen Punktes P.

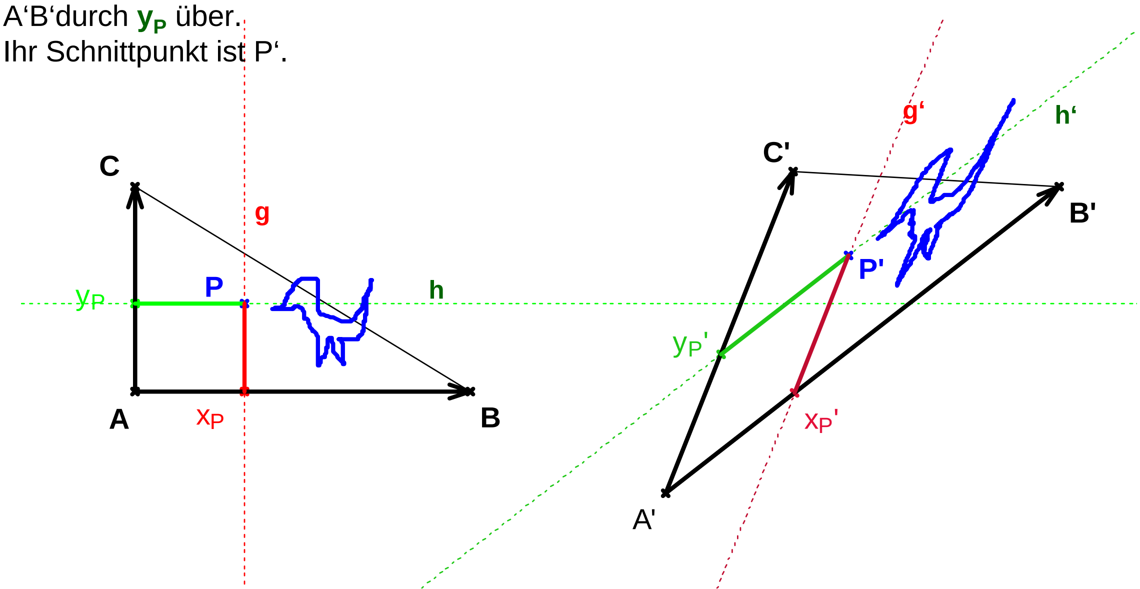


Man kann zwei Seiten des Dreiecks, z.B. AB und AC zur Definition eines „Koordinatensystems“ benutzen:

Durch jeden Punkt P kann man die Parallelen g zu AC und h zu AB zeichnen.
Deren Schnittpunkte mit AB und AC bezeichnet man mit x_P und y_P.

Wegen der Teilverhältnistreue der affinen Abbildung liegen die Bildpunkte x_P‘ von x_P und y_P‘ von y_P auf den verlängerten Seiten des Bilddreiecks A‘B‘C‘ eindeutig fest.

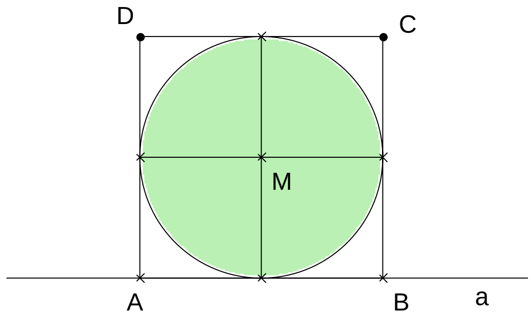
Wegen der Parallelentreue gehen **g** und **h** in Parallelen **g‘** zu A‘C‘ durch x_P bzw. **h‘** zu A‘B‘durch y_P über.
Ihr Schnittpunkt ist P‘.



Aufgabe

Bilden Sie mit der Achsenaffinität mit der Achse a , dem Winkel α und dem Affinitätsfaktor k ab.

