Geometrie II Vertiefung der Geometrie

WS 2005/06

R.Deißler

Literatur

Krauter, Siegfried

Erlebnis Elementargeometrie

Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken
Spektrum Akad.Verlag, Heidelberg 2005

Aus Vorlesungen für Lehramtsstudenten an der PH Ludwigsburg.
Das Buch deckt unsere Geometrie I und II Vorlesung weitgehend ab.
In der Vorlesung werden wir darauf verweisen.

Müller-Philipp, S., Gorski, Hans-Joachim

Leitfaden Geometrie
3.Auflage, Vieweg, Wiesbaden 2005

Das Buch deckt unsere Geometrie I weitgehend ab, enthält aber nur wenige Elemente aus der Geometrie II.
Ein Student meinte im SS 05, er habe in der Geometrie I sehr viel von diesem Buch profitiert.

Weigand, H.-G., Weth, Th.,
Computer im Mathematikunterricht

Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 2002

Kapitel über Geometrie (S.155-228), im Wesentlichen über den Einsatz von DGS im Unterricht.

Lizenz für **DynaGeo-Version ab 2.4** :

Lizenzdatei
PdagogischeHochschule01.dgl
vom “Schwarzen Brett”

Schwarzes_Brett\Mathematik und Informatik\Deissler\Geometrie\Geometrie_SS2005\Euklid+Lizenzdatei-PHFR

laden und in das DynaGeo-Verzeichnis kopieren

DynaGeo – EUKLID Homepage:

http://www.dynageo.de/

Materialien zur Vorlesung

http://home.ph-freiburg.de/deissler/geo2_05-06.htm

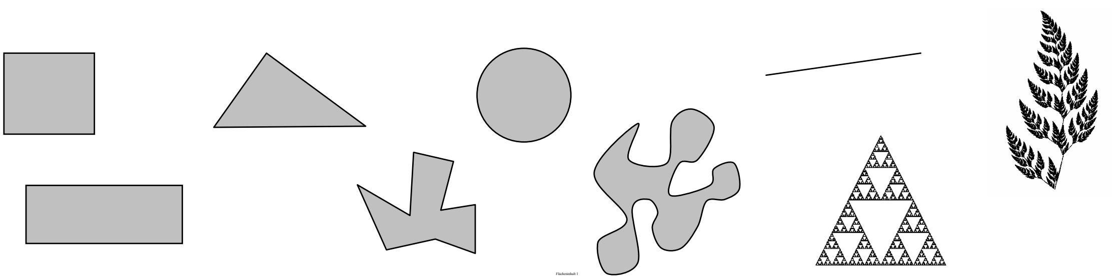
Zugang auch einfach über meine Homepage.

Kapitel 1: Der Flächeninhalt

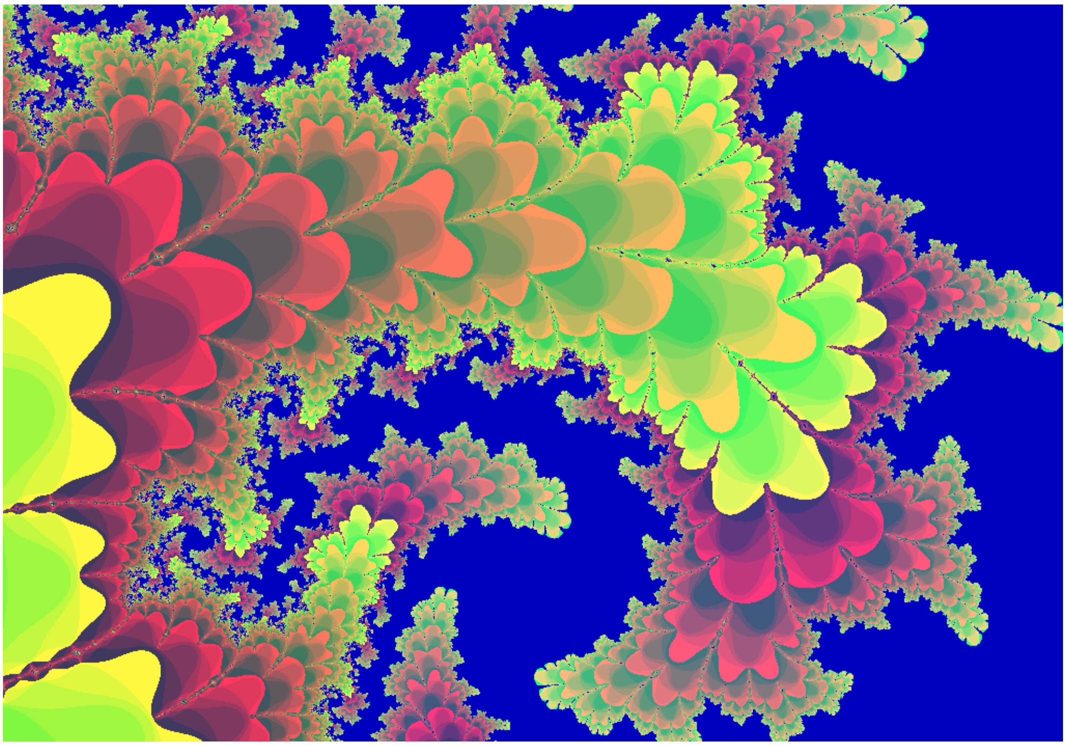
- Flächeninhalt einer Figur soll etwas über deren Größe aussagen
- Flächeninhaltsbegriff intuitiv „irgendwie klar“,
- ab der Grundschule durch Auslegen von Figuren mit Plättchen vorbereitet .
- Abgrenzung gegenüber einem anderen Begriff von Größe, dem Umfang einer Figur.

Definitionen des Flächeninhaltsbegriffs werden immer mehr verfeinert, durch den Messprozess festgelegt.

Welchen Figuren sind Sie bereit, einen „Flächeninhalt“ zuzusprechen? Wie sollte der definiert und gemessen werden?

