

# Geometrie II Vertiefung der Geometrie

WS 2005/06

R.Deißler

## Literatur

**Krauter, Siegfried**

**Erlebnis Elementargeometrie**

Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken  
Spektrum Akad.Verlag, Heidelberg 2005

Aus Vorlesungen für Lehramtsstudenten an der PH Ludwigsburg.  
Das Buch deckt unsere Geometrie I und II Vorlesung weitgehend ab.  
In der Vorlesung werden wir darauf verweisen.

**Müller-Philipp, S., Gorski, Hans-Joachim**

**Leitfaden Geometrie**

3.Auflage, Vieweg, Wiesbaden 2005

Das Buch deckt unsere Geometrie I weitgehend ab, enthält aber nur wenige Elemente aus der Geometrie II.  
Ein Student meinte im SS 05, er habe in der Geometrie I sehr viel von diesem Buch profitiert.

**Weigand, H.-G., Weth, Th.,  
Computer im Mathematikunterricht**

Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 2002

Kapitel über Geometrie (S.155-228), im Wesentlichen über den Einsatz von DGS im Unterricht.

Literatur 3

Lizenz für **DynaGeo-Version ab 2.4** :

Lizenzdatei

**PdagogischeHochschule01.dgl**

vom "Schwarzen Brett"

**Schwarzes\_Brett\Mathematik und Informatik\Deissler\Geometrie\  
Geometrie\_SS2005\Euklid+Lizenzdatei-PHFR**

laden und in das DynaGeo-Verzeichnis kopieren

DynaGeo – EUKLID Homepage:

<http://www.dynageo.de/>

[http://home.ph-freiburg.de/deissler/geo2\\_05-06.htm](http://home.ph-freiburg.de/deissler/geo2_05-06.htm)

Zugang auch einfach über meine Homepage.

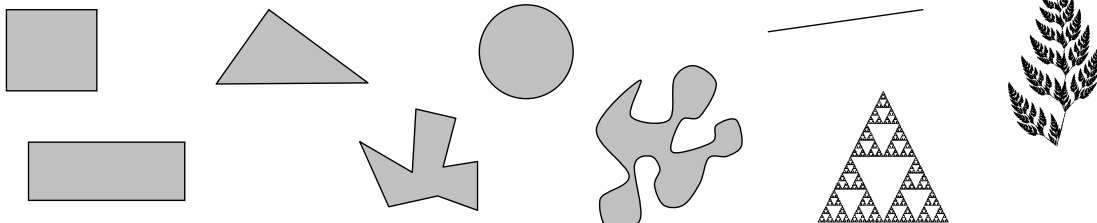
Materialien zur Vorlesung

## Kapitel 1: Der Flächeninhalt

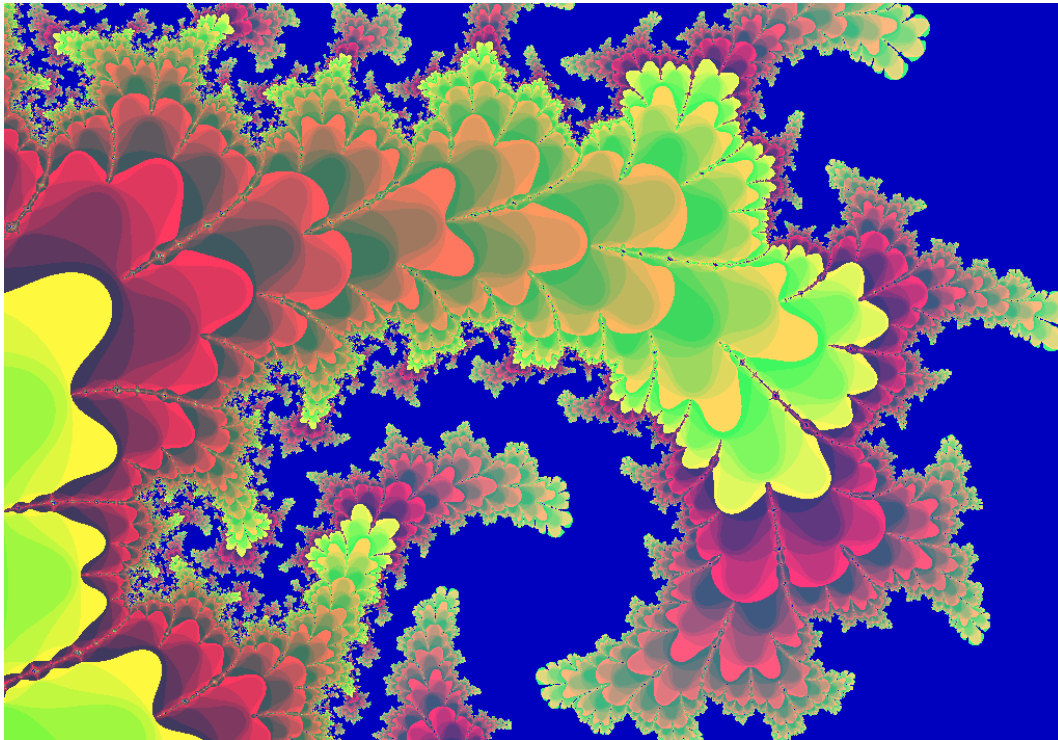
- Flächeninhalt einer Figur soll etwas über deren Größe aussagen
- Flächeninhaltsbegriff intuitiv „irgendwie klar“,
- ab der Grundschule durch Auslegen von Figuren mit Plättchen vorbereitet .
- Abgrenzung gegenüber einem anderen Begriff von Größe, dem Umfang einer Figur.

Definitionen des Flächeninhaltsbegriffs werden immer mehr verfeinert, durch den Messprozess festgelegt.

Welchen Figuren sind Sie bereit, einen „Flächeninhalt“ zuzusprechen?  
Wie sollte der definiert und gemessen werden?

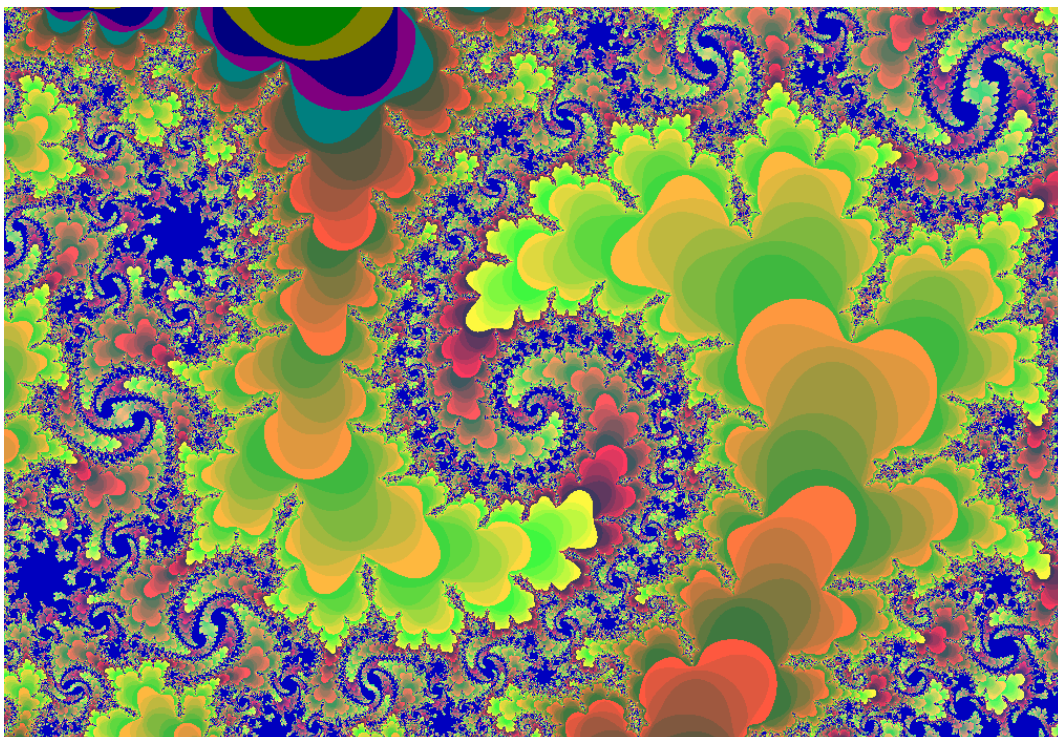


Problematische Figuren: **Fraktale** im 19./20. Jahrhundert



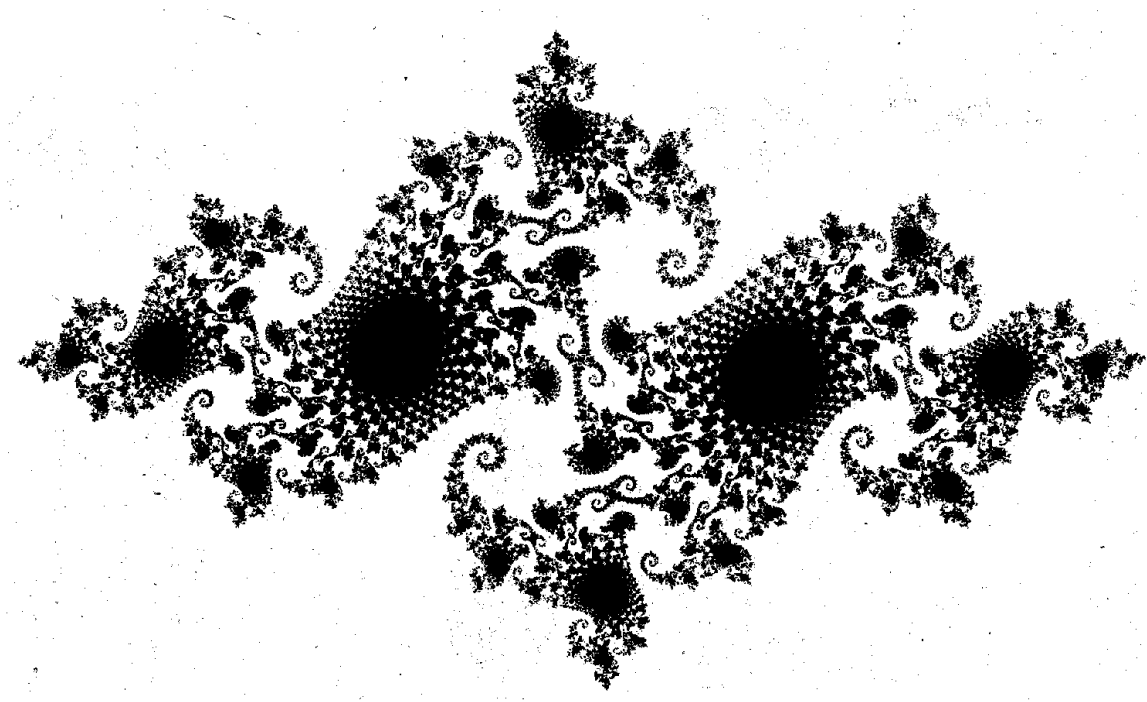
Flächeninhalt der blauen Fläche? Umfang der blauen Fläche?

Problematische Figuren: **Fraktale**



Flächeninhalt der blauen Fläche? Umfang der blauen Fläche?

## Problematische Figuren: **Fraktale**



Flächeninhalt? Umfang?

### Definition einer Flächeninhaltsfunktion $F$

$F$  ordnet möglichst vielen Figuren  $A$  (Maß-)Zahl  $F(A)$  zu, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

1.  $F(A) \geq 0$  für alle Figuren  $A$ ,
2.  $F(A) = F(A')$   $A'$  kongruent zu  $A$ ,
3.  $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) + F(A_2)$   $A_1$  und  $A_2$  haben keine gemeinsamen „inneren“ Punkte ,
4.  $F(Q_e) = 1$   $Q_e$  beliebig gewähltes „Einheitsquadrat“

Theorie solcher Messprozesse in der Mathematik →  
„Maßtheorie“, Teilgebiet der Analysis

Hier

- nur die in der Schulmathematik wichtigen Figuren behandelt,
- an einigen Beispielen angewandt ,
- statt den Flächeninhalt zu definieren beschreibt man den Messprozess.