a) $\alpha = 90°$, $k = -½$
b) $\alpha = 60°$, $k = -½$

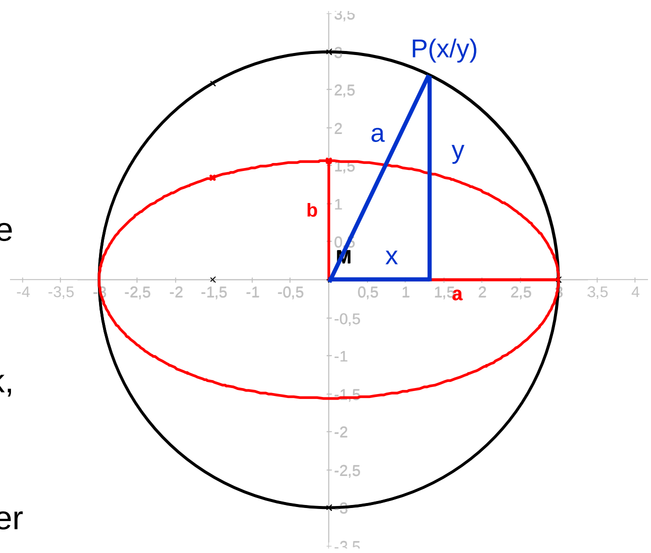


Aufgabe

Ein Kreis mit Mittelpunkt O(0/0) und Radius a hat im kartesischen Koordinatensystem die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Eine **Ellipse** wird als **senkrecht-achsenaffines Bild eines Kreises** definiert. Ist der Radius des Kreises a und verwendet man als Affinitätsachse die x-Achse, dann erhält man eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.



- Bestimmen Sie den Affinitätsfaktor k, mit dem die Ellipse aus dem Kreis hervorgeht.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen a und b.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b und Mittelpunkt O.

Die Scherung: Spezialfall einer affinen Abbildung

Während im Allgemeinen affine Abbildungen nicht flächeninhaltstreu sind, ergibt sich aus den bisher gewonnen Ergebnissen :

Wenn man zwei Achsenaffinitäten mit Affinitätsfaktoren k_1 und k_2 hintereinander ausführt, dann ändert sich der Flächeninhalt von Figuren mit dem Faktor $|k_1 \cdot k_2|$.

Ist $|k_1 \cdot k_2| = 1$, dann müssen bei der Hintereinanderausführung Flächeninhalte erhalten bleiben!

Beispiele für solche Faktoren k_1 und k_2 könnten etwa

$k_1 = -1$, $k_2 = -1$

$k_1 = 2$, $k_2 = ½$

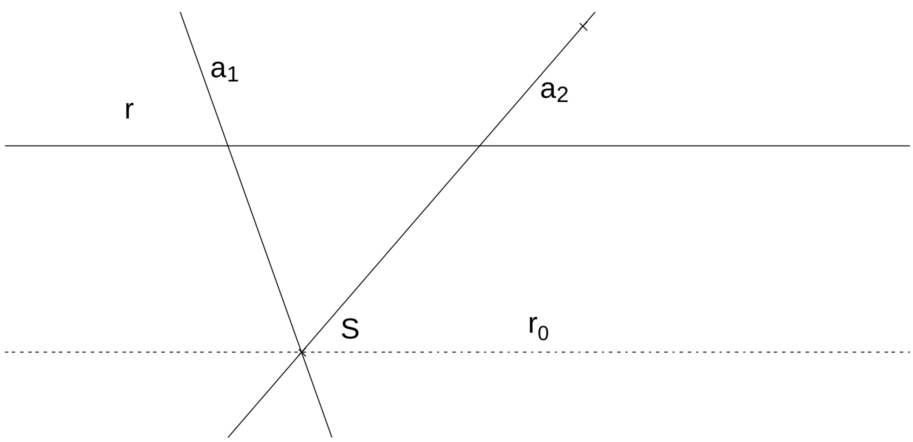
sein.

Es gibt also nichttriviale affine Abbildungen, die Flächeninhalte erhalten.

Ein solcher Typ von Abbildung, die **Scherung**, die in der Elementargeometrie eine große Rolle spielt, soll jetzt untersucht werden.

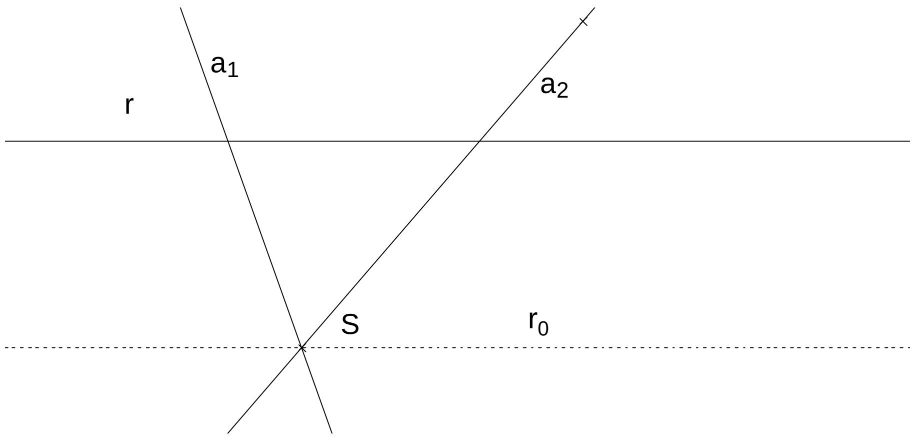
Aufgabe:

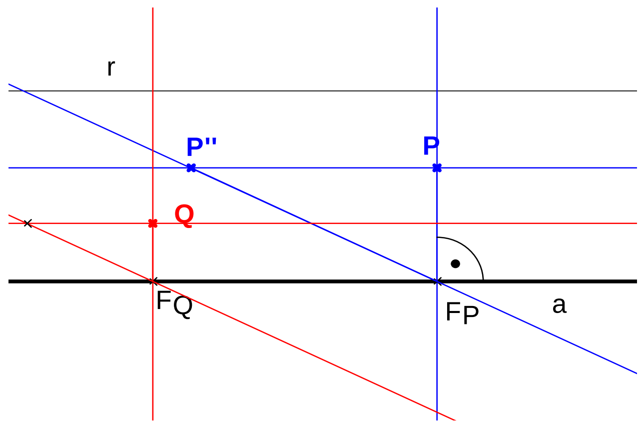
Führen Sie hintereinander zwei Schrägspiegelungen an zwei sich schneidenden Achsen a_1 und a_2 mit der gleichen durch eine Gerade r gegebenen Affinitätsrichtung durch.
Untersuchen Sie insbesondere die Punkte, die auf der durch den Schnittpunkt von a_1 und a_2 verlaufenden Parallelen r_0 zu r liegen.



Beobachtung:
Die **Punkte auf r_0 sind Fixpunkte**.
Die **Verbindungsgeraden PP‘ sind parallel zu r**.
Solche Abbildungen nennt man **Scherungen**.

Zeigen Sie, dass man diese Abbildung auch durch andere Achsenaffinitäten mit der gleichen Affinitätsrichtung darstellen kann.





Durch einen Punkt P und seinen Bildpunkt P‘ ist eine Scherung eindeutig festgelegt.

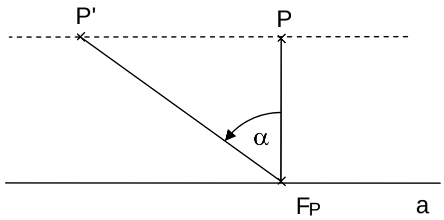
Beschreiben Sie, wie man zu jedem weiteren Punkt Q den Bildpunkt konstruieren kann.

Dies führt zur folgenden einfachen Definition einer Scherung auf der nächsten Seite.

Definition der Scherung

Gegeben sind

- eine Scherungsgerade a
- ein Scherungswinkel α , -90° < α < 90° .



Abbildungsvorschrift für Punkte P:

$P \in a \Rightarrow$ P'=P
$P \notin a \Rightarrow$ P'P || a , $\angle PF_PP' = \alpha$, wobei
F_P der Lotfußpunkt von P auf a ist.

Alternative Definition:

Statt des Winkels α gibt man das Scherungsverhältnis v an:

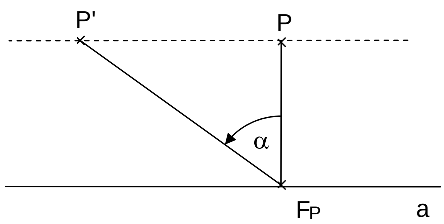
$$v = \tan\alpha = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PF_P}}$$

(mit geeignetem Vorzeichen)

Eigenschaften der Scherung

Fixelemente

- Fixpunkte: Die Punkte auf der Scherungsachse a
- Fixpunktgerade a



Invarianten:

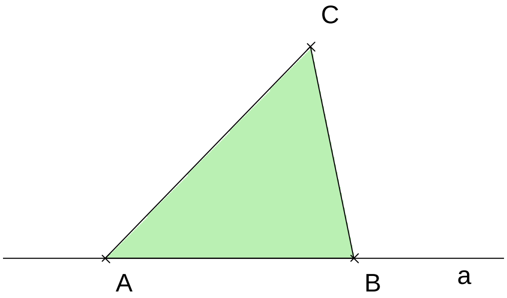
Zu den Invarianten allgemeiner Affinitätsabbildungen kommt hinzu:

- Flächeninhalt bleibt erhalten
- Umlaufsinn bleibt erhalten

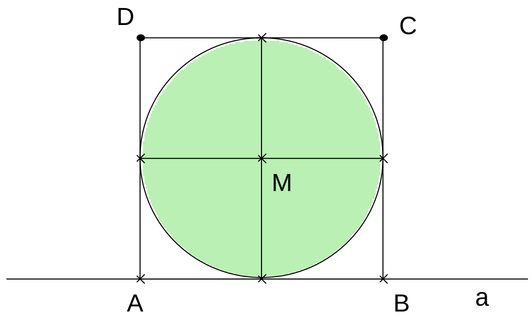
Aufgabe

Scheren Sie mit der Achse a und dem Winkel $\alpha = 60°$.

Scheren Sie mit der Achse a und dem Winkel $\alpha = -30°$.



Scheren Sie mit der Achse a und dem Winkel $\alpha = 60°$.

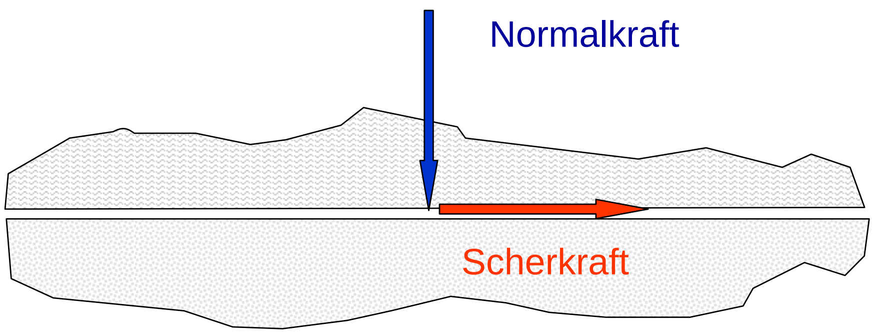


Zum Begriff „Scherung“

In Physik, Technik oder Geographie unterscheidet man an Grenzflächen wirkende Kräfte nach ihrer Richtung.

Normalkraft: Senkrecht zur Grenzfläche

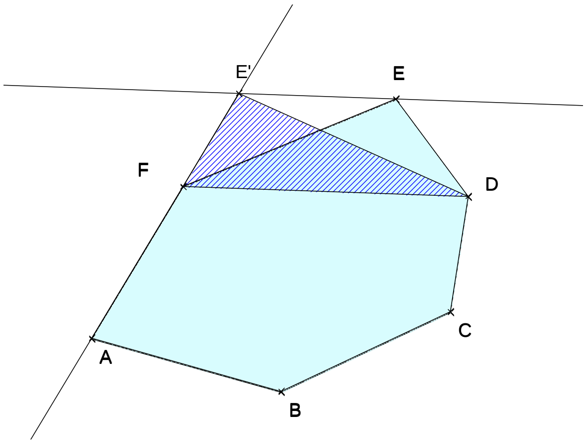
Scherkraft: Parallel zur Grenzfläche



Anwendung 1 der Scherung: Flächeninhaltsgleiche Umwandlung von n-Ecken in Dreiecke

Problem:
Ein beliebiges n-Eck soll mit Zirkel und Lineal in ein flächeninaltsgleiches Dreieck (Rechteck, Quadrat) umgewandelt werden.