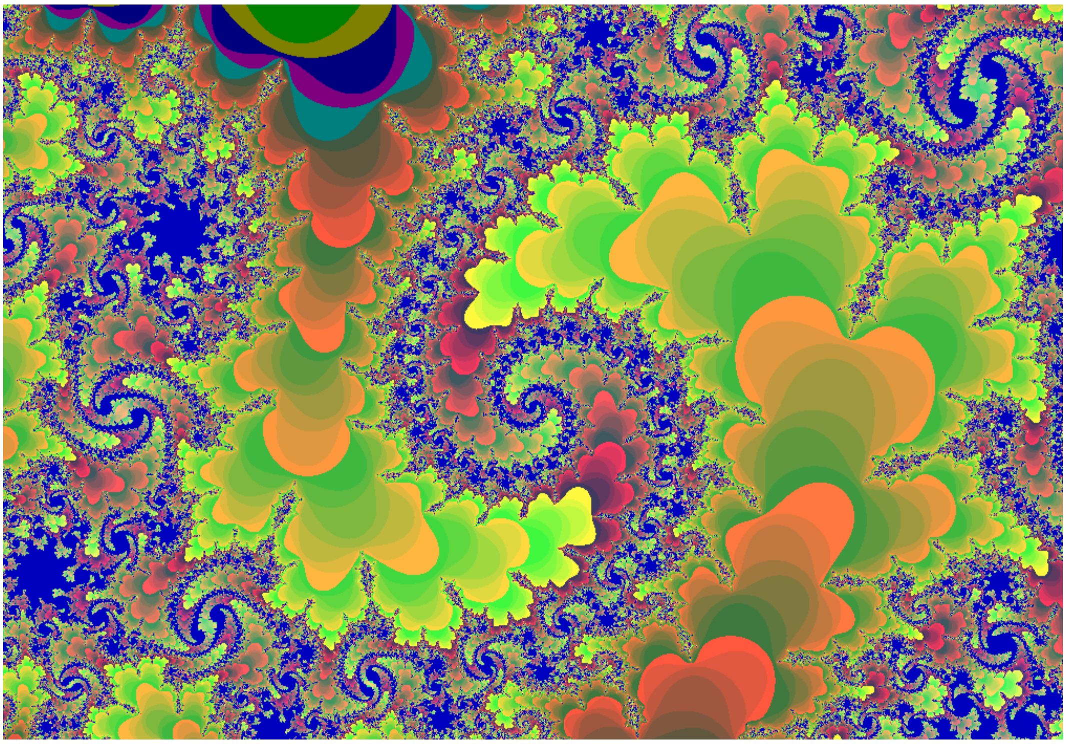


Problematische Figuren: **Fraktale im 19./20. Jahrhundert**



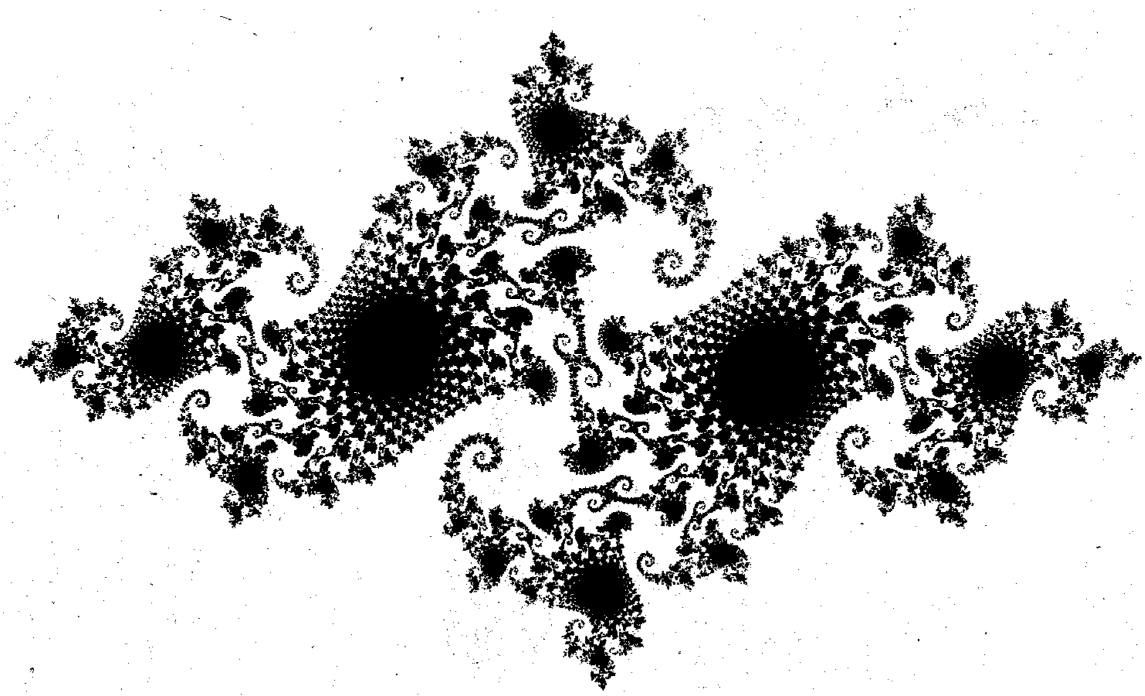
Flächeninhalt der blauen Fläche? Umfang der blauen Fläche?

Problematische Figuren: **Fraktale**



Flächeninhalt der blauen Fläche? Umfang der blauen Fläche?

Problematische Figuren: **Fraktale**



Flächeninhalt? Umfang?

Definition einer Flächeninhaltsfunktion F

F ordnet möglichst vielen Figuren A   (Maß-)Zahl   F(A) zu, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

1.	$F(A) \geq 0$	für alle Figuren A,
2.	$F(A) = F(A')$	A' kongruent zu A,
3.	$F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) + F(A_2)$	A_1 und A_2 haben keine gemeinsamen „inneren" Punkte ,
4.	$F(Q_e) = 1$	Q_e beliebig gewähltes „Einheitsquadrat"

Theorie solcher Messprozesse in der Mathematik → „Maßtheorie", Teilgebiet der Analysis

Hier
- nur die in der Schulmathematik wichtigen Figuren behandelt,
- an einigen Beispielen angewandt ,
- statt den Flächeninhalt zu definieren beschreibt man den Messprozess.

Flächeninhalt als Größe (→ Vorlesung Größenbereiche)

- Im Alltagsgebrauch keine Figuren mit Flächeninhalt 0 akzeptiert (z.B. einzelne Punkte, Strecken)
- Ohne diese Flächen bilden die Flächeninhalte einen so genannten „Größenbereich“ (→ Vorlesung über Größenbereiche).

In einem Größenbereich G sind Addition **+** und Kleiner-Relation **<** erklärt:

1.	$a + b = b + a$	Kommutativgesetz
2.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz
3.	entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$	Trichotomie
4.	$a < b \Leftrightarrow$ es gibt ein $c \in G$ mit $a + c = b$	eingeschränktes Lösbarkeitsgesetz

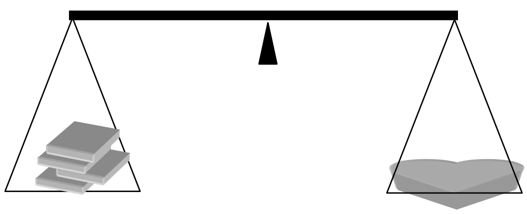
Der Messprozess für die Schule

Physikalisches Modell:

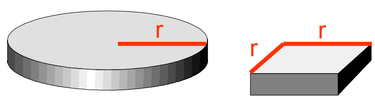
- Figuren“ sind aus homogenem Material gleicher Dicke ausgeschnitten.
- Figuren haben gleichen Flächeninhalt wenn sie gleiches Gewicht haben.

Flächeninhalt von Figuren experimentell vergleichen:

- Figuren aus geeignetem Material herstellen und Gewicht vergleichen.
- Flächenmaßzahlen zuordnen durch Vergleichen mit dem Gewicht von Einheitsquadraten oder einem anderen passenden Quadrat.



- Für die Schule eventuell: Flächeninhalt der Kreisfläche mit einem „Radiusquadrat“ vergleichen. Wie viel mal so schwer ist die Kreisfläche?



Definition einer Flächeninhaltsfunktion F

F ordnet möglichst vielen Figuren A (Maß-)Zahl F(A), so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

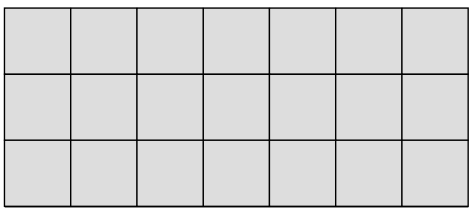
1.	$F(A) \geq 0$	für alle Figuren A,
2.	$F(A) = F(A')$	A' kongruent zu A,
3.	$F(A_1 \cup A_2) = F(A_1)+F(A_2)$	A_1 und A_2 haben keine gemeinsamen „inneren" Punkte ,
4.	$F(Q_e) = 1$	Q_e beliebig gewähltes „Einheitsquadrat"

Folgerungen aus der Definition

- F(A)=0 für alle „Linien", d.h. alle Mengen ohne innere Punkte
- Für **Rechtecksflächen** A mit den Maßzahlen a und b Längeneinheiten ist **F(A)=a·b**

Beweisskizze a=7 LE , b=3 LE

7 Quadrate in einem Streifen



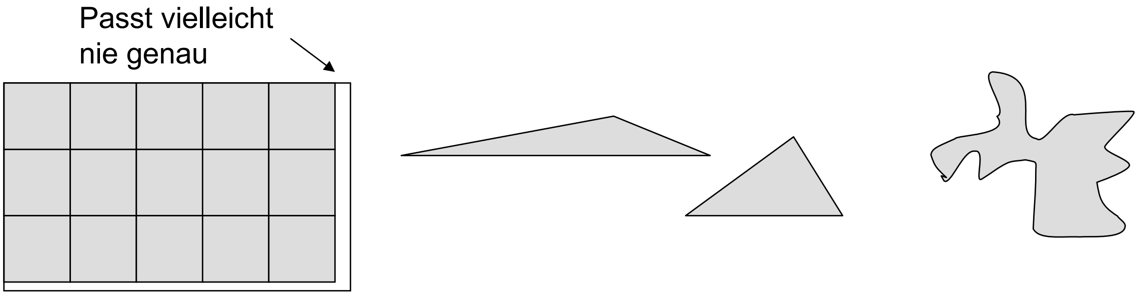
3 Streifen

b

a

$F(A) = 3 \cdot 7\ F(Q_e) = 3 \cdot 7$ FE

- Probleme beim Messprozesses durch Auslegen mit Quadraten:
  - Problematisch bei Rechtecken mit Seiten, die zu denen des Einheitsquadrates inkommensurabel sind,
  - Vergleich beliebiger Dreiecke,
  - krummlinig begrenzte Figuren.



Begriffe **„Zerlegungsgleichheit“** und “ **Ergänzungsgleichheit**“ von Figuren.
Grenzprozesse durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere ($\Rightarrow$ z.B. Kreisfläche).

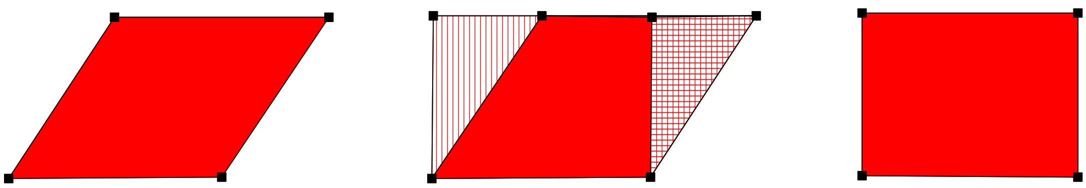
Zerlegungsgleich - ergänzungsgleich

Definition
Zwei Figuren sind **zerlegungsgleich** wenn sie sich in paarweise kongruente Figuren zerlegen lassen.

- **Zerlegungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

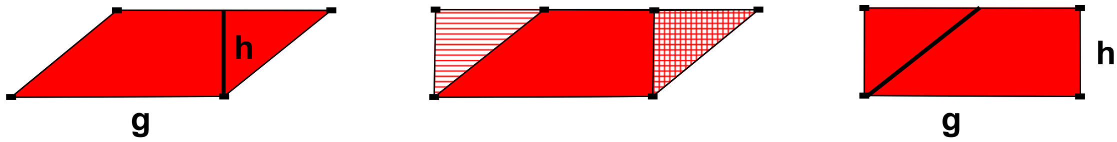
Folgt sofort aus den Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion

Beispiel: Flächeninhalt des Parallelogramms



Das Parallelogramm und das Rechteck sind zerlegungsgleich.