## Flächeninhalt als Größe (→ Vorlesung Größenbereiche)

- Im Alltagsgebrauch keine Figuren mit Flächeninhalt 0 akzeptiert (z.B. einzelne Punkte, Strecken)
- Ohne diese Flächen bilden die Flächeninhalte einen so genannten „Größenbereich“ (→ Vorlesung über Größenbereiche).

In einem Größenbereich  $G$  sind Addition  $+$  und Kleiner-Relation  $<$  erklärt:

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| 1. $a + b = b + a$   | Kommutativgesetz                  |
| 2. $(a + b) + c = a + (b + c)$                                   | Assoziativgesetz                  |
| 3. entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$                    | Trichotomie                       |
| 4. $a < b \Leftrightarrow$ es gibt ein $c \in G$ mit $a + c = b$ | eingeschränktes Lösbarkeitsgesetz |

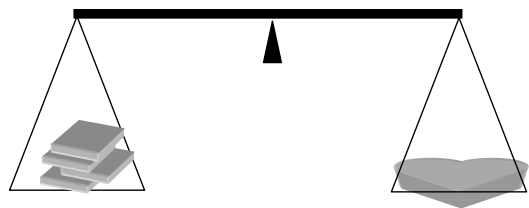
## Der Messprozess für die Schule

### Physikalisches Modell:

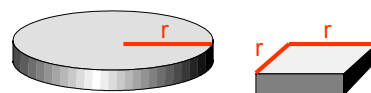
- Figuren“ sind aus homogenem Material gleicher Dicke ausgeschnitten.
- Figuren haben gleichen Flächeninhalt wenn sie gleiches Gewicht haben.

### Flächeninhalt von Figuren experimentell vergleichen:

- Figuren aus geeignetem Material herstellen und Gewicht vergleichen.
- Flächenmaßzahlen zuordnen durch Vergleichen mit dem Gewicht von Einheitsquadraten oder einem anderen passenden Quadrat.



- Für die Schule eventuell:  
Flächeninhalt der Kreisfläche mit einem „Radiusquadrat“ vergleichen. Wie viel mal so schwer ist die Kreisfläche?



## Definition einer Flächeninhaltsfunktion F

F ordnet möglichst vielen Figuren A (Maß-)Zahl  $F(A)$ , so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

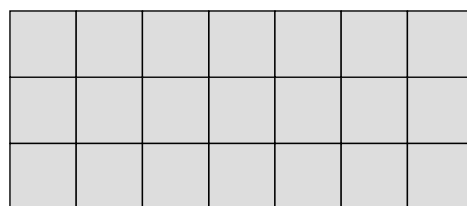
1.  $F(A) \geq 0$  für alle Figuren A,
2.  $F(A) = F(A')$   $A'$  kongruent zu A,
3.  $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) + F(A_2)$   $A_1$  und  $A_2$  haben keine gemeinsamen „inneren“ Punkte ,
4.  $F(Q_e) = 1$   $Q_e$  beliebig gewähltes „Einheitsquadrat“

## Folgerungen aus der Definition

- $F(A)=0$  für alle „Linien“, d.h. alle Mengen ohne innere Punkte
- Für **Rechtecksflächen** A mit den Maßzahlen a und b Längeneinheiten ist  **$F(A)=a \cdot b$**

Beweisskizze  $a=7$  LE ,  $b=3$  LE

7 Quadrate in einem Streifen



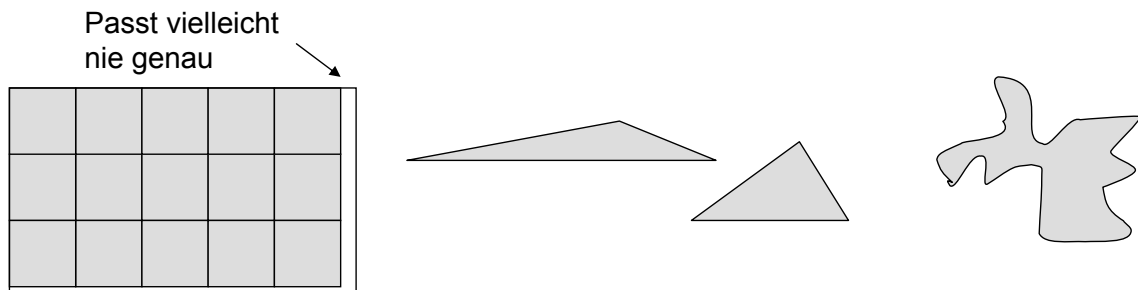
3 Streifen

b

a

$$F(A) = 3 \cdot 7 F(Q_e) = 3 \cdot 7 FE$$

- Probleme beim Messprozesses durch Auslegen mit Quadraten:
  - Problematisch bei Rechtecken mit Seiten, die zu denen des Einheitsquadrates inkommensurabel sind,
  - Vergleich beliebiger Dreiecke,
  - krummlinig begrenzte Figuren.



Begriffe „**Zerlegungsgleichheit**“ und „**Ergänzungsgleichheit**“ von Figuren.

**Grenzprozesse** durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere ( $\Rightarrow$  z.B. Kreisfläche).

## Zerlegungsgleich - ergänzungsgleich

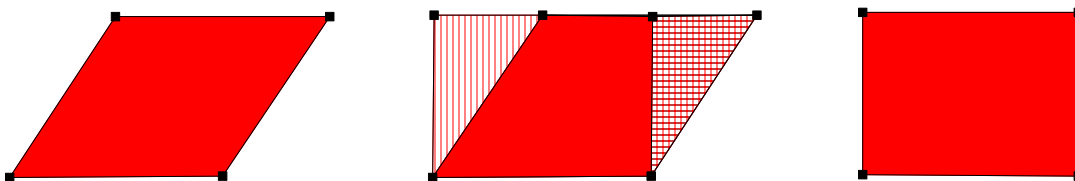
### Definition

Zwei Figuren sind **zerlegungsgleich** wenn sie sich in paarweise kongruente Figuren zerlegen lassen.

### • Zerlegungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich

Folgt sofort aus den Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion

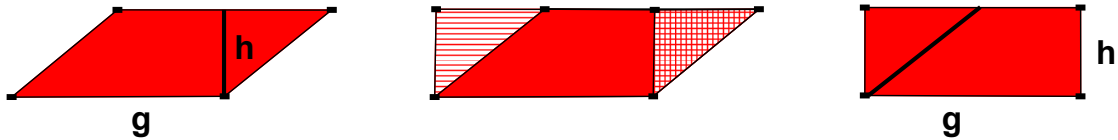
Beispiel: Flächeninhalt des Parallelogramms



Das Parallelogramm und das Rechteck sind zerlegungsgleich.



## Flächeninhalt des Parallelogramms

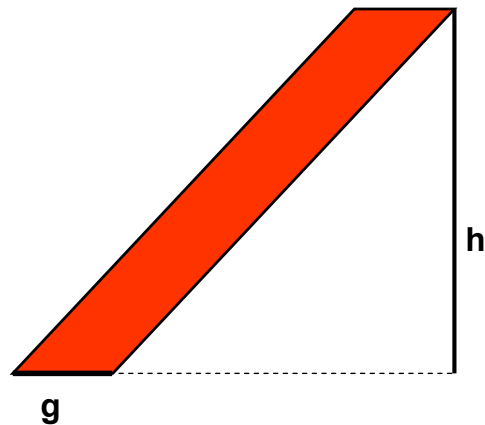


Diese Zerlegung zeigt: Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist das Produkt aus der Grundseite  $g$  und der Höhe  $h$ :  $A = g \cdot h$ .

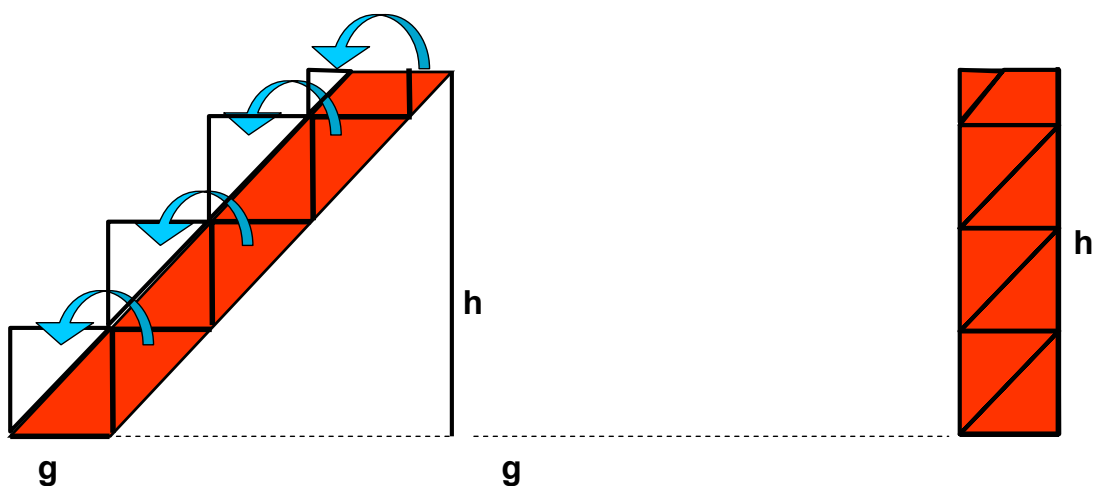
### Aufgabe

Gilt dies auch für das nebenstehende Parallelogramm?

Ist dieses auch zerlegungsgleich zu einem Rechteck mit den Seiten  $g$  und  $h$ ?



## Flächeninhalt des Parallelogramms



Das Parallelogramm ist zerlegungsgleich zu dem Rechteck mit den Seiten  $g$  und  $h$ . Auch hier ist  $A = g \cdot h$ .

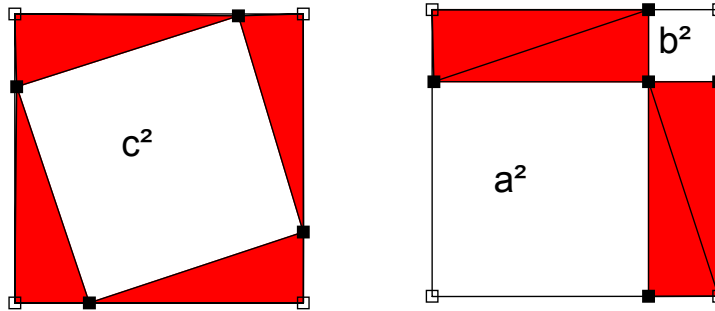
### Definition

Zwei Figuren sind **ergänzungsgleich** wenn sie durch Ergänzung mit kongruenten Figuren zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden können.

- **Ergänzungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

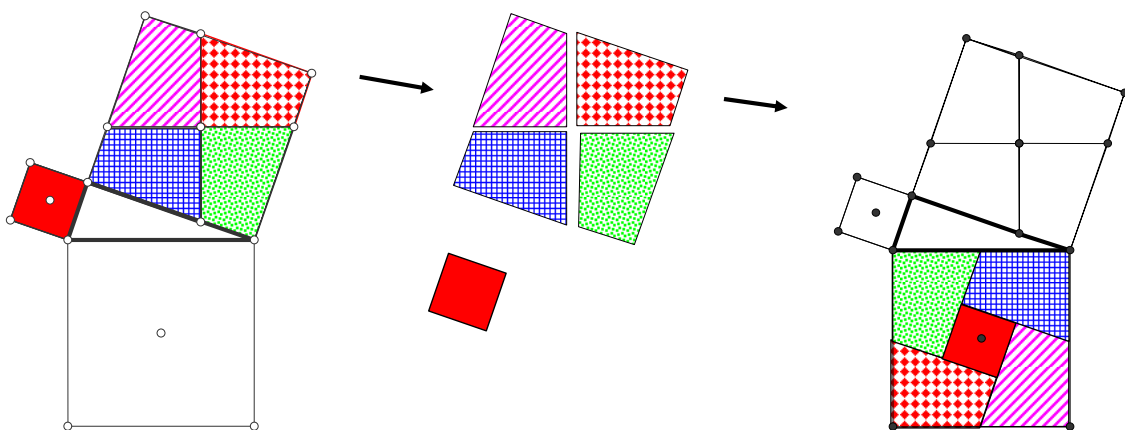
Folgt sofort aus den Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion

Beispiel: Pythagoras-Legebeweis

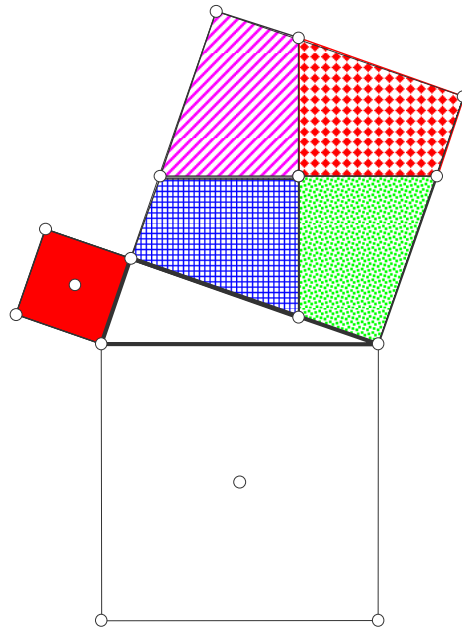


Die weißen Flächen sind ergänzungsgleich, denn sie können durch Ergänzung mit den vier paarweise kongruenten Dreiecken zu kongruenten Figuren (hier den Quadraten) ergänzt werden.