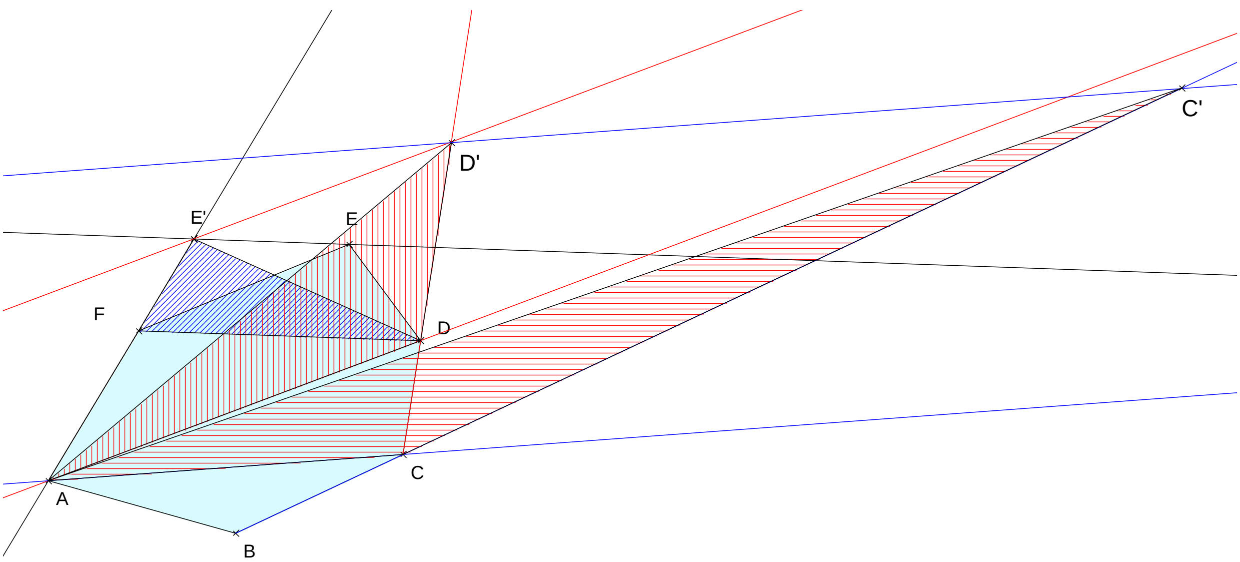
Lösung:
„Ecken nacheinander abscheren“, bis ein Dreieck entstanden ist (s. Skizze).



Das Dreieck kann dann in ein Rechteck und schließlich in ein Quadrat umgewandelt werden (mit dem Kathetensatz oder dem Höhensatz).

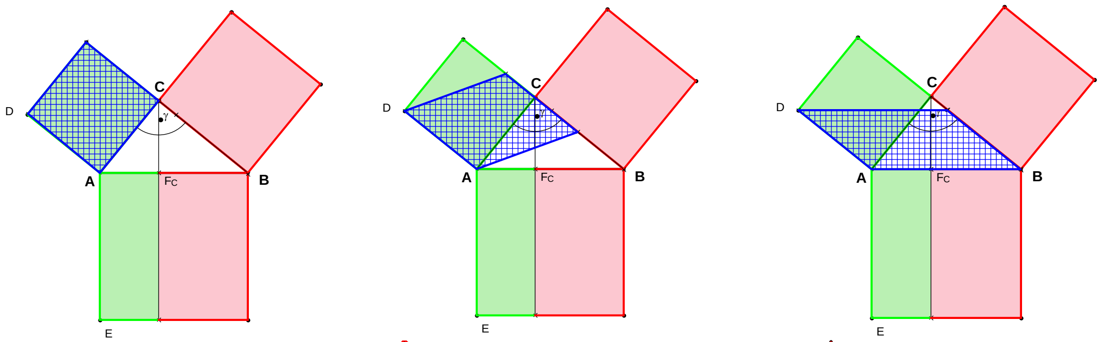
Funktioniert das Verfahren auch, wenn das n-Eck nicht konvex ist, also etwa die Ecke E „einspringt“?

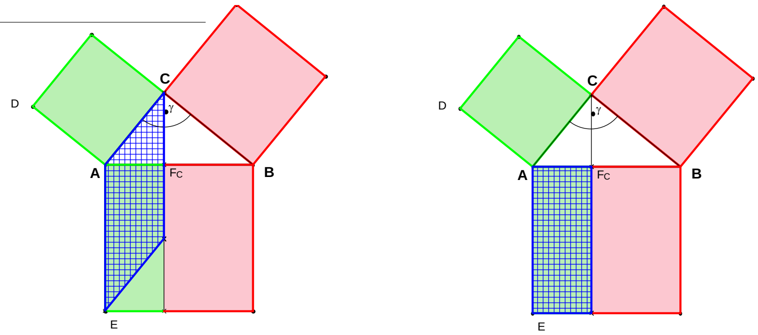
Umwandlung bis zum Dreieck



Anwendung 2 der Scherung:
Beweis des Kathetensatzes

Erklären Sie an Hand der folgenden Bildsequenz einen Beweis für den Kathetensatz.