Flächeninhalt des Parallelogramms

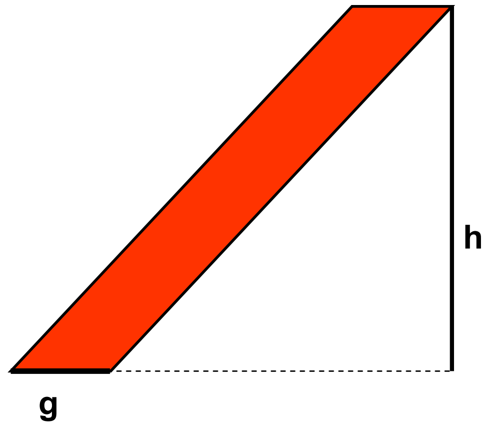


Diese Zerlegung zeigt: Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist das Produkt aus der Grundseite g und der Höhe h : $A = g \cdot h$.

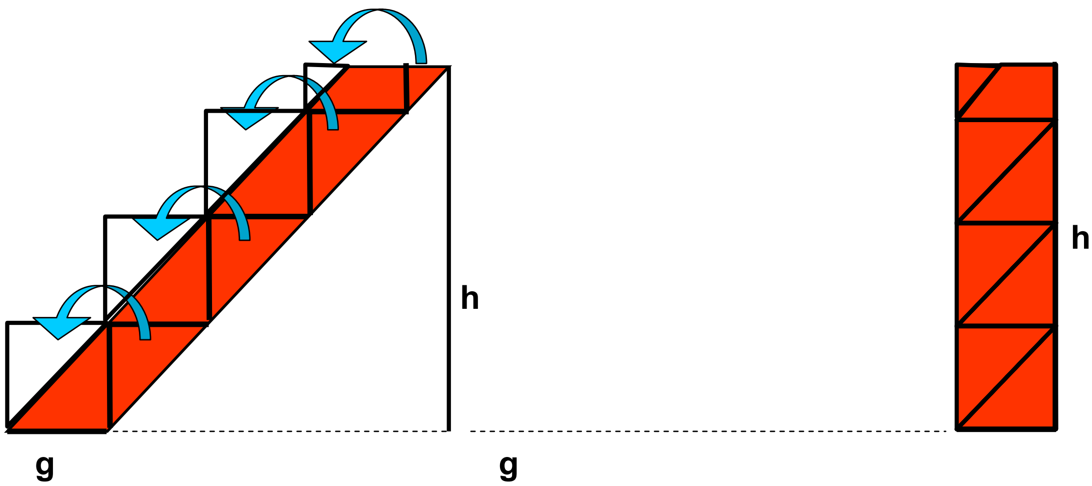
Aufgabe

Gilt dies auch für das nebenstehende Parallelogramm?

Ist dieses auch zerlegungsgleich zu einem Rechteck mit den Seiten g und h?



Flächeninhalt des Parallelogramms



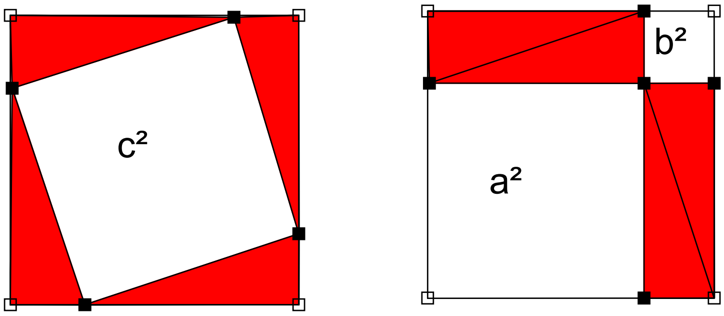
Das Parallelogramm ist zerlegungsgleich zu dem Rechteck mit den Seiten g und h. Auch hier is $A = g \cdot h$

Definition
Zwei Figuren sind **ergänzungsgleich** wenn sie durch Ergänzung mit kongruenten Figuren zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden können.

- **Ergänzungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

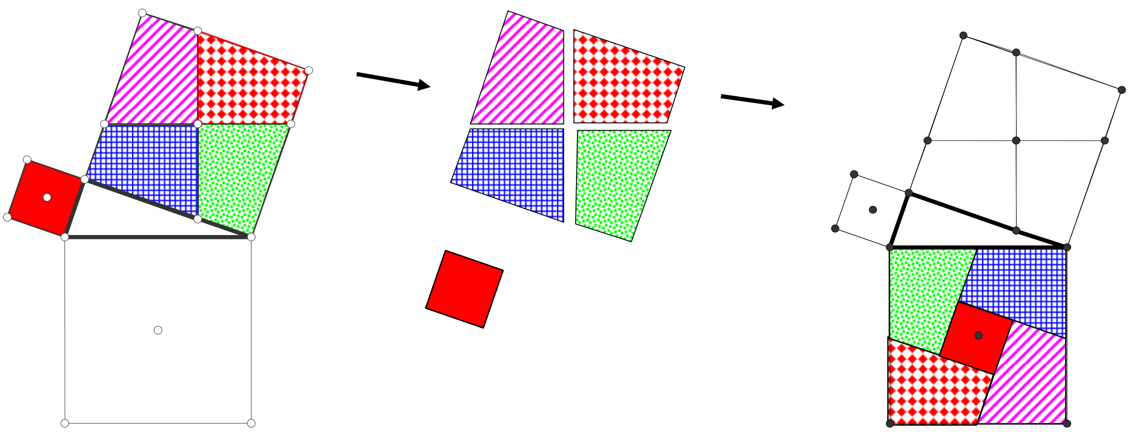
Folgt sofort aus den Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion

Beispiel: Pythagoras-Legebeweis

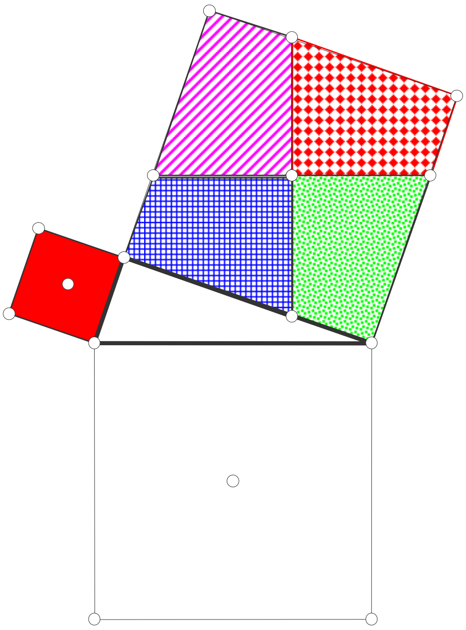


Die weißen Flächen sind ergänzungsgleich, denn sie können durch Ergänzung mit den vier paarweise kongruenten Dreiecken zu kongruenten Figuren (hier den Quadraten) ergänzt werden.

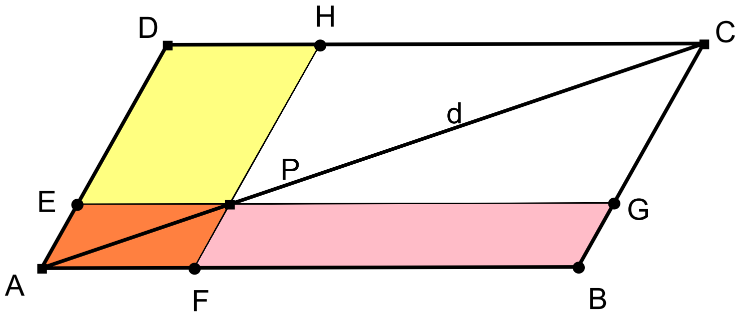
Pythagoras-Zerlegungsbeweis



Für die Schule als Puzzle geeignet, wenn man die Einteilung des Kathetenquadrats vorgibt.



Satz vom Ergänzungsparallelogramm



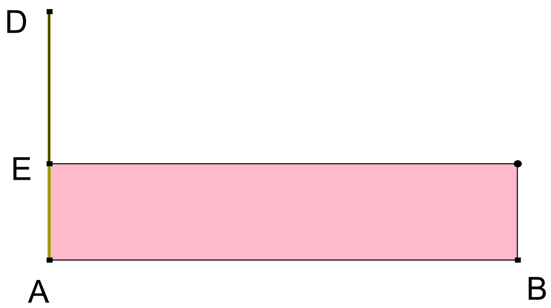
Der Satz
Gegeben ist das Parallelogramm ABCD und ein Punkt P auf der Diagonalen d=AC.
Durch P sind Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezeichnet.
Dadurch entstehen zwei Parallelogramme EPHD (gelb) und FBGP (hellrot).

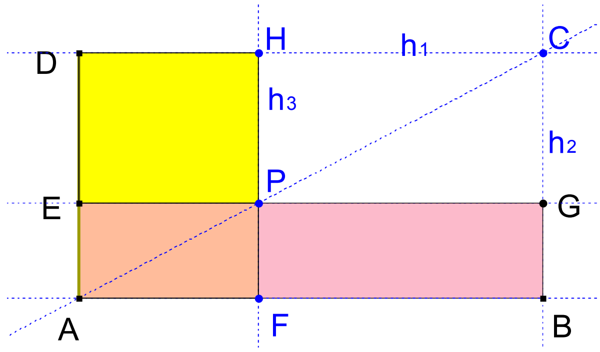
- Zeigen Sie, dass diese Parallelogramme den gleichen Flächeninhalt besitzen.
- Zeigen Sie, dass auch die Parallelogramme AFHD und ABGE den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Anwendung

Gegeben ist ein Rechteck ABGE (hellrot).