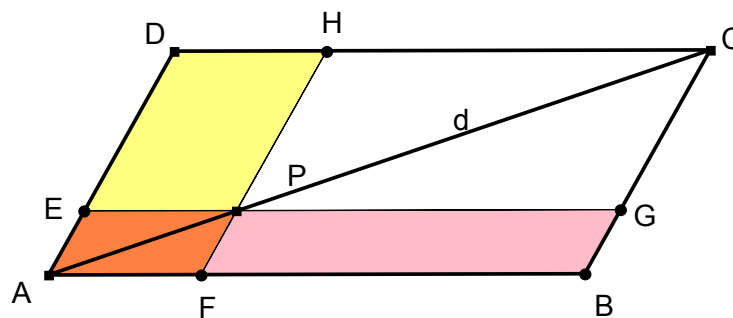
### Pythagoras-Zerlegungsbeweis



Für die Schule als Puzzle geeignet, wenn man die Einteilung des Kathetenquadrats vorgibt.



### Satz vom Ergänzungsparallelogramm



#### Der Satz

Gegeben ist das Parallelogramm  $ABCD$  und ein Punkt  $P$  auf der Diagonalen  $d=AC$ .

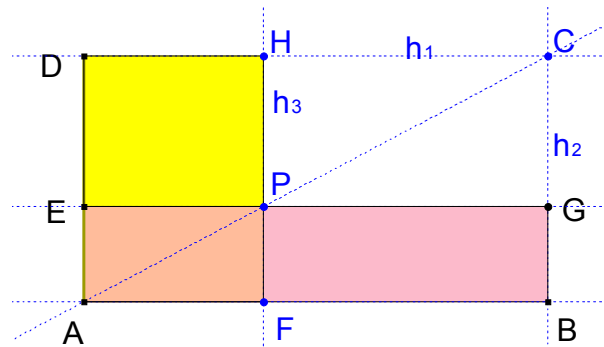
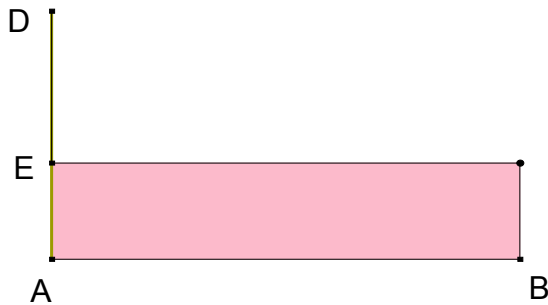
Durch  $P$  sind Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezeichnet. Dadurch entstehen zwei Parallelogramme  $EPHD$  (gelb) und  $FBGP$  (hellrot).

- Zeigen Sie, dass diese Parallelogramme den gleichen Flächeninhalt besitzen.
- Zeigen Sie, dass auch die Parallelogramme  $AFHD$  und  $ABGE$  den gleichen Flächeninhalt besitzen.

## Anwendung

Gegeben ist ein Rechteck ABGE (hellrot).

Es soll ein dazu flächengleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seite konstruiert werden.



Konstruktion:

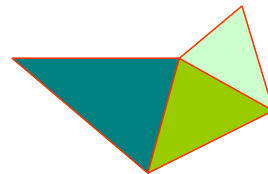
$h_1$  Parallele durch zu AB durch D,  
C Schnittpunkt von  $h_1$  und  $h_2$ ,  
 $h_3$  Parallele zu AD durch P,  
F Schnittpunkt von  $h_3$  mit AB.

$h_2$  Parallele durch zu AD durch B,  
P Schnittpunkt von AC mit GE,  
H Schnittpunkt von  $h_3$  mit DC.  
AFHD ist das gesuchte Rechteck.

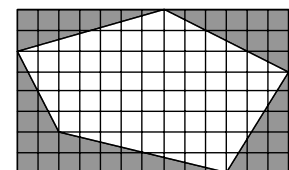
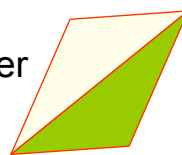
## Übersicht über Methoden zur **Bestimmung und zum Vergleich** von **Flächeninhalten**

- Figur zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich zu einer Figur mit schon bekanntem Flächeninhalt (s.vorangehende Beispiele)

- Figur als (disjunkte) Vereinigung bekannter Flächen darstellen



- Bekannte Figur als (disjunkte) Vereinigung bekannter und unbekannter Flächen darstellen

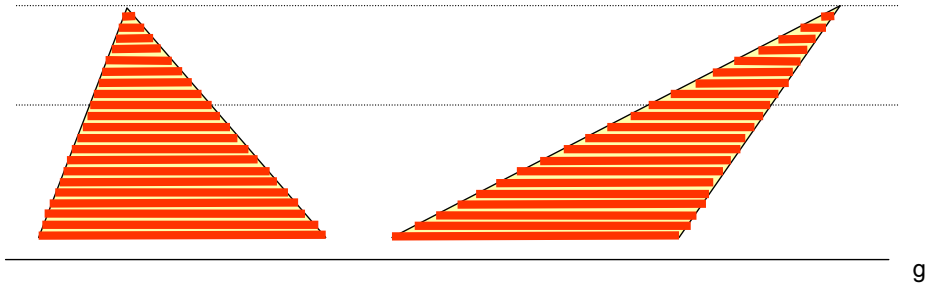


- **Scherungsbeweise**

- **Grenzprozesse** durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere ( $\Rightarrow$  z.B. Kreisfläche, wird noch genau behandelt).

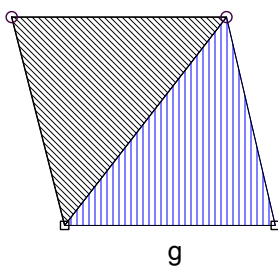
### Satz von Cavalieri in der Ebene

Kann man eine Gerade  $g$  so zeichnen, dass jede Parallele zu dieser Geraden aus zwei Flächen stets zueinander gleich lange Strecken ausschneidet, so haben die Flächen denselben Inhalt.

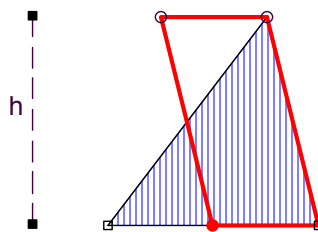


→ Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe haben den gleichen Flächeninhalt (Strahlensatz).

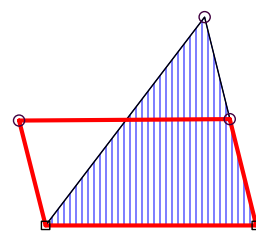
### Dreiecksformeln und ihre geometrische Deutung



$$A = \frac{gh}{2}$$

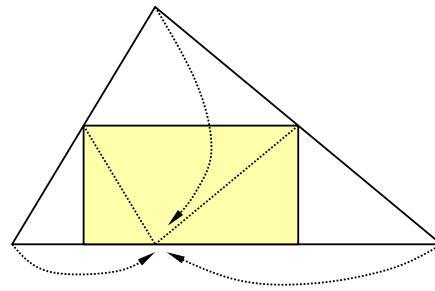
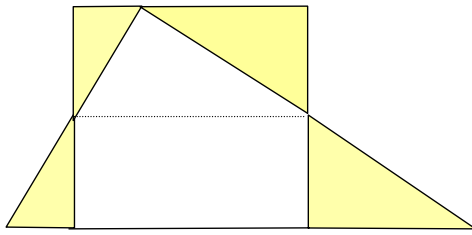


$$A = \frac{g}{2} h$$



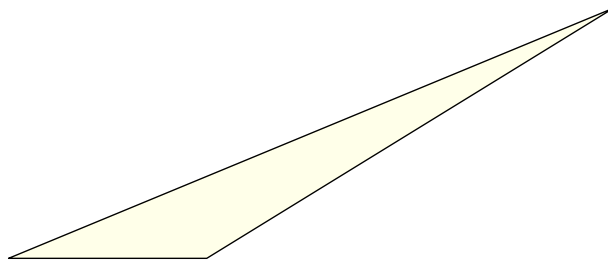
$$A = g \frac{h}{2}$$

Verschiedene Herleitungen führen zunächst zu verschiedenen Formen der Flächeninhaltsformeln → Termumformungen



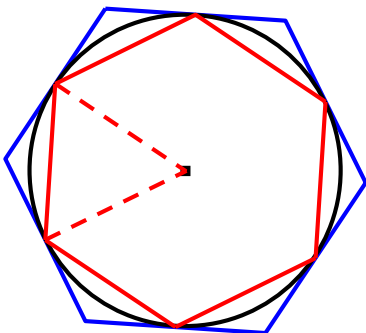
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Versuchen Sie, diese beiden Beweise auch für nicht spitzwinklige Dreiecke durchzuführen (Aufgabenblatt)

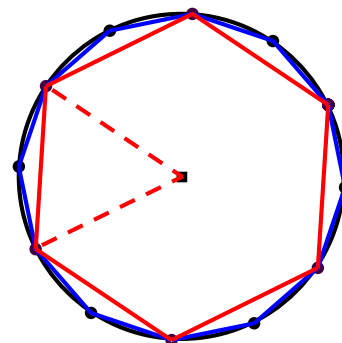


## Grenzprozesse

Beispiel: Flächeninhalt des Kreises



Ein- und umschriebenes Sechseck



Einbeschriebenes Sechseck und Zwölfeck

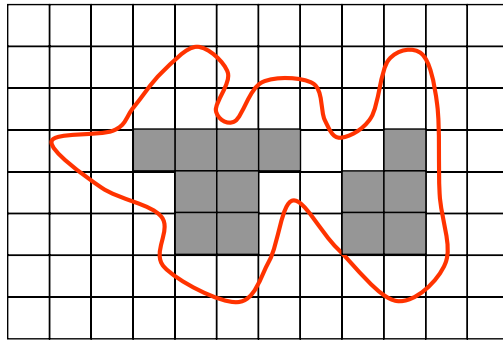
Annäherung durch einbeschriebene und umschriebene regelmäßige n-Ecke.

Für  $n \rightarrow \infty$  nähern sich deren Flächeninhalte von unten bzw. oben einem gemeinsamen Wert.

Diesen Wert **definiert** man als den Flächeninhalt des Kreises.

Ganz beliebige Figur

Flächeninhalt A ?