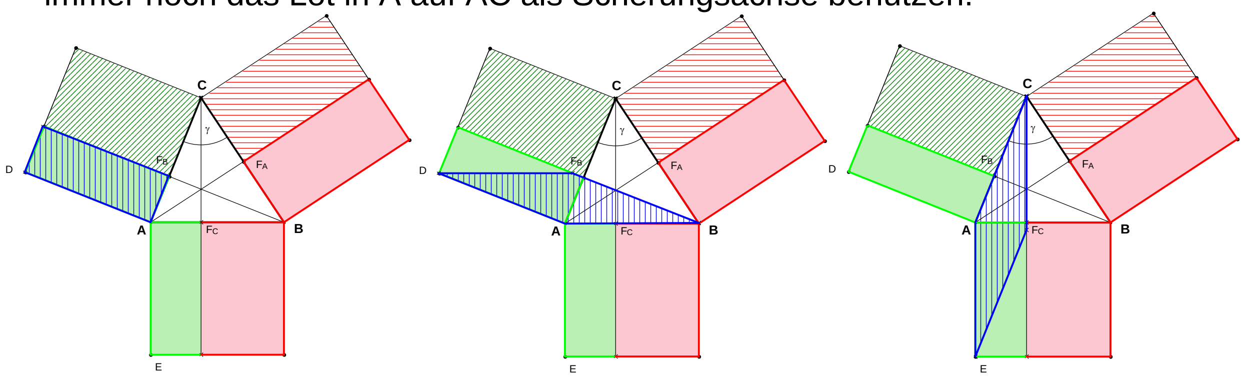




Was geschieht mit diesem Beweis, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist?

Anwendung 3 der Scherung:
Beweis des Cosinussatzes

Wenn das Dreieck ABC bei C keinen rechten Winkel besitzt, dann kann man immer noch das Lot in A auf AC als Scherungsachse benutzen:



Jetzt wird nicht mehr das Quadrat über der Seite AC, sondern das Rechteck aus
- der Projektion der Seite AB auf die Seite AC und
- der Seite AC

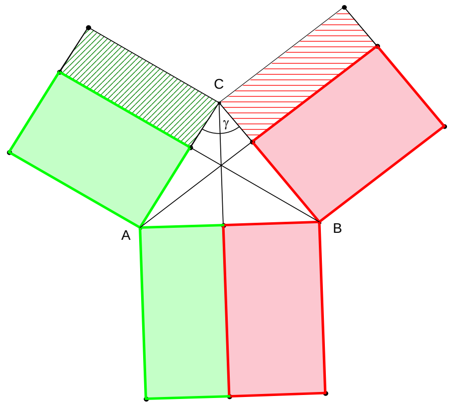
geschert.

Erklären Sie den Beweisgang und formulieren Sie den Zusammenhang in Worten.

Cosinussatz

Für jedes Dreieck gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$



Begründen Sie diesen Sachverhalt für *spitzwinklige* Dreiecke mit Hilfe der vorangehenden Überlegungen.

Für beliebige Dreiecke wird der Beweis im Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen im nächsten Kapitel behandelt.

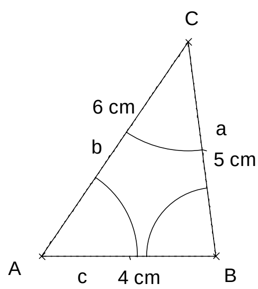
Aufgabe 1

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen a = 5 cm, b = 6 cm und c = 4 cm. **Berechnen** Sie die Winkel in diesem Dreieck.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

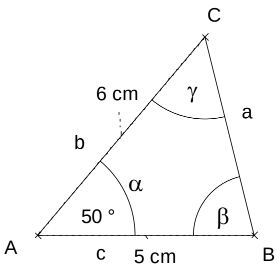
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$



Aufgabe 2

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen b = 6 cm und c = 5 cm und $\alpha = 50°$. **Berechnen** Sie die Seitenlänge a in diesem Dreieck.



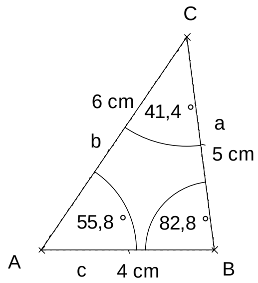
Aufgabe 1

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen a = 5 cm, b = 6 cm und c = 4 cm. **Berechnen** Sie die Winkel in diesem Dreieck.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$



Aufgabe 2

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen b = 6 cm und c = 5 cm und α = 50° . **Berechnen** Sie die Seitenlänge a in diesem Dreieck.