Es soll ein dazu flächengleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seite konstruiert werden.



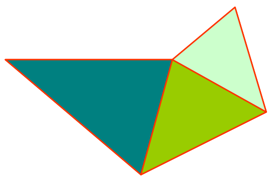


Konstruktion:
h_1 Parallele durch zu AB durch D,
h_2 Parallele durch zu AD durch B,
C Schnittpunkt von h_1 und h_2,
P Schnittpunkt von AC mit GE,
h_3 Parallele zu AD durch P,
H Schnittpunkt von h_3 mit DC.
F Schnittpunkt von h_3 mit AB.
AFHD ist das gesuchte Rechteck.

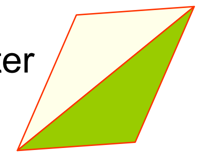
Übersicht über Methoden zur **Bestimmung und zum Vergleich** von **Flächeninhalten**

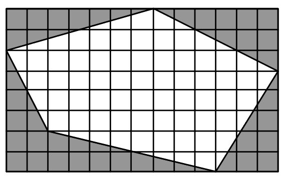
- Figur zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich zu einer Figur mit schon bekanntem Flächeninhalt (s.vorangehende Beispiele)

- Figur als (disjunkte) Vereinigung bekannter Flächen darstellen



- Bekannte Figur als (disjunkte) Vereinigung bekannter und unbekannter Flächen darstellen

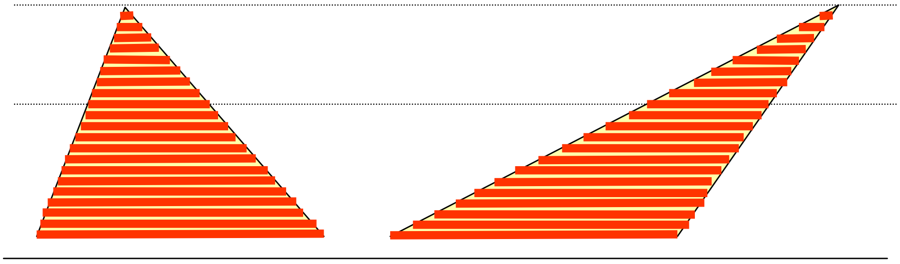




- **Scherungsbeweise**

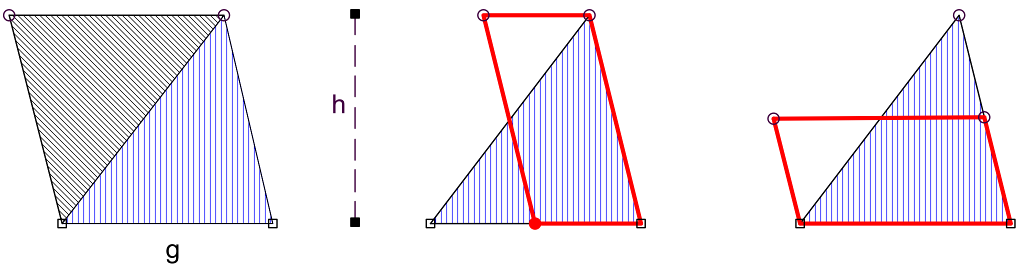
- **Grenzprozesse** durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere (⇒ z.B. Kreisfläche, wird noch genau behandelt).

Satz von Cavalieri in der Ebene
Kann man eine Gerade g so zeichnen, dass jede Parallele zu dieser Geraden aus zwei Flächen stets zueinander gleichlange Strecken ausschneidet, so haben die Flächen denselben Inhalt**.**



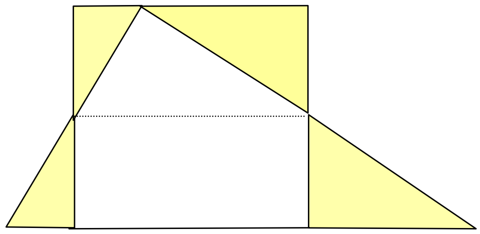
→ Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe haben den gleichen Flächeninhalt (Strahlensatz).

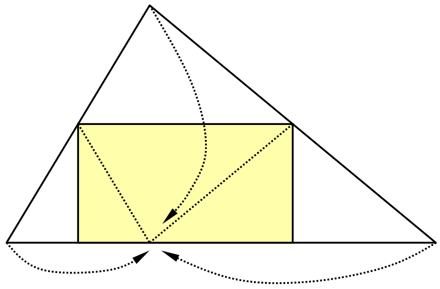
Dreiecksformeln und ihre geometrische Deutung



A= $\frac{gh}{2}$ A= $\frac{g}{2}h$ A= $g\,\frac{h}{2}$

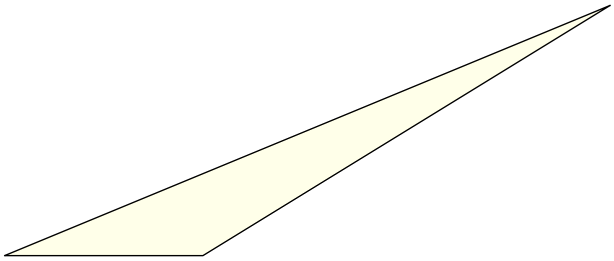
Verschiedene Herleitungen führen zunächst zu verschiedenen Formen der Flächeninhaltsformeln → Termumformungen





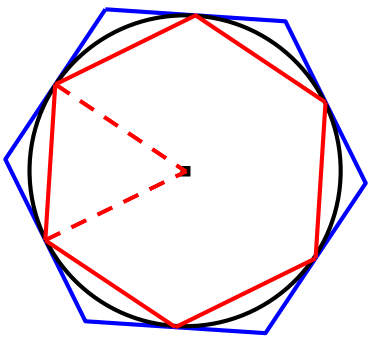
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \; \frac{1}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Versuchen Sie, diese beiden Beweise auch für nicht spitzwinklige Dreiecke durchzuführen (Aufgabenblatt)

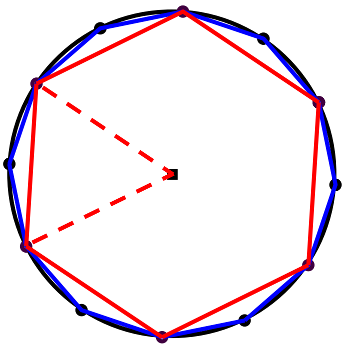


Grenzprozesse

Beispiel: Flächeninhalt des Kreises



Ein- und umbeschriebenes Sechseck

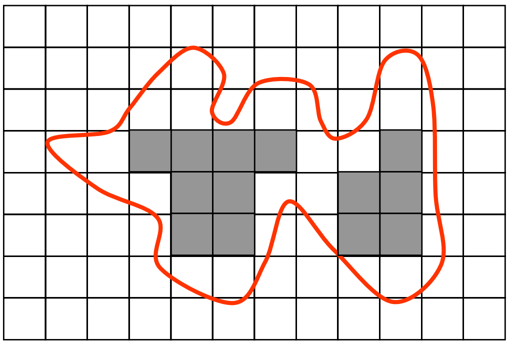


Einbeschriebenes Sechseck und Zwölfeck

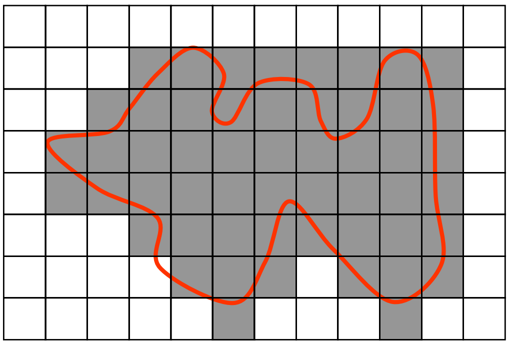
Annäherung durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke.
Für $n \to \infty$ nähern sich deren Flächeninhalte von unten bzw. oben einem gemeinsamen Wert.
Diesen Wert **definiert** man als den Flächeninhalt des Kreises.

Ganz beliebige Figur

Flächeninhalt A ?



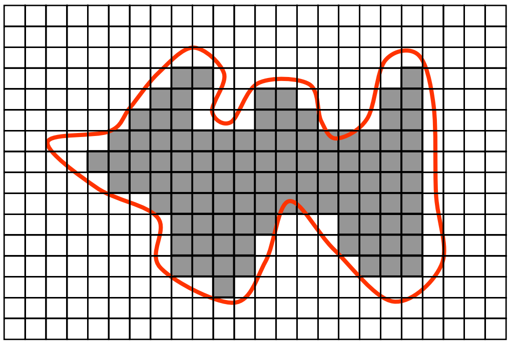
$I_1 \leq A \leq U_1$



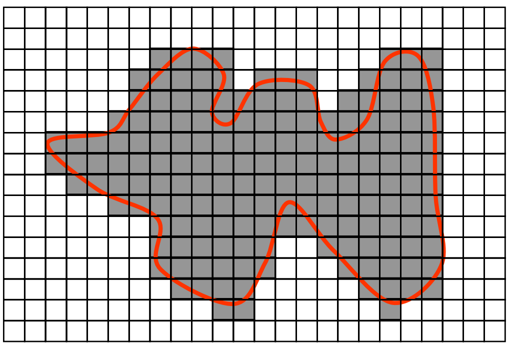
Gitterpapier drüber legen ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren
$\rightarrow I_1$

Kästchen außen zählen und addieren
$\rightarrow U_1$



$I_1 \leq I_2 \leq A \leq U_2 \leq U_1$

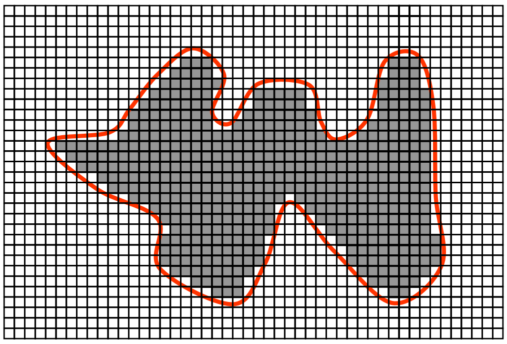


Kästchenlänge halbieren ...