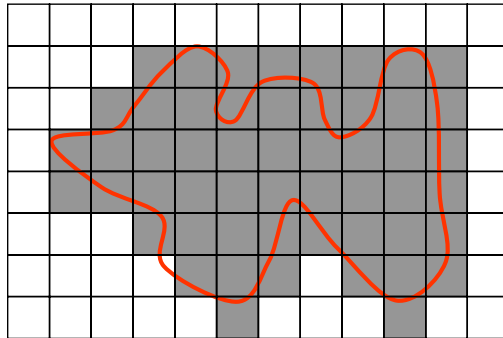


$$I_1 \leq A \leq U_1$$

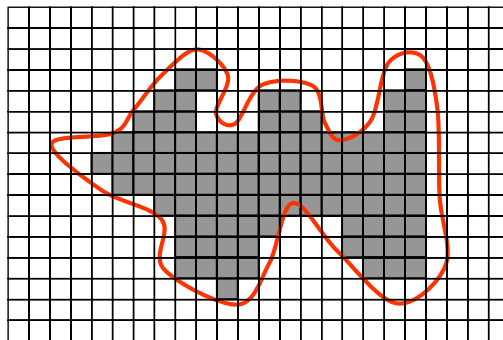
Gitterpapier drüber legen ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren  
→  $I_1$

Kästchen außen zählen und addieren  
→  $U_1$



Grenzprozesse 2

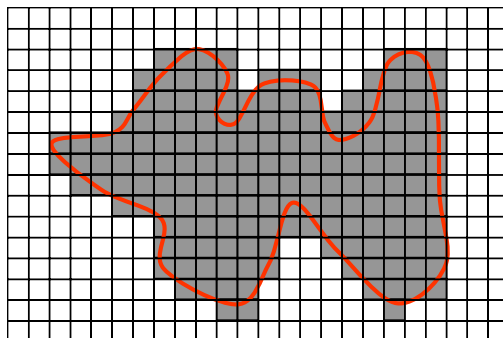


$$I_1 \leq I_2 \leq A \leq U_2 \leq U_1$$

Kästchenlänge halbieren ...

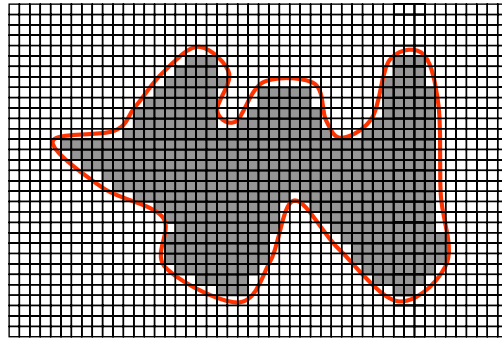
Kästchen im Inneren zählen und addieren  
→  $I_2$

Kästchen außen zählen und addieren  
→  $U_2$



Grenzprozesse 3

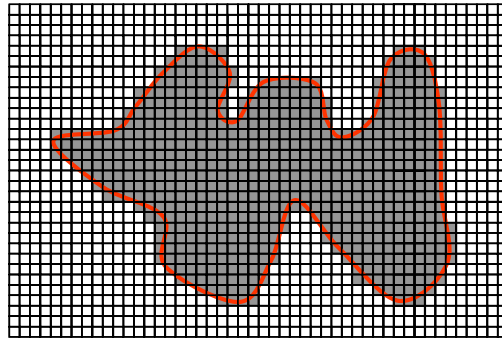
Falls  $I_n$  und  $U_n$  sich dem gleichen Wert  $A$  nähern, dann ist das der Flächeninhalt der Figur.



$$I_1 \leq I_2 \leq I_4 \leq A \leq U_4 \leq U_2 \leq U_1$$

Kästchenlänge nochmals halbieren ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren  
→  $I_4$



Intervallschachtelung für  $A$

Kästchen außen zählen und addieren  
→  $U_4$

Grenzprozesse 4

Eine Frage, die in der Vorlesung Geometrie I untersucht wurde und die historisch große Bedeutung hatte:

Welche Flächen lassen sich alleine mit Zirkel und Lineal in Quadrate umwandeln?

„Quadraturproblem“

Insbesondere die „Quadratur des Kreises“



## Historische Bemerkungen

Im Altertum war es ein zentrales Anliegen der Geometrie, alle Konstruktionen exakt nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchzuführen.

Dieses Anliegen hat die geometrische Forschung über 2000 Jahre lang vorangetrieben, und die endgültigen Antworten auf die offenen Fragen sind nur etwas über 100 Jahre alt.

Der Grund für die Einschränkung der Hilfsmittel war philosophischer Natur, Näherungen für die in Frage stehenden Probleme waren seit alters her bekannt.

Hier sollen einige der klassischen Probleme kurz vorgestellt werden.

### Quadratur des Kreises: Ein altes griechisches Problem

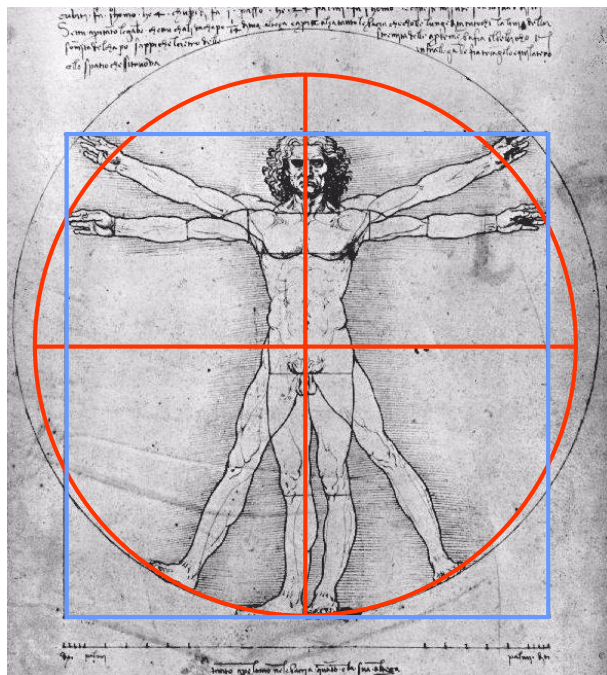
Konstruiere mit Zirkel und Lineal zu einem Kreis mit gegebenem Radius ein flächengleiches Quadrat.

#### Leonardo da Vinci:

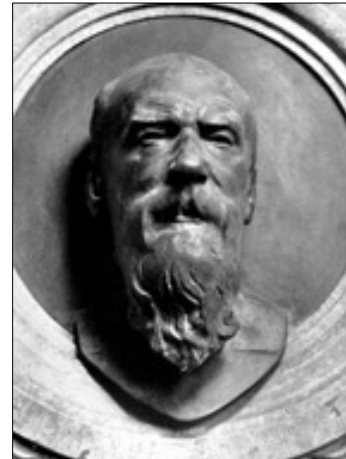
Studie zu den Proportionen am „idealen“ menschlichen Körper. Quadraturproblem implizit dargestellt ?

Kreis durch die Fingerspitzen der waagrecht ausgestreckten Arme und durch den zentralen großen Zeh.

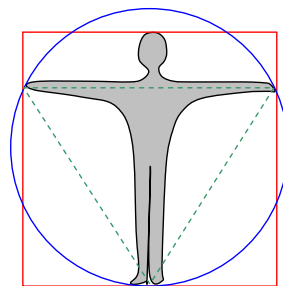
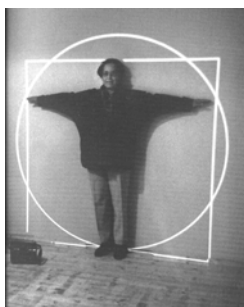
Fast gleicher Flächeninhalt wie das Quadrat aus Körperhöhe und Breite der ausgestreckten Arme.



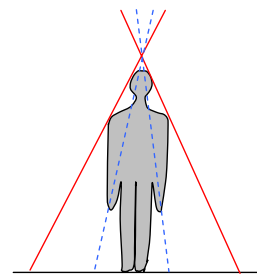
Beweis für die Unmöglichkeit der „Quadratur des Kreises“ erst um 1870 gelungen (F.Lindemann)!



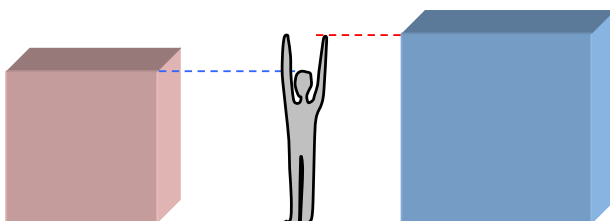
Phänomena“ 1984 in Zürich  
Esoterischer Autor : Der Mensch ist die Lösung des Unlösbaren!



Quadratur des Kreises



Winkeldrittellung



Würfelerdoppelung  
(Delisches Problem)

## Flächeninhalt von Polygonen mit Zirkel und Lineal

### Problem 1

Kann man ein Vieleck (Polygon) mit Zirkel und Lineal alleine umwandeln in

- ein flächeninhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite eine Einheitsstrecke ist,
- ein flächeninhaltsgleiches Quadrat?

### Problem 2

Kann man diese Umwandlung auch durch Zerschneiden und Zusammenlegen erreichen?

Klar: Kann man Teil 1 von Problem 1 lösen, dann ist Teil 2 sofort mit Hilfe des Kathetensatzes oder des Höhensatzes gelöst.

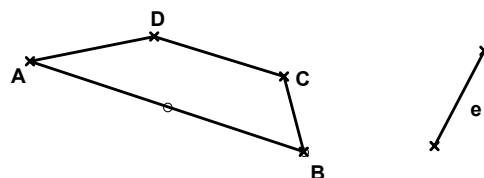
Werden diese Fragen positiv beantwortet, dann kann man alleine mit Hilfe von Zirkel und Lineal bzw. durch Zerschneiden den Flächeninhalt beliebiger Polygone vergleichen:

Entweder

- man wandelt beide in Rechtecke mit einer Einheitsseite um und vergleicht deren andere Seitenlängen,
- oder man verwandelt beide in jeweils flächengleiche Quadrate und vergleicht diese Quadrate.

Aufgabe:

Wandeln sie das folgende Viereck in ein flächengleiches Rechteck mit der Strecke  $e$  als einer Seite um.



## Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Der Problemkreis kann sowohl von der Umfangsberechnung als auch von der Flächenberechnung aus erschlossen werden.

Analog dazu kann man auch später bei der Behandlung der Kugel entweder über die Oberflächenberechnung oder die Volumenberechnung einsteigen.

Kreisfläche und Kreisumfang 1

## Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Bei diesen Berechnungen spielt die Konstanz des Quotienten gewisser Größen eine Rolle.

Welche der Folgenden Quotienten sind konstant?

Warum ist dies so?

Bezeichnungen:

A Flächeninhalt des Kreises, U Umfang des Kreises

r Radius des Kreises, d Durchmesser des Kreises

$A/r$

$A/r^2$

$A/d$

$A/d^2$

$U/r$

$U/r^2$

$U/d^2$

$U/d$

Kreisfläche und Kreisumfang 2

## Radgrösseneinstellung

Drücken Sie den Auto-Clear Knopf auf der Rückseite des Gerätes. Zur Einstellung des Computers auf den richtigen Raddurchmesser muss ein Faktor ermittelt werden (vierstellige Zahl), indem der Radius des Rades in mm mit 6.2832 multipliziert wird.

Faktor eingeben durch drücken der linken Taste für die Stelle und der rechten Taste für die gewünschte Ziffer. Diesen Vorgang wiederholen, bis alle vier Ziffern eingegeben worden sind.

R: 2058

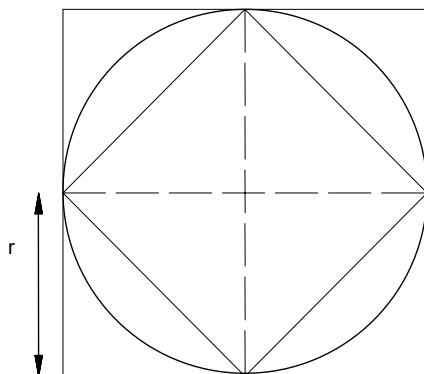
Benutzen Sie diese Tabelle als Hilfestellung fuer Raddurchmesser und Radumfang.

Tabelle für einige Reifengrößen		d	c
20"	-----	1596	
22"	-----	1759	
24"	-----	1916	
26"	(650A) -----	2073	
26.5"	(Tubular) -----	2117	
<b>26.6"</b>	<b>(700x25C) -----</b>	<b>2124</b>	
26.8"	(700x28C) -----	2136	
27"	(700x32C) -----	2155	
28"	(700B) -----	2237	
(w/tire)			
ATB 24"x1.75	-----	1888	
ATB 26"x1.4	-----	1995	
ATB 26"x1.5	-----	2030	
ATB 26"x1.75	-----	2045	
ATB 26"x2 (650B)	-----	2099	
27"x1	-----	2136	
27"x1 1/4	-----	2155	

Kreisfläche und Kreisumfang 3

### Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Schätzen Sie den Kreisumfang und den Flächeninhalt des Kreises mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen Quadraten ab.



$$4\sqrt{2}r < U_0 < 8r$$

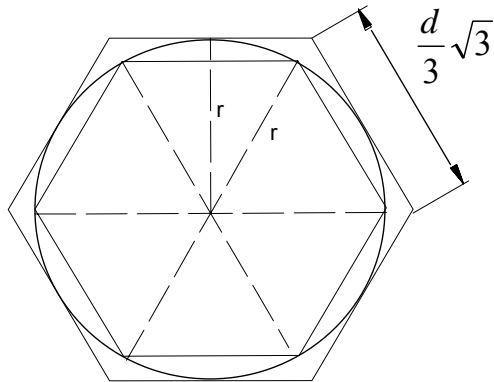
$$2,8d < U_0 < 4d$$

$$2r^2 < A_0 < 4r^2$$

Kreisfläche und Kreisumfang 4

## Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Schätzen Sie den Kreisumfang und den Flächeninhalt des Kreises mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen Sechsecken ab.



Umfang:

$$6r < U_o < 4\sqrt{3}r$$

$$3d < U_o < 3,47d$$

Flächeninhalt:

$$6\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 < A_o < 2\sqrt{3}r^2$$

Kreisfläche und Kreisumfang 5

## Kreisumfang

Bestimmen Sie experimentell mit Hilfe einer CD das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises.

Welchen prozentualen Fehler haben Sie dabei begangen?

## Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

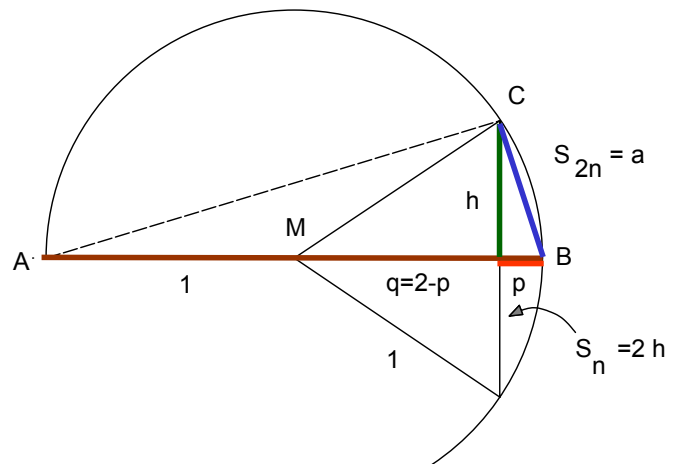
Kreisradius  $r = 1$  LE.

Berechnen Sie, wie sich die Seitenlänge  $S_{2n}$  des einbeschriebenen regelmäßigen  $2n$ -Ecks aus der Seitenlänge  $S_n$  des  $n$ -Ecks ergibt.

Die Seitenlänge des einbeschriebenen 6-Ecks ist 1 LE.

Damit kann man die Seitenlänge des 12-, 24-, 48-Ecks berechnen.

Diese Formeln können mit dem Taschenrechner oder mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms ausgewertet werden, um immer genauere Werte für  $\pi$  zu erhalten.



Kreisumfang 2

## Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

Es ist  $U_n = n \cdot S_n$ ,  $\pi \approx \frac{U_n}{2} = \frac{n}{2} S_n$

$r = 1$  LE.  $S_{2n} = ?$

$\Delta ABC$  ist rechtwinklig (Thalesatz)

Höhensatz für  $\Delta ABC$ :

$$(1) \quad h^2 = (2-p)p$$

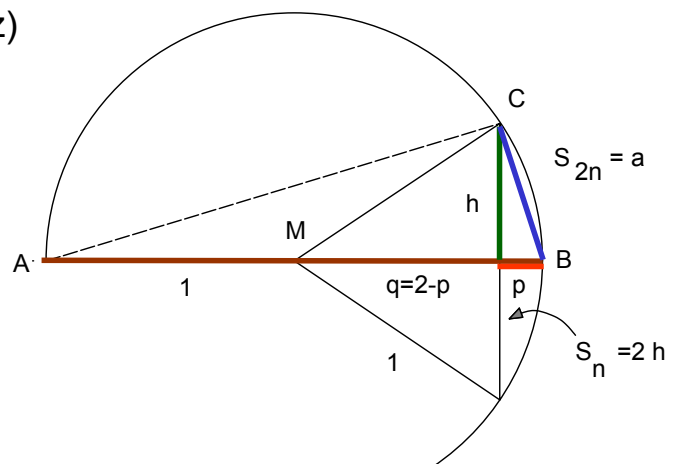
Kathetensatz für  $\Delta ABC$ :

$$(2) \quad a^2 = 2p$$

(1) nach  $p$  ( $<1$ ) aufgelöst:

$$(3) \quad p = 1 - \sqrt{1 - h^2}$$

$$(3) \text{ in (2) eingesetzt: } a = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4h^2}}$$



Kreisumfang 3

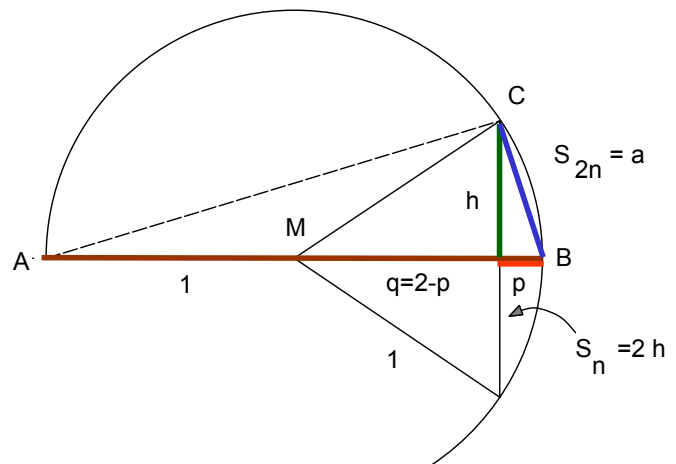
## Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

(3) in (2) eingesetzt:  $a = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - h^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4h^2}}$

Damit erhält man:

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

$$= \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}}$$



Kreisumfang 4

## Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

Berechnungsschema in Excel  $S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}} = \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}}$

n	Sn	Un	Un/2
6	1,000000	6,000000	3,000000
12	0,517638	6,211657	3,105829
24	0,261052	6,265257	3,132629
48	0,130806	6,278700	3,139350
96	0,065438	6,282064	3,141032
192	0,032723	6,282905	3,141452
384	0,016362	6,283115	3,141558
768	0,008181	6,283168	3,141584
1536	0,004091	6,283181	3,141590
3072	0,002045	6,283184	3,141592

n	Sn	Un	Un/2
6	1	=(A2*B2)	=(C2/2)
	=(A2^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B2*B2)))	=(A3*B3)
	=(A3^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B3*B3)))	=(C4/2)
	=(A4^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B4*B4)))	=(A5*B5)
	=(A5^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B5*B5)))	=(C6/2)
	=(A6^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B6*B6)))	=(A7*B7)
	=(A7^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B7*B7)))	=(C8/2)
	=(A8^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B8*B8)))	=(A9*B9)
	=(A9^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B9*B9)))	=(C10/2)
	=(A10^2)	=(WURZEL(2-WURZEL(4-B10*B10)))	=(A11*B11)
			=(C11/2)





## Kreisumfang: Berechnung mit Näherungsverfahren

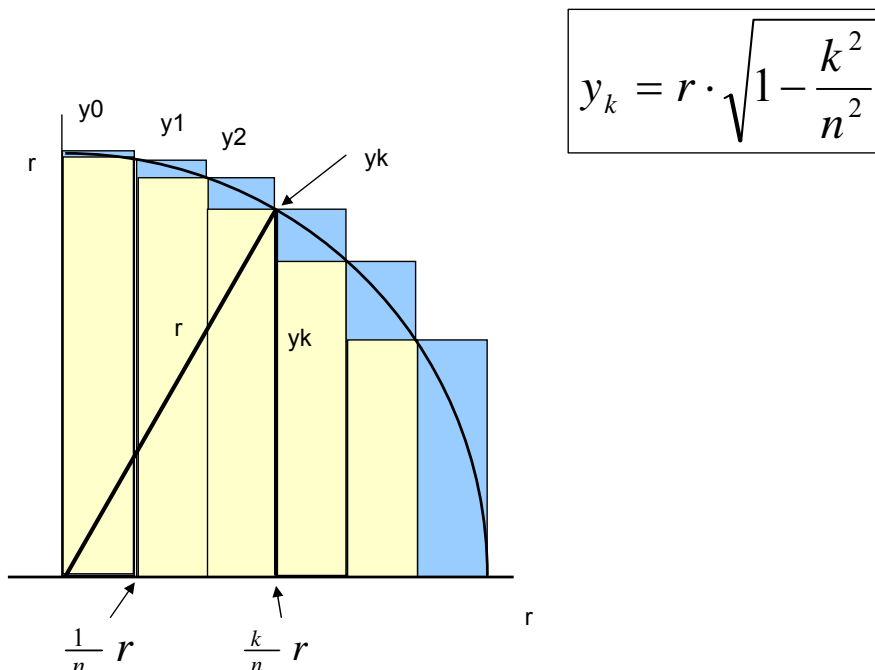
Berechnungsschema in Excel 
$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}} = \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}}$$

Führen Sie die Berechnung von Pi in Excel mit der ersten der beiden Formeln für 30 Seitenverdopplungen durch und beobachten Sie, wie sich die Genauigkeit der Annäherung von Pi verändert.

Führen Sie dann die Berechnung von Pi in Excel auch mit der zweiten der beiden Formeln für 30 Seitenverdopplungen durch und beobachten Sie auch hier, wie sich die Genauigkeit der Annäherung von Pi verändert.

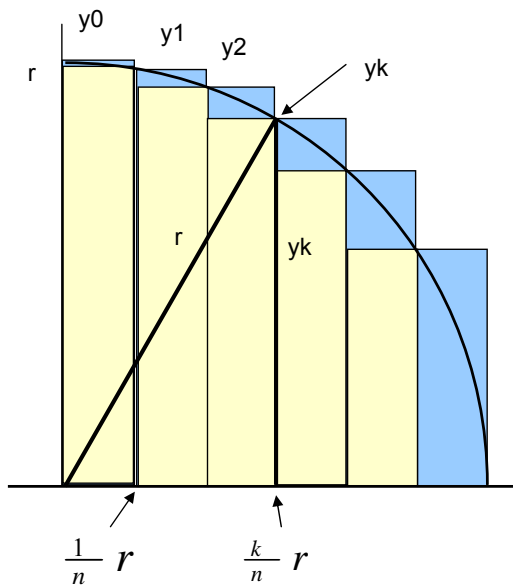
Kreisumfang 6 Excel

## Kreisfläche mit der Balkenmethode



Kreisfläche mit Balkenmethode 1

## Kreisfläche mit der Balkenmethode



$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der entwickelten Formel den Flächeninhalt des Viertelkreises näherungsweise (Ober- und Untersumme) für einen Radius  $r = 1$  LE für  $n=6$  mit Hilfe eines Taschenrechners und für  $n=100$  mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms.

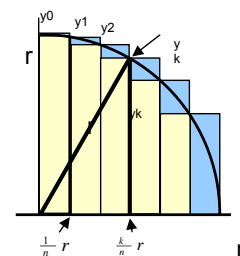
Bestimmen Sie den absoluten und den relativen Fehler, den Sie dabei begehen.

Berechnen Sie aus dem Ergebnis das Verhältnis Kreisfläche / Radiusquadrat.