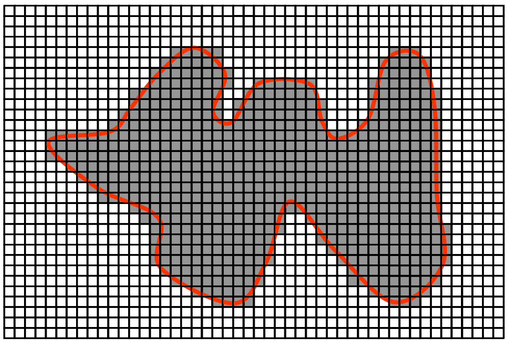
Kästchen im Inneren zählen und addieren
$\rightarrow I_2$

Kästchen außen zählen und addieren
$\rightarrow U_2$

Falls I_n und U_n sich dem gleichen Wert A nähern, dann ist das der Flächeninhalt der Figur.



$I_1 \leq I_2 \leq I_4 \leq A \leq U_4 \leq U_2 \leq U_1$



Intervallschachtelung für A

Kästchenlänge nochmals halbieren ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren
→ I_4

Kästchen außen zählen und addieren
→ U_4

Eine Frage, die in der Vorlesung Geometrie I untersucht wurde und die historisch große Bedeutung hatte:

Welche Flächen lassen sich alleine mit Zirkel und Lineal in Quadrate umwandeln?

„Quadraturproblem“

Insbesondere die „Quadratur des Kreises“

Historische Bemerkungen

Im Altertum war es ein zentrales Anliegen der Geometrie, alle Konstruktionen exakt nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchzuführen.

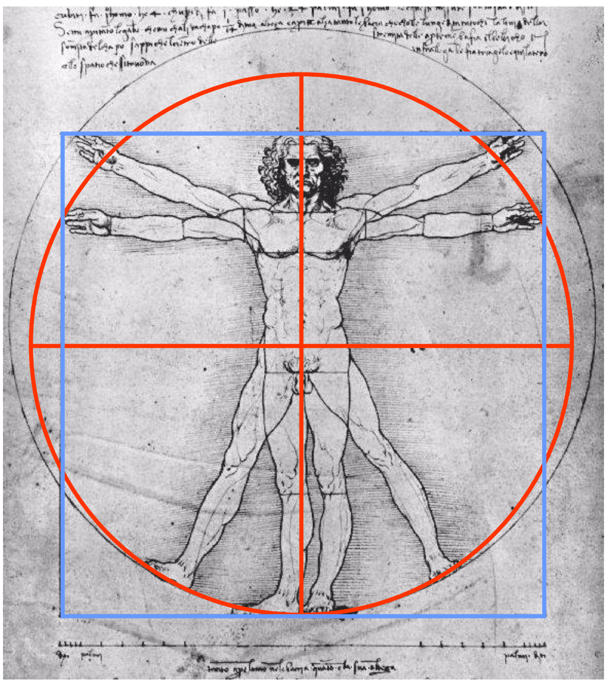
Dieses Anliegen hat die geometrische Forschung über 2000 Jahre lang vorangetrieben, und die endgültigen Antworten auf die offenen Fragen sind nur etwas über 100 Jahre alt.

Der Grund für die Einschränkung der Hilfsmittel war philosophischer Natur, Näherungen für die in Frage stehenden Probleme waren seit alters her bekannt.

Hier sollen einige der klassischen Probleme kurz vorgestellt werden.

Quadratur des Kreises: Ein altes griechisches Problem

Konstruiere mit Zirkel und Lineal zu einem Kreis mit gegebenen Radius ein flächengleiches Quadrat.

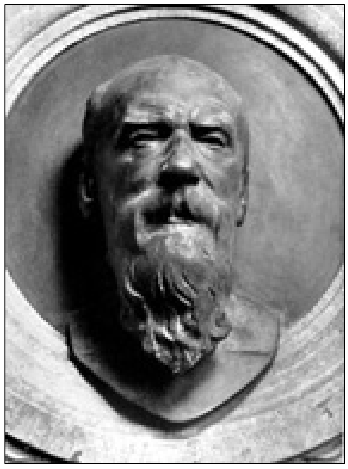


Leonardo da Vinci:
Studie zu den Proportionen am „idealen“ menschlichen Körper.
Quadraturproblem implizit dargestellt ?

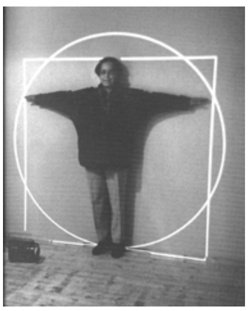
Kreis durch die Fingerspitzen der waagerecht ausgestreckten Arme und durch den zentralen großen Zeh.

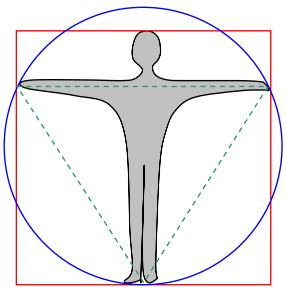
Fast gleicher Flächeninhalt wie das Quadrat aus Körperhöhe und Breite der ausgestreckten Arme.

Beweis für die Unmöglichkeit der „Quadratur des Kreises“ erst um 1870 gelungen (F.Lindemann)!

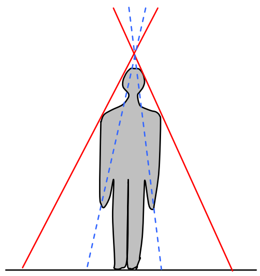


Phänomena“ 1984 in Zürich
Esoterischer Autor : Der Mensch ist die Lösung des Unlösbaren!

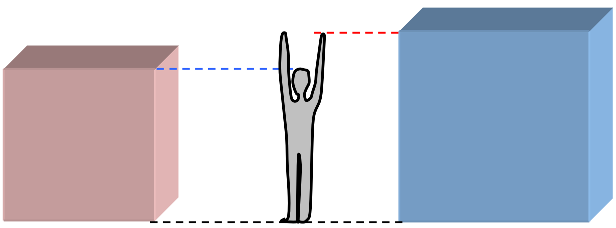




Quadratur des Kreises



Winkeldrittelung



Würfelverdoppelung
(Delisches Problem)

Flächeninhalt von Polygonen mit Zirkel und Lineal

Problem 1

Kann man ein Vieleck (Polygon) mit Zirkel und Lineal alleine umwandeln in

- ein flächeninhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite eine Einheitsstrecke ist,
- ein flächeninhaltsgleiches Quadrat?

Problem 2

Kann man diese Umwandlung auch durch Zerschneiden und Zusammenlegen erreichen?

Klar: Kann man Teil 1 von Problem 1 lösen, dann ist Teil 2 sofort mit Hilfe des Kathetensatzes oder des Höhensatzes gelöst.

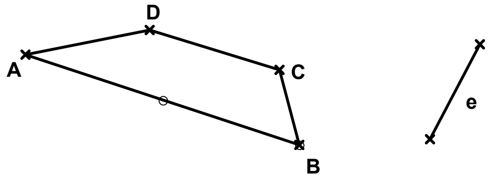
Werden diese Fragen positiv beantwortet, dann kann man alleine mit Hilfe von Zirkel und Lineal bzw. durch Zerschneiden den Flächeninhalt beliebiger Polygone vergleichen:

Entweder

- man wandelt beide in Rechtecke mit einer Einheitsseite um und vergleicht deren andere Seitenlängen,
- oder man verwandelt beide in jeweils flächengleiche Quadrate und vergleicht diese Quadrate.

Aufgabe:

Wandeln sie das folgende Viereck in ein flächengleiches Rechteck mit der Strecke e als einer Seite um.



Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Der Problemkreis kann sowohl von der Umfangsberechnung als auch von der Flächenberechnung aus erschlossen werden.

Analog dazu kann man auch später bei der Behandlung der Kugel entweder über die Oberflächenberechnung oder die Volumenberechnung einsteigen.

Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Bei diesen Berechnungen spielt die Konstanz des Quotienten gewisser Größen eine Rolle.

Welche der Folgenden Quotienten sind konstant?

Warum ist dies so?

Bezeichnungen:

A Flächeninhalt des Kreises, U Umfang des Kreises

r Radius des Kreises, d Durchmesser des Kreises

A/r A/r^2 A/d A/d^2

U/r U/r^2 U/d^2 U/d

Radgroesseneinstellung

Drücken Sie den Auto-Clear Knopf auf der Rückseite des Gerätes. Zur Einstellung des Computers auf den richtigen Raddurchmesser muss ein Faktor ermittelt werden (vierstellige Zahl), indem der Radius des Rades in mm mit 6.2832 multipliziert wird.
Faktor eingeben durch drücken der linken Taste für die Stelle und der rechten Taste für die gewünschte Ziffer. Diesen Vorgang wiederholen, bis alle vier Ziffern eingegeben worden sind.