Kreisfläche mit Balkenmethode 2

## Kreisfläche mit der Balkenmethode

$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

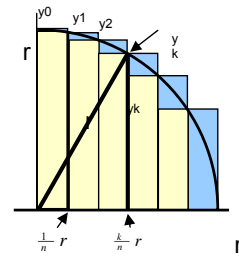


n	r		
100	1		
k	$y_k$	Balken aussen	Balken innen
0	1,0000000	0,01000000	0,009999950
1	0,99995000	0,009999950	0,009999800
2	0,99979998	0,009999800	0,009999550
3	0,99954990	0,009999550	0,009999200
4	0,99919968	0,009999200	0,00998749
5	0,99874922	0,00998749	0,00998198

Kreisfläche mit Balkenmethode 3

## Kreisfläche mit der Balkenmethode

$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

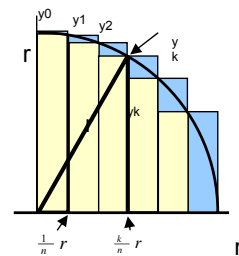


	A	B	C	D
1	n	r		
2	100	1		
3				
4	k	y <sub>k</sub>	Balken aussen	Balken innen
5				
6				
7				

Kreisfläche mit Balkenmethode 4

## Kreisfläche mit der Balkenmethode

$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$

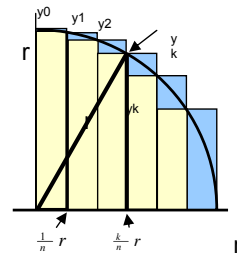


	A	B	C	D
1	n	r		
2	100	1		
3				
4	k	y <sub>k</sub>	Balken aussen	Balken innen
5	0	=WURZEL(1-A5^2/\$A\$2^2)	y <sub>k</sub> = =B5^1/\$A\$2	=B6^1/\$A\$2
6	1	=WURZEL(1-A6^2/\$A\$2^2)	=B6^1/\$A\$2	=B7^1/\$A\$2
7	2	=WURZEL(1-A7^2/\$A\$2^2)	=B7^1/\$A\$2	=B8^1/\$A\$2

Kreisfläche mit Balkenmethode 5

## Kreisfläche mit der Balkenmethode

$$y_k = r \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}$$



98	0,198997487421	0,001989974874	0,001410673598
99	0,141067359797	0,001410673598	0,000000000000
100	0,000000000000	0,000000000000	0,000000000000
Summe		0,790104257945	0,780104257945
Pi-Näherung		3,160417032	3,120417032

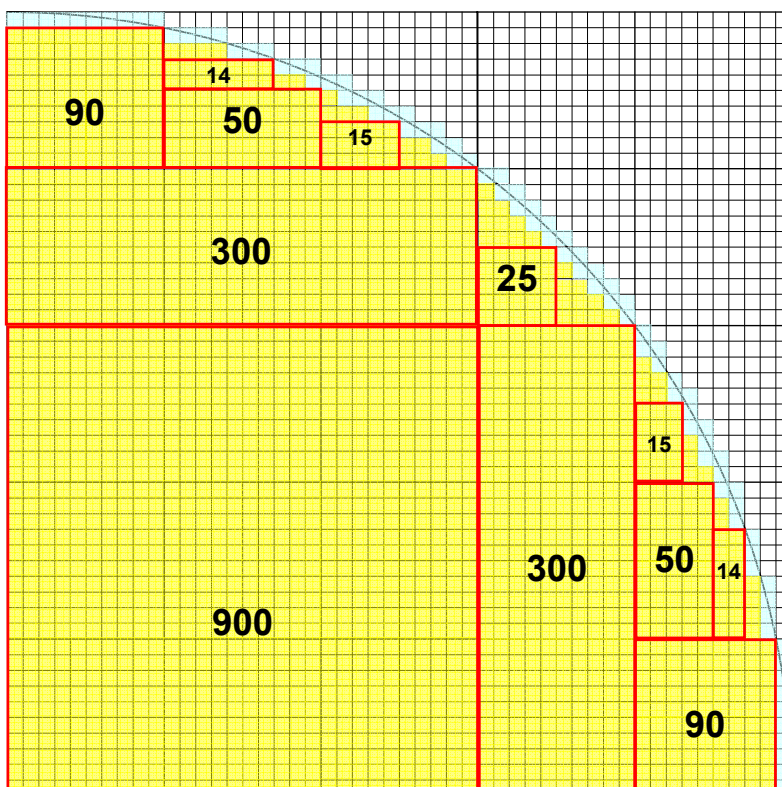
Damit Fehlerintervall bei  $\text{Pi} = 4/100 = 0,04$ .

Prozentualer Fehler  $0,04/3,14 \approx 1,3\%$

Differenz zwischen Obersumme und Untersumme:  
Flächeninhalt des 0. Außenbalkens =  $1/100$ .

Kreisfläche mit Balkenmethode 6

## Kreisfläche mit Kästchenzählen



**1913**

Rest noch zählen ....

$$2 \cdot 25 = 50$$

$$\text{Innenfläche} = 1913 \text{ mm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Fläche Vollkreis} &= \\ 4 \cdot 1913 \text{ mm}^2 &= \\ 7652 \text{ mm}^2 & \end{aligned}$$

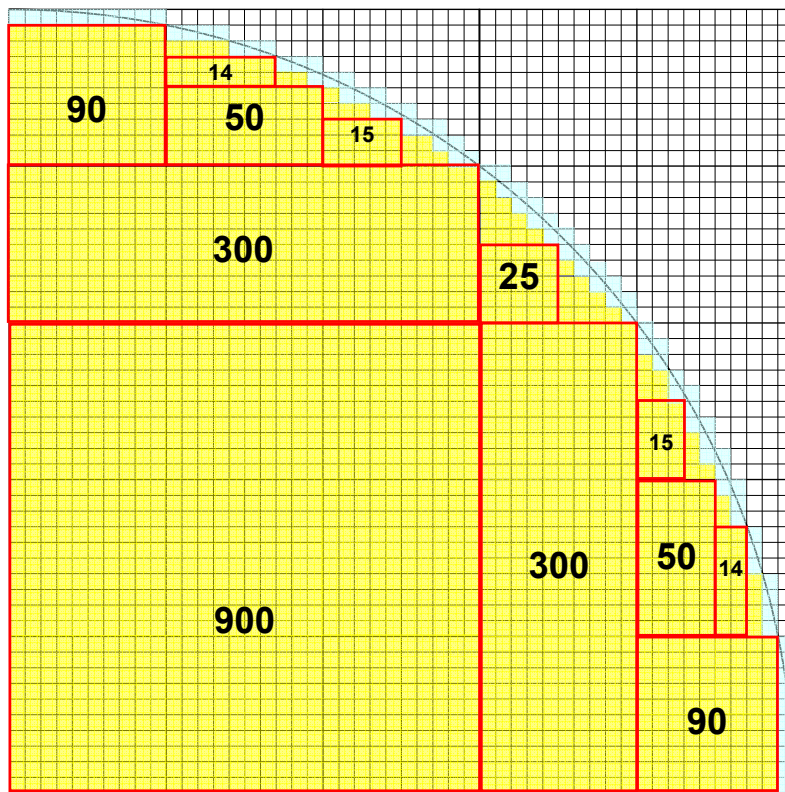
$$\text{Flächen-Pi} =$$

$$7652 / 2500 =$$

**3,061**

Kreisfläche mit Kästchenmethode

## Kreisfläche mit Kästchenzählen



Kreisfläche mit Kästchenmethode

$$\begin{aligned} \text{Außenfläche} &= \\ &1913 \text{ mm}^2 + 89 \text{ mm}^2 \\ &= 2002 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fläche Vollkreis} &= \\ &4 \cdot 2002 \text{ mm}^2 = \\ &8008 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Flächen-Pi} &= \\ &8008 / 2500 \approx \\ &3,20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fehler absolut:} & \\ &0,142 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fehler relativ:} & \\ &0,142 / 3,061 \approx \\ &0,046 = 4,6\% \end{aligned}$$

## Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Wir haben festgestellt, dass für Kreise  $U/d$  und  $A/r^2$  konstant sind.

Wir definieren  $\pi := U/d$ .

Es ist keineswegs offensichtlich, dass  $A/r^2$  die **gleiche** Konstante  $\pi$  ergibt, obwohl die bisher berechneten Näherungswerte dies nahe legen!!!.

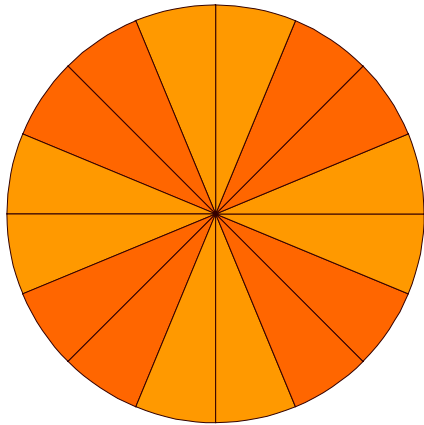
„Flächen-Pi = Umfangs-Pi“ ???

## Problem Kreisfläche und Kreisumfang

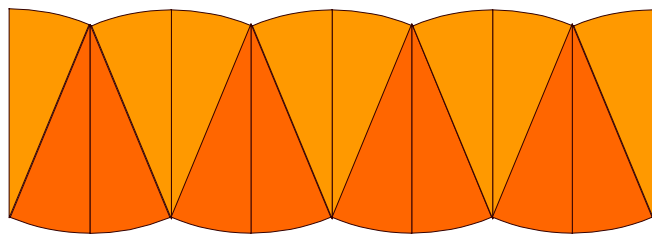
Aufgabe:

Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius 5 cm. Zerschneiden Sie ihn wie in der Zeichnung und legen Sie daraus die neben dem Kreis sichtbare Figur.

Vergleichen Sie den Flächeninhalt des Fast-Rechtecks mit dem des Radiusquadrats. Was ergibt sich daraus für den Flächeninhalt des Kreises?



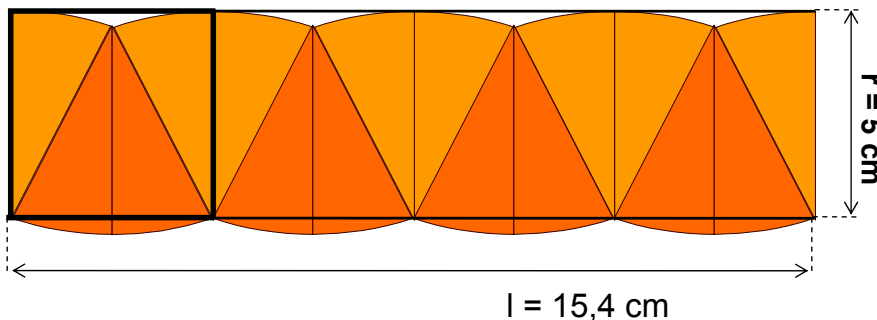
$r = 5 \text{ cm}$



Kreisfläche und Kreisumfang 8

## Problem Kreisfläche und Kreisumfang

Hier eine Skizze des Vergleichs:



$$A_{\text{Quadrat}} = r^2 = 25 \text{ cm}^2$$

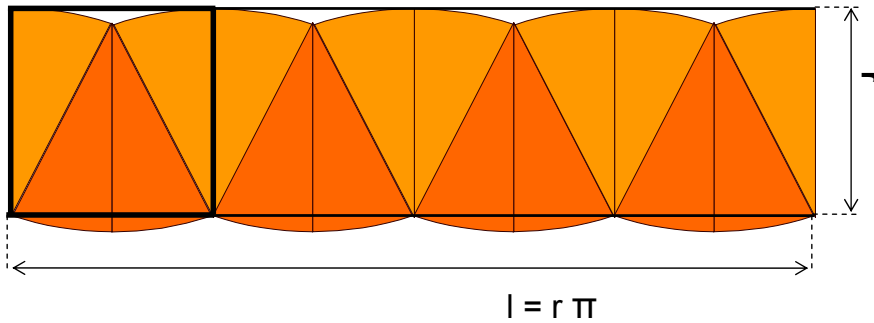
$$A_{\text{Rechteck}} = l \cdot r = 15,4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 77 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A_{\text{Rechteck}}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{77 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2} = 3,08$$

$$A_{\text{Kreis}} \approx 3,1 \cdot r^2$$

Kreisfläche und Kreisumfang 9

## Problem Kreisfläche und Kreisumfang



Begründen Sie mit Hilfe der Skizze, dass für Kreise tatsächlich das Verhältnis

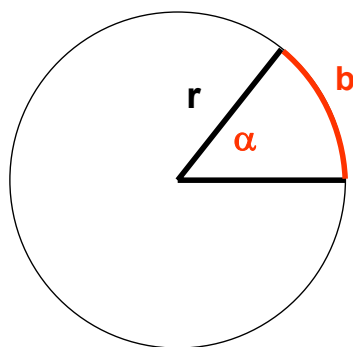
$$A/r^2 = \pi$$

ist.

**„Flächen-Pi = Umfangs-Pi“ !!!**

Kreisfläche und Kreisumfang 10

## Kreisteile: Kreisbogen



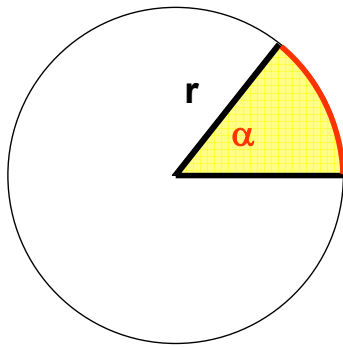
Kreisbogen  $b$  zum Winkel  $\alpha$

Berechnen Sie die Länge des zu  $\alpha$  gehörenden Kreisbogens  $b_\alpha$ .

$$\frac{b_\alpha}{\alpha} = \frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{\pi r}{180^\circ} \Rightarrow$$

$$b_\alpha = \frac{\pi \alpha}{180^\circ} r$$

## Kreisteile: Kreisausschnitt (Kreissektor)



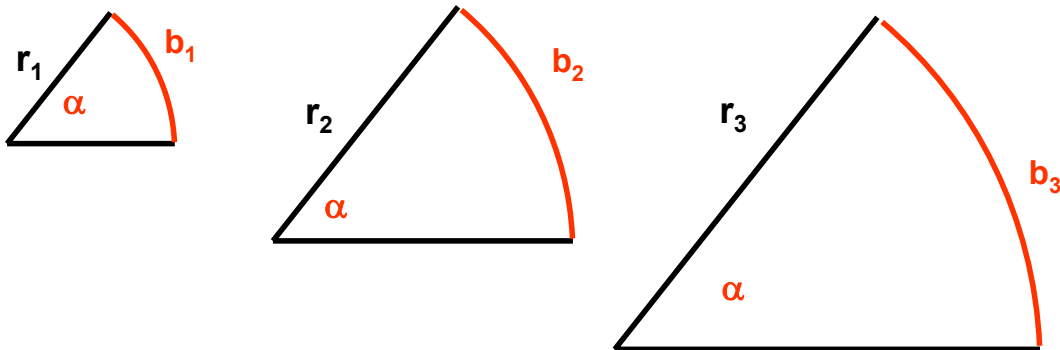
**Kreisausschnitt (Kreissektor)**  
zum Winkel  $\alpha$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des zu  $\alpha$  gehörenden Kreissektors .

$$\frac{A_\alpha}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \quad \Rightarrow \quad A_\alpha = \frac{\pi \alpha}{360^\circ} r^2$$

Kreisteile 2

## Winkelmessung im Bogenmaß



Alle Kreissektoren zum gleichen Winkel  $\alpha$  sind ähnlich.

Damit gilt:  $b_\alpha : r$  ist konstant.

Diese nur von  $\alpha$  abhängige Zahl heißt das Bogenmaß von  $\alpha$  .

Bezeichnung: **arc( $\alpha$ )** (lies: Arcus von  $\alpha$ )

Bogenmaß 1



## Winkelmessung im Bogenmaß

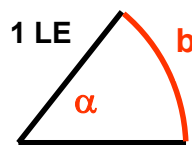
Einheit des Winkels im Bogenmaß: Unbenannte Zahl!  
Verhältnis von zwei Längen!

Oft benennt man die Einheit im Bogenmaß dennoch mit **rad**.

1 rad ist aber einfach nur die Zahl 1.

Andere Definition des Bogenmaßes:

Das **Bogenmaß**  $\text{arc}(\alpha)$  des Winkels  $\alpha$  ist die **Maßzahl** des zu  $\alpha$  gehörenden Winkels im **Einheitskreis**.

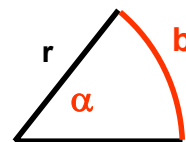


Bogenmaß 2

## Winkelmessung im Bogenmaß

Misst man den Winkel  $\alpha$  im Bogenmaß, dann vereinfacht sich die Berechnungsformel für die Bogenlänge:

Misst man den Winkel  $\alpha$  im Bogenmaß, dann vereinfacht sich die Berechnungsformel für die Bogenlänge:



$$\frac{b}{r} = \text{arc}(\alpha) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

$$b = r \cdot \text{arc}(\alpha)$$

$$A_\alpha = \frac{\pi \alpha}{360^\circ} r^2$$

$$A_\alpha = \frac{1}{2} \text{arc}(\alpha) \cdot r^2$$

Bogenmaß 3

## Winkelmessung im Bogenmaß

Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt.

$$\text{arc}(\alpha) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \qquad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \text{arc}(\alpha)$$

$\alpha$ in $^\circ$	360°	180°	90°	45°	60°	30°	120°	150°	1°
$\text{arc}(\alpha)$									

$\alpha$ in $^\circ$									
$\text{arc}(\alpha)$	$2/3\pi$	$\pi/3$	$\pi/10$	1	2	$3/2\pi$	$\pi/2$	$\pi/4$	

Bogenmaß 4

## Kapitel 2: Räumliche Körper und Rauminhalt

- Der Rauminhalt eines Körpers soll etwas über dessen Größe aussagen,
- der Rauminhaltsbegriff ist intuitiv „irgendwie klar“,
- ab der Grundschule durch Bauen von Körpern mit Würfeln vorbereitet .
- Abgrenzung gegenüber einem anderen Begriff von Größe, der Oberfläche eines Körpers.

Die Definitionen des Rauminhaltsbegriffs werden immer mehr verfeinert, durch den Messprozess festgelegt.

Viele Aussagen über den **Flächeninhalt** und den **Umfang** ebener Figuren lassen sich analog dazu für das **Volumen** und die **Oberfläche** räumlicher Körper entwickeln.

## Definition einer Rauminhaltswfunktion V

V ordnet möglichst vielen Körpern K eine (Maß-)Zahl  $V(K)$  zu, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

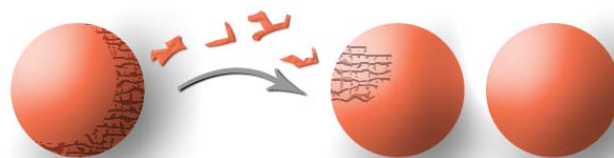
1.  $V(K) \geq 0$  für alle Körper K,
2.  $V(K) = V(K')$   $K'$  kongruent zu K,
3.  $V(K_1 \cup K_2) = V(K_1) + V(K_2)$   $K_1$  und  $K_2$  haben keine gemeinsamen „inneren“ Punkte ,
4.  $V(W_e) = 1$   $W_e$  beliebig gewählter „Einheitswürfel“

Hier werden

- nur die in der Schulmathematik wichtigen Körper behandelt,
- die Methoden bei einigen Beispielen angewandt.

## Banach-Tarski-Paradoxon

Eine Konstruktion der polnischen Mathematiker Stefan Banach und Alfred Tarski von 1924 zeigt eindrücklich, dass man nicht allen von Mathematikern ausgedachten „Körpern“ (Punktmengen im Raum) ein Volumenmaß zuordnen kann.



Danach kann man eine Kugel so in endlich viele „Stücke“ zerlegen, dass sich daraus zwei Kugeln zusammensetzen lassen, die kongruent zur Ausgangskugel sind!!!

Diesen „Stücken“ kann natürlich kein Volumen zugeordnet werden.

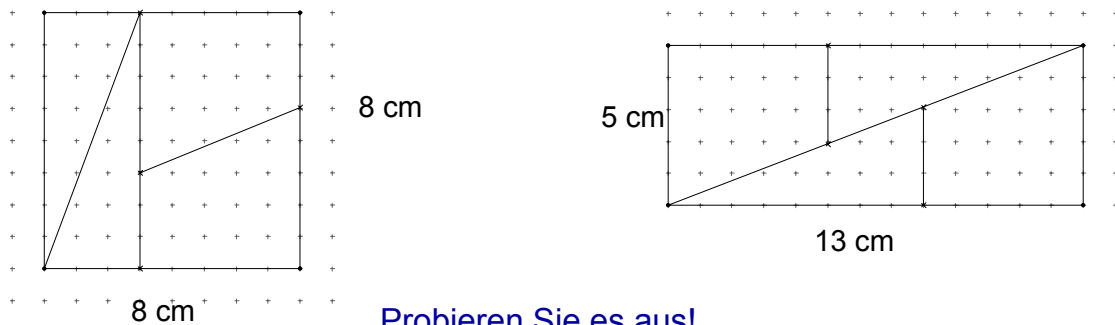
## A.Prilszerzkys-Paradoxon

Das Spektrum der Wissenschaft beschrieb in der März Ausgabe vor vielen Jahren im Zusammenhang mit dem Banach-Tarski-Paradoxon folgende einfache (und seit langem bekannte) Technik des Polen A.Prilszerzky:

Prilszerzky lieh sich Gold, und stellte daraus 1 cm dicke quadratische Goldplatten mit der Seitenlänge 8 cm her.

Er zersägte diese und fügte sie zu rechteckigen Goldplatten mit den Seitenlängen 5 cm und 13 cm zusammen, entsprechend der Skizze unten.

Dann gab er das geliehene Gold zurück und von den übrig bleibenden  $1 \text{ cm}^3$ -Goldwürfelchen konnte er sich einen luxuriösen Lebensstil erlauben.



## Definitionen einiger Körper

Definieren Sie folgende Begriffe (oft zunächst nicht eindeutig):

- Würfel
- Quader
- Prisma (Säule)
- Zylinder
- Pyramide
- Kegel
- Pyramidenstumpf
- Kegelstumpf
- Kugel
- Polyeder
- Senkrecht Prisma
- Senkrechte Pyramide
- Konvexer Körper
- Kreiszyylinder
- Kreiskegel
- Senkrechter Pyramidenstumpf
- Senkrechter Kegelstumpf
- Antiprisma
- Regulärer Körper (Platonischer Körper)

## Lösungshinweise Blatt 1

Aufgabe 1

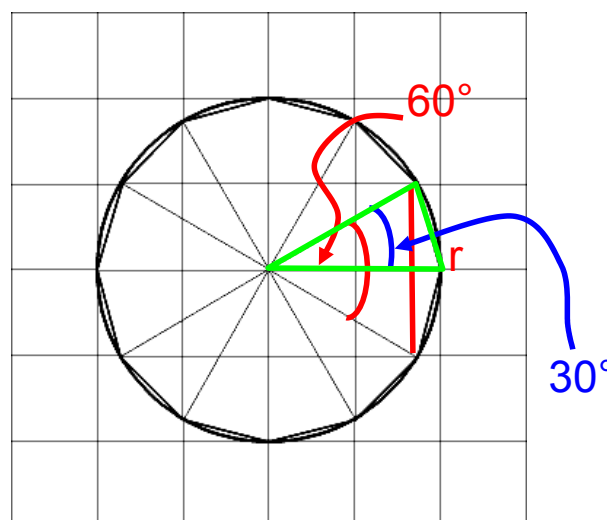
<b>Trapeze</b>
0,1979795897
0,1896311036
0,1716515139
0,1400000000
0,0600000000
<b>Summe</b>
0,7592622072
<b><math>\pi</math></b>
<b>3,0370488289</b>

Der Flächeninhalt der Trapezflächen ist der Mittelwert aus den Flächeninhalten der äußeren und inneren Balken.

Der Näherungswert für  $\pi$  ist daher auch der Mittelwert der oberen und der unteren Schranke aus der Balkenmethode.