R: 2058

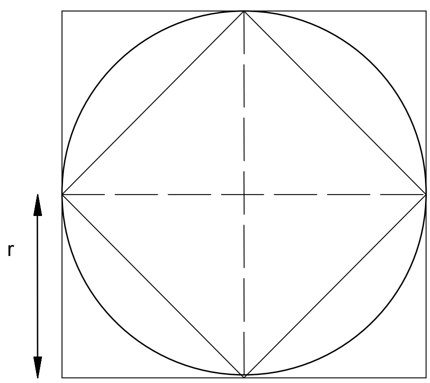
Benutzen Sie diese Tabelle als Hilfestellung fuer Raddurchmesser und Radumfang.

Tabelle für einige Reifengroessen

d			c
20"		------	1596
22"		------	1759
24"		------	1916
26"	(650A)	------	2073
26.5"	(Tubular)	------	2117
26.6"	**(700x25C)**	**------**	**2124**
26.8"	(700x28C)	------	2136
27"	(700x32C)	------	2155
28"	(700B)	------	2237
(w/tire)			
ATB 24"x1.75		------	1888
ATB 26"x1.4		------	1995
ATB 26"x1.5		------	2030
ATB 26"x1.75		------	2045
ATB 26"x2	(650B)	------	2099
27"x1		------	2136
27"x1 1/4		------	2155

Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Schätzen Sie den Kreisumfang und den Flächeninhalt des Kreises mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen Quadraten ab.



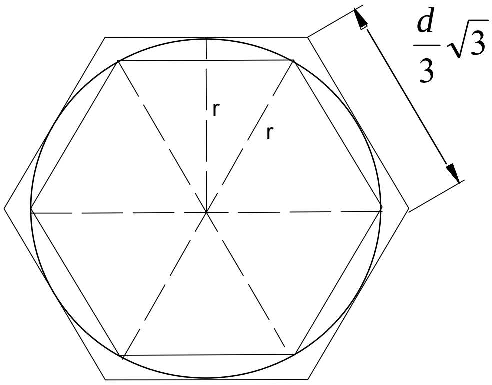
$$4\sqrt{2}\,r < U_O < 8\,r$$

$$2{,}8\,d < U_O < 4\,d$$

$$2\,r^2 < A_O < 4\,r^2$$

Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Schätzen Sie den Kreisumfang und den Flächeninhalt des Kreises mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen Sechsecken ab.



Umfang:

$6\,r < U_O < 4\sqrt{3}\,r$

$3\,d < U_O < 3{,}47\,d$

Flächeninhalt:

$6\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 < A_O < 2\sqrt{3}\,r^2$

Kreisumfang

Bestimmen Sie experimentell mit Hilfe einer CD das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises.

Welchen prozentualen Fehler haben Sie dabei begangen?

Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

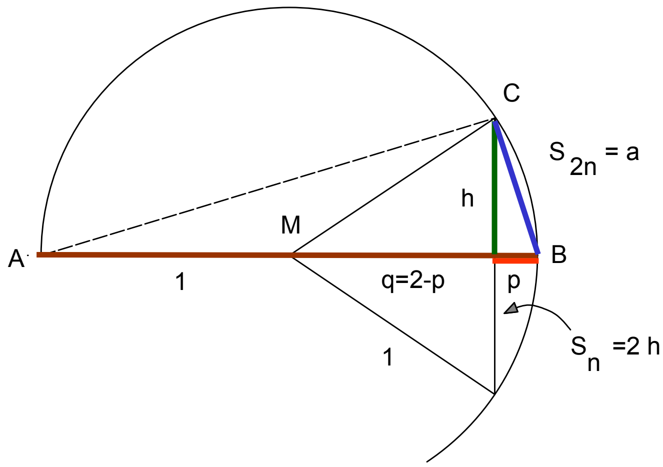
Kreisradius r = 1 LE.

Berechnen Sie, wie sich die Seitenlänge S_{2n} des einbeschriebenen regelmäßigen 2n-Ecks aus der Seitenlänge S_n des n-Ecks ergibt.

Die Seitenlänge des einbeschriebenen 6-Ecks ist 1 LE.

Damit kann man die Seitenlänge des 12-, 24, 48-Ecks berechnen.

Diese Formeln können mit dem Taschenrechner oder mit Hilfe eines Tabellenkalkulations-programms ausgewertet werden, um immer genauere Werte für π zu erhalten.



Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

Es ist $U_n = n \cdot S_n$, $\pi \approx \frac{U_n}{2} = \frac{n}{2} S_n$ r = 1 LE. S_{2n} = ?

Δ ABC ist rechtwinklig (Thalessatz)

Höhensatz für ΔABC:

(1) $h^2 = (2-p)p$

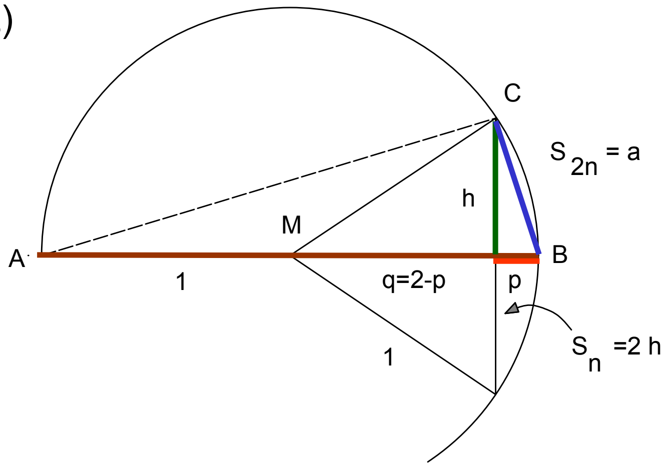
Kathetensatz für Δ ABC:

(2) $a^2 = 2p$

(1) nach p (<1) aufgelöst:

(3) $p = 1 - \sqrt{1-h^2}$

(3) in (2) eingesetzt: $a = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-h^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4-4h^2}}$



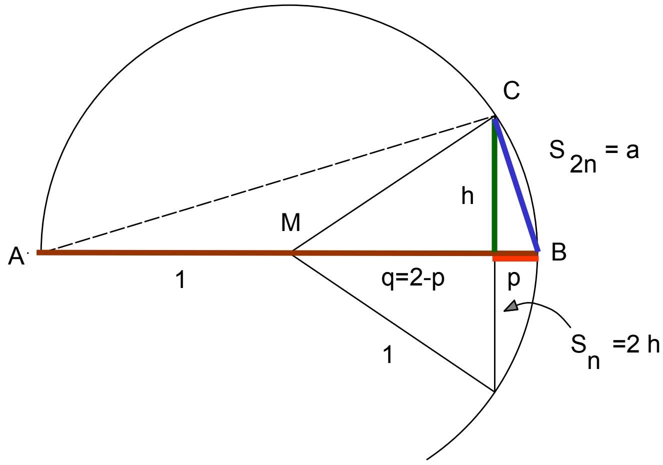
Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

(3) in (2) eingesetzt: $a = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4h^2}}$

Damit erhält man:

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^{\,2}}}$$

$$= \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^{\,2}}}}$$



Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

Berechnungsschema in Excel $S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^{\,2}}} = \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^{\,2}}}}$

n	Sn	Un	Un/2
6	1,000000	6,000000	3,000000
12	0,517638	6,211657	3,105829
24	0,261052	6,265257	3,132629
48	0,130806	6,278700	3,139350
96	0,065438	6,282064	3,141032
192	0,032723	6,282905	3,141452
384	0,016362	6,283115	3,141558
768	0,008181	6,283168	3,141584
1536	0,004091	6,283181	3,141590
3072	0,002045	6,283184	3,141592

n	Sn	Un	Un/2
6	1	=(A2*B2)	=(C2/2)
=(A2*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B2*B2)))	=(A3*B3)	=(C3/2)
=(A3*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B3*B3)))	=(A4*B4)	=(C4/2)
=(A4*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B4*B4)))	=(A5*B5)	=(C5/2)
=(A5*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B5*B5)))	=(A6*B6)	=(C6/2)
=(A6*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B6*B6)))	=(A7*B7)	=(C7/2)
=(A7*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B7*B7)))	=(A8*B8)	=(C8/2)
=(A8*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B8*B8)))	=(A9*B9)	=(C9/2)
=(A9*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B9*B9)))	=(A10*B10)	=(C10/2)
=(A10*2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B10*B10)))	=(A11*B11)	=(C11/2)

Demo

Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

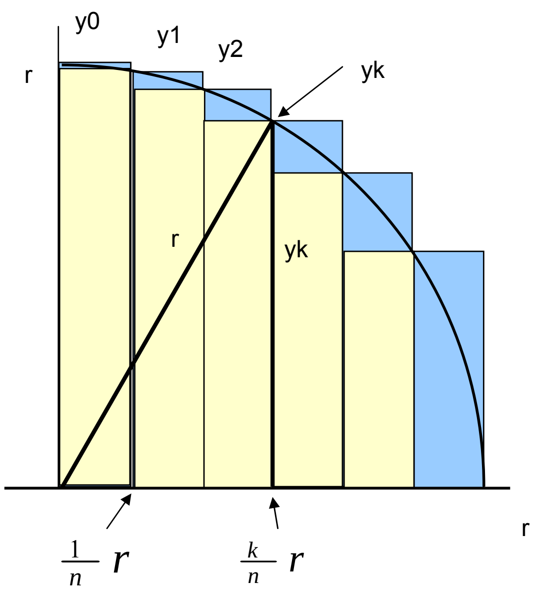
Berechnungsschema in Excel $$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^{\,2}}} = \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^{\,2}}}}$$

Führen Sie die Berechnung von Pi in Excel mit der ersten der beiden Formeln für 30 Seitenverdopplungen durch und beobachten Sie, wie sich die Genauigkeit der Annäherung von Pi verändert.

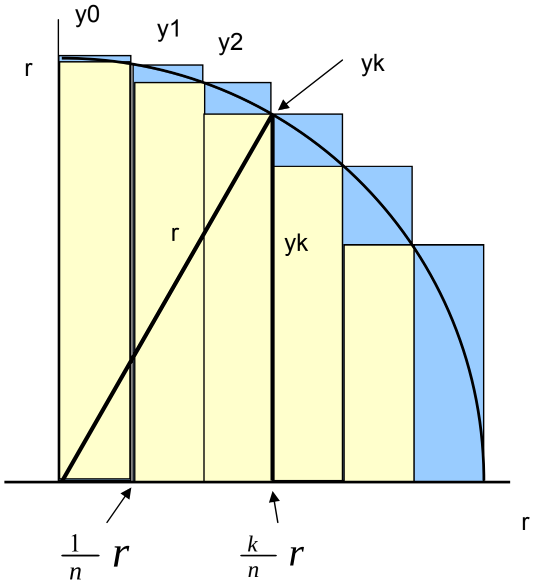
Führen Sie dann die Berechnung von Pi in Excel auch mit der zweiten der beiden Formeln für 30 Seitenverdopplungen durch und beobachten Sie auch hier, wie sich die Genauigkeit der Annäherung von Pi verändert.

Kreisfläche mit der Balkenmethode

$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$



Kreisfläche mit der Balkenmethode



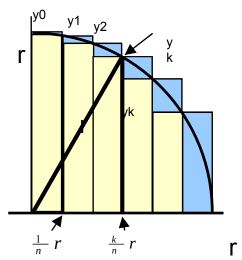
$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der entwickelten Formel den Flächeninhalt des Viertelkreises näherungsweise (Ober- und Untersumme) für einen Radius r =1 LE für n=6 mit Hilfe eines Taschenrechners und für n=100 mit Hilfe eines Tabellenkalkulations-programms.

Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler, den Sie dabei begehen.

Berechnen Sie aus dem Ergebnis das Verhältnis Kreisfläche / Radiusquadrat.

Kreisfläche mit der Balkenmethode

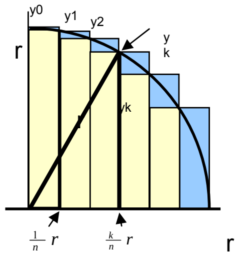


$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

n	r		
100	1		
k	yk	Balken aussen	Balken innen
0	1,00000000	0,01000000	0,00999950
1	0,99995000	0,00999950	0,00999800
2	0,99979998	0,00999800	0,00999550
3	0,99954990	0,00999550	0,00999200
4	0,99919968	0,00999200	0,00998749
5	0,99874922	0,00998749	0,00998198

Kreisfläche mit der Balkenmethode

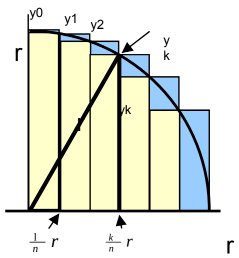
$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$



	A	B	C	D
1	n	r		
2	100	1		
3				
4	k	yk	Balken aussen	Balken innen
5				
6				
7				

Kreisfläche mit der Balkenmethode

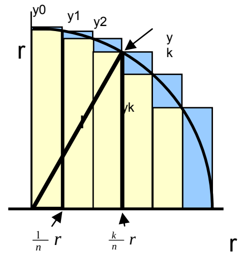
$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$



	A	B	C	D
1	n	r		
2	100	1		
3				
4	k	yk	Balken aussen	Balken innen
5	0	=WURZEL(1-A5^2/$A$2^2)	=B5*1/$A$2	=B6*1/$A$2
6	1	=WURZEL(1-A6^2/$A$2^2)	=B6*1/$A$2	=B7*1/$A$2
7	2	=WURZEL(1-A7^2/$A$2^2)	=B7*1/$A$2	=B8*1/$A$2

Kreisfläche mit der Balkenmethode

$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$



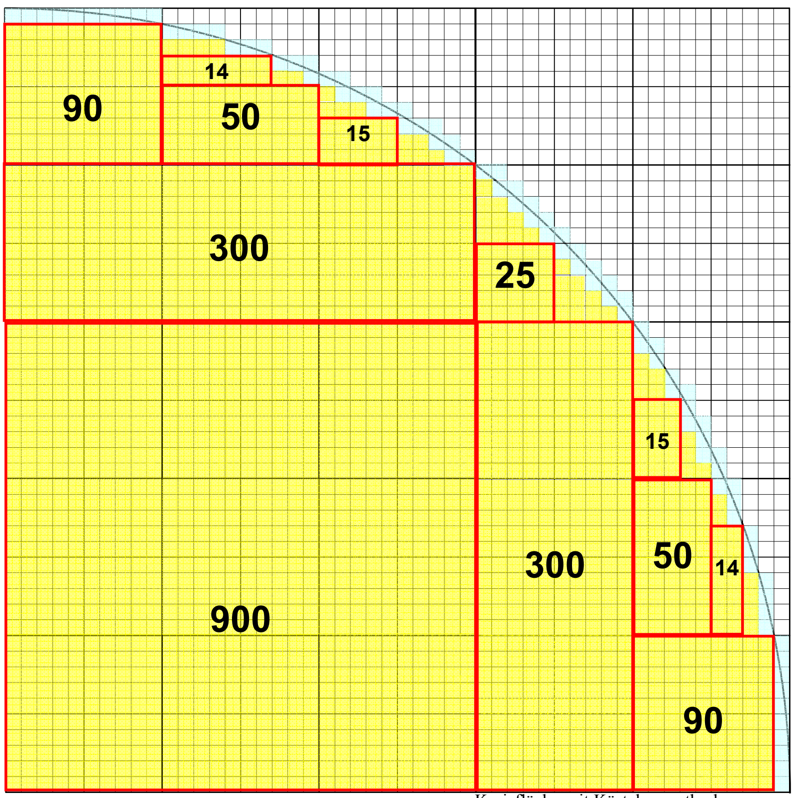
98	0,198997487421	0,001989974874	0,001410673598
99	0,141067359797	0,001410673598	0,000000000000
100	0,000000000000	0,000000000000	0,000000000000
Summe		0,790104257945	0,780104257945
Pi-Näherung		3,160417032	3,120417032

Damit Fehlerintervall bei Pi = 4/100 = 0,04.

Prozentualer Fehler 0,04/3,14 ≈ 1,3%

Differenz zwischen Obersumme und Untersumme: Flächeninhalt des 0. Außenbalkens = 1/100.

Kreisfläche mit Kästchenzählen



1913

Rest noch zählen ….

2· 25 = 50

Innenfläche = 1913 mm²

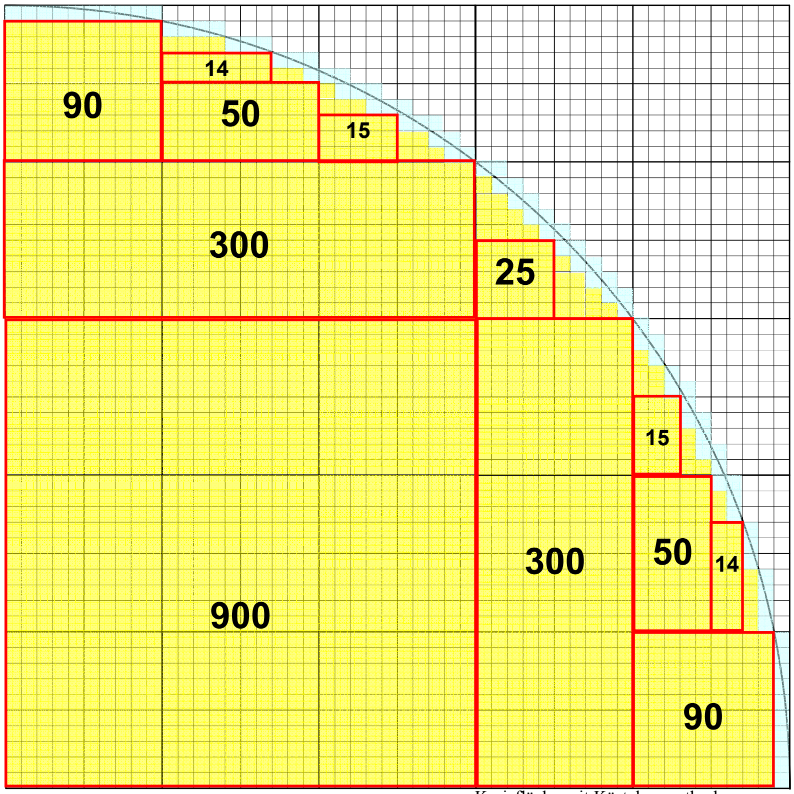
Fläche Vollkreis = 4 · 1913 mm² = 7652 mm²

Flächen-Pi =

7652 /2500 =

3,061

Kreisfläche mit Kästchenzählen



Kreisfläche mit Kästchenmethode

Außenfläche = 1913 mm² + 89 mm² = 2002 mm²

Fläche Vollkreis = 4 · 2002 mm² = 8008 mm²

Flächen-Pi =

8008 /2500 ≈

3,20

Fehler absolut: 0,142

Fehler relativ: 0,142/3,061 ≈ 0,046 = **4,6%**

Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Wir haben festgestellt, dass für Kreise U/d und A/r² konstant sind.