## Lösungshinweise Blatt 1

Aufgabe 2



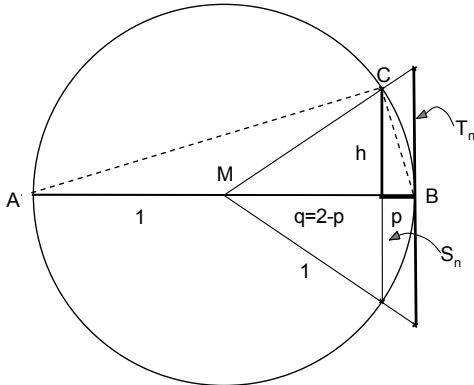
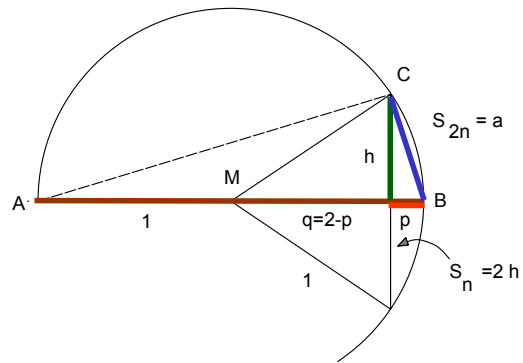
$$A_{12\text{-Eck}} = 12 \cdot A_{\text{grünes Dreieck}} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2} = 3 r^2$$

$$\Rightarrow \pi \approx 3$$

## Lösungshinweise Blatt 1

### Aufgabe 3

$$p = 1 - \sqrt{1 - h^2}$$



$$T_n = \frac{2S_n}{\sqrt{4 - S_n^2}}$$

## Reguläre Körper (Platonische Körper)

Platonische Körper sind Polyeder mit den Eigenschaften

- Sie sind konvex,
- alle Seitenflächen sind zueinander kongruente reguläre Vielecke,
- an jeder Ecke stoßen gleich viele Seitenflächen und Kanten zusammen  
(d.h. die Ecken sind nicht unterscheidbar, zu je zwei Ecken gibt es eine Deckabbildung des Körpers, die eine Ecke auf die zweite abbildet.)

Begründen Sie:

Es gibt höchstens 5 platonische Körper.

Versuchen Sie, diese zu beschreiben und ein Netz zu zeichnen.

## Quellen für die Inhalte zu Formenlehre von Körpern, Volumen- und Oberflächenberechnung

<http://www.mathematische-basteleien.de/index.htm>

<http://www.staff.uni-oldenburg.de/christine.knipping/Skripte/>

<http://www.staff.uni-oldenburg.de/christine.knipping/Skripte/Skripte/Vorl-Wo12.pdf>

Krauter, Erlebnis Elementargeometrie, S.84-90, S.129-142

Beispiele:

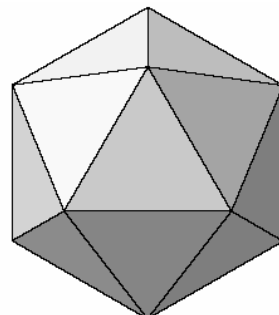
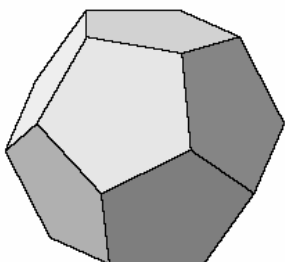
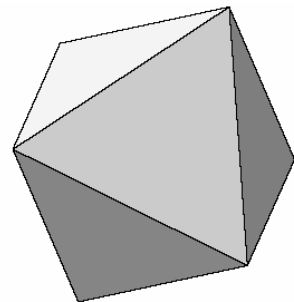
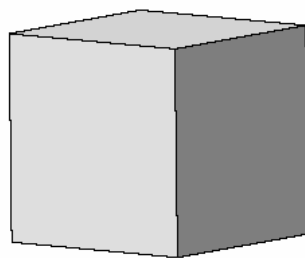
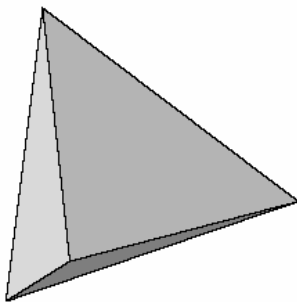
[mathematische-basteleien.de](http://www.mathematische-basteleien.de)

[mathematische-basteleien.de/platonisch.htm](http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm)

[Skripte/Vorl-Wo12.pdf](http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm#Skripte/Vorl-Wo12.pdf)

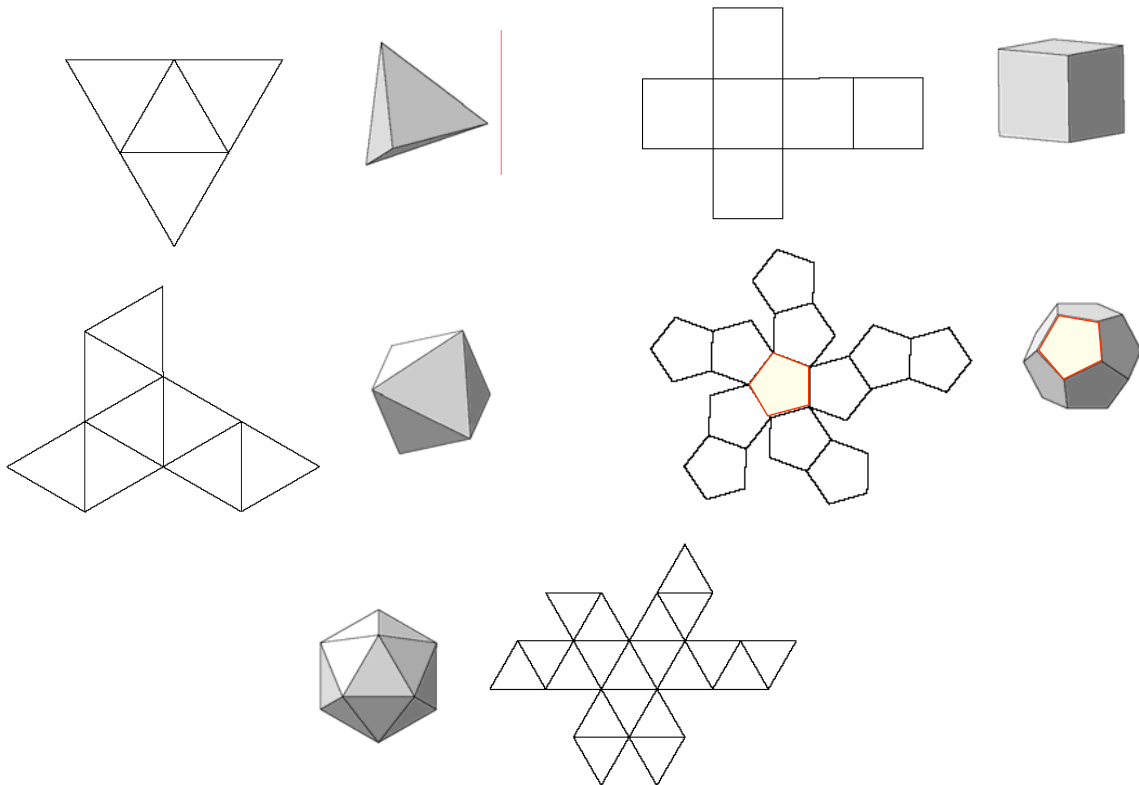
## Reguläre Körper (Platonische Körper)

Die Platonischen Körper

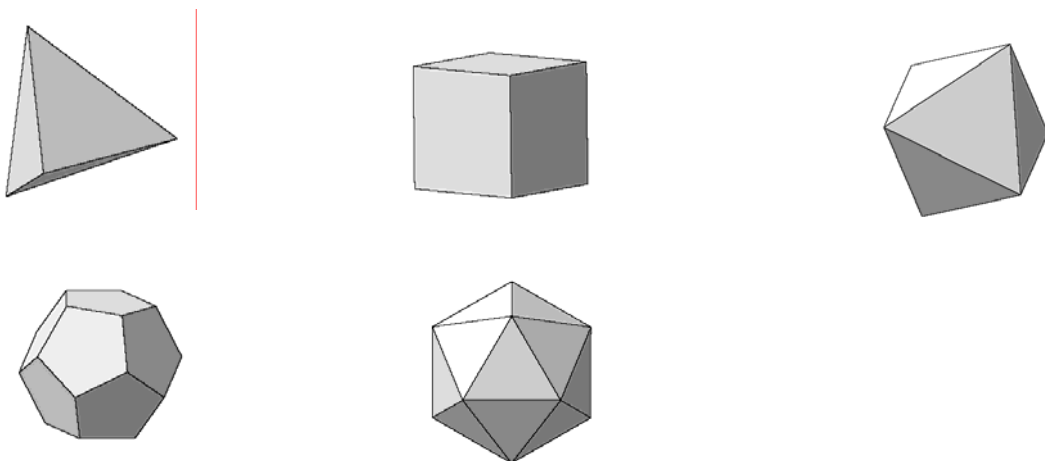


## Reguläre Körper (Platonische Körper)

Die Netze der Platonischen Körper



## Duale Körper



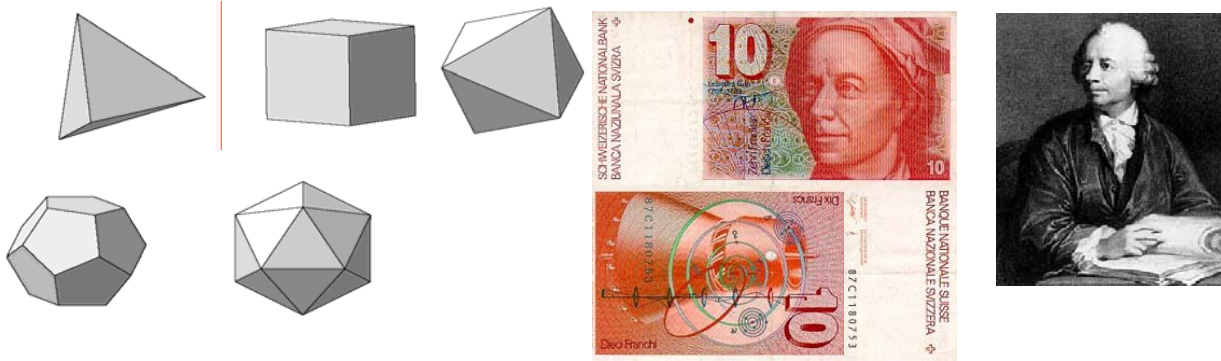
Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen der platonischen Körper, dann entsteht der dazu **duale Körper**, der wiederum platonisch ist.

Geben Sie jeweils den duale Körper an.

Was ist der zum dualen Körper duale Körper? (Was?! Ach so!)



## Eulersche Polyederformel



Für Körper wählen wir folgende Bezeichnungen:

e: Anzahl der Ecken, k: Anzahl der Kanten, f: Anzahl der Flächen.

### Eulersche Polyederformel (Leonhard Euler, 1707 – 1783)

Für jeden konvexen Körper ist  $e + f = k + 2$

Überprüfen Sie die Aussage an den platonischen Körpern.  
Überprüfen Sie die Aussage an weiteren Polyedern Ihrer Wahl.

## Satz von Dehn

In der Ebene konnten wir zeigen:

Jedes Polygon ist zerlegungsgleich zu einem Rechteck (sogar zu einem Quadrat).

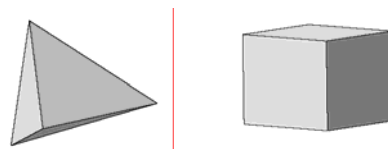
Damit konnten die Flächeninhaltsformeln alleine durch Zerlegen und geeignetes Zusammensetzen auf die Berechnung von Rechtecksflächen zurück geführt werden.

Ein Satz von Max Dehn (1902) zeigt, dass das analoge Vorgehen im Raum nicht möglich ist:

### Satz von Dehn

Ein Tetraeder und ein volumengleicher Würfel sind nicht zerlegungsgleich.

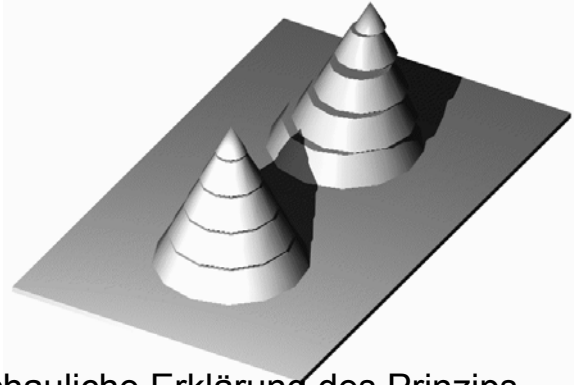