Wir **definieren** **π := U/d** .

Es ist keineswegs offensichtlich, dass A/r² die **gleiche** Konstante **π** ergibt, obwohl die bisher berechneten Näherungswerte dies nahe legen!!!.

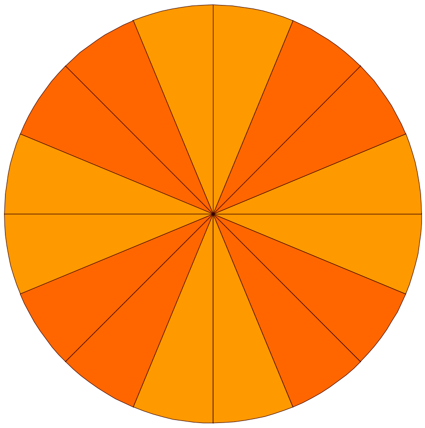
„Flächen-Pi = Umfangs-Pi" ???

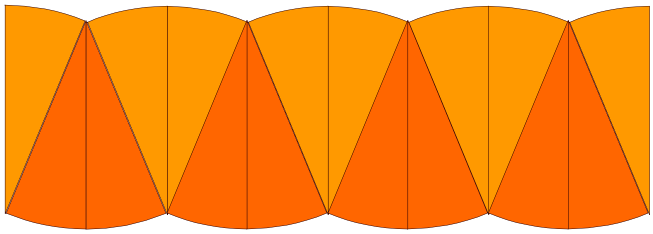
Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Aufgabe:

Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius 5 cm. Zerschneiden Sie ihn wie in der Zeichnung und legen Sie daraus die neben dem Kreis sichtbare Figur.

Vergleichen Sie den Flächeninhalt des Fast-Rechtecks mit dem des Radiusquadrats. Was ergibt sich daraus für den Flächeninhalt des Kreises?

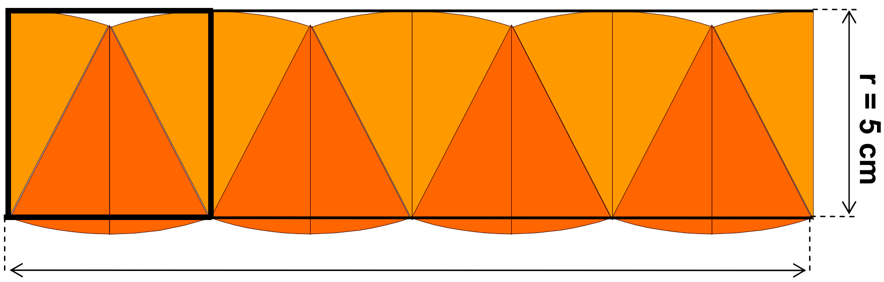




r = 5 cm

Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Hier eine Skizze des Vergleichs:



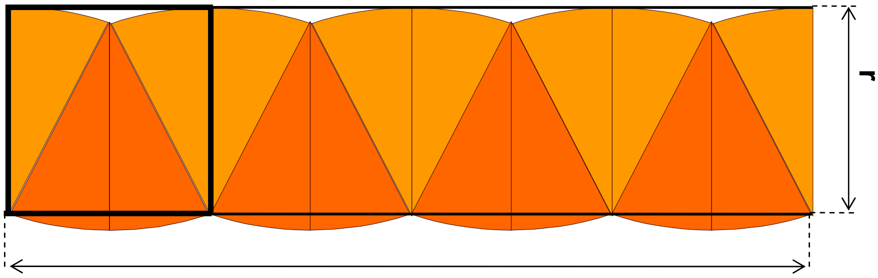
$A_{Quadrat} = r^2 = 25\ cm^2$

$A_{Rechteck} = l \cdot r = 15{,}4\ cm \cdot 5\ cm = 77\ cm^2$

$$\frac{A_{Rechteck}}{A_{Quadrat}} = \frac{77\ cm^2}{25\ cm^2} = 3{,}08$$

$A_{Kreis} \approx 3{,}1 \cdot r^2$

Problem Kreisfläche und Kreisumfang



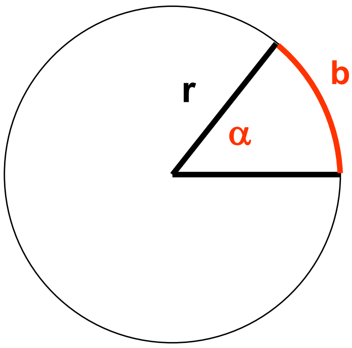
Begründen Sie mit Hilfe der Skizze, dass für Kreise tatsächlich das Verhältnis

$$A/r^2 = \pi$$

ist.

„Flächen-Pi = Umfangs-Pi“ !!!

Kreisteile: Kreisbogen

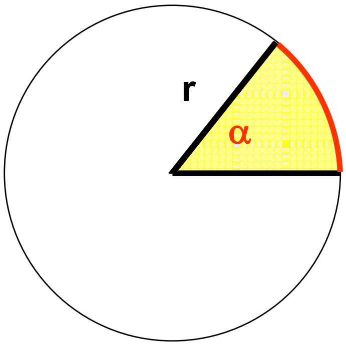


Kreisbogen b zum Winkel α

Berechnen Sie die Länge des zu α gehörenden Kreisbogens b_α .

$$\frac{b_\alpha}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360°} = \frac{\pi r}{180°} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{b_\alpha = \frac{\pi \alpha}{180°} r}$$

Kreisteile: Kreisausschnitt (Kreissektor)

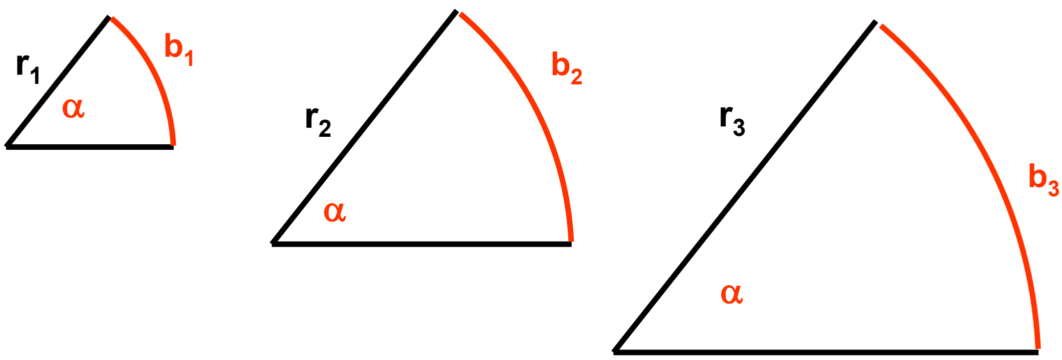


Kreisausschnitt (Kreissektor)
zum Winkel α

Berechnen Sie den Flächeninhalt des zu α gehörenden Kreissektors .

$$\frac{A_\alpha}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{360°} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A_\alpha = \frac{\pi\,\alpha}{360°} r^2}$$

Winkelmessung im Bogenmaß



Alle Kreissektoren zum gleichen Winkel α sind ähnlich.

Damit gilt: $b_\alpha : r$ ist konstant.
Diese nur von α abhängige Zahl heißt das Bogenmaß von α .

Bezeichnung: **arc(α)** (lies: Arcus von α)

Winkelmessung im Bogenmaß

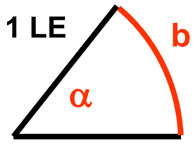
Einheit des Winkels im Bogenmaß: Unbenannte Zahl!
Verhältnis von zwei Längen!

Oft benennt man die Einheit im Bogenmaß dennoch mit **rad**.

1 rad ist aber einfach nur die Zahl 1.

Andere Definition des Bogenmaßes:

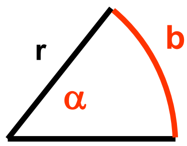
Das **Bogenmaß** arc(α) des Winkels α ist die **Maßzahl** des zu α gehörenden Winkels im **Einheitskreis**.



Winkelmessung im Bogenmaß

Misst man den Winkel α im Bogenmaß, dann vereinfacht sich die Berechnungsformel für die Bogenlänge:

Misst man den Winkel α im Bogenmaß, dann vereinfacht sich die Berechnungsformel für die Bogenlänge:



$$\frac{b}{r} = arc(\alpha) = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha$$

$$\boxed{b = r \cdot arc(\alpha)}$$

$$A_\alpha = \frac{\pi\,\alpha}{360°} r^2$$

$$\boxed{A_\alpha = \frac{1}{2} arc(\alpha) \cdot r^2}$$

Winkelmessung im Bogenmaß

Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt.

$$arc(\alpha) = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \qquad \alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot arc(\alpha)$$

α in °	360°	180°	90°	45°	60°	30°	120°	150°	1°
arc(α)									

α in °									
arc(α)	$2/3\pi$	$\pi/3$	$\pi/10$	1	2	$3/2\,\pi$	$\pi/2$	$\pi/4$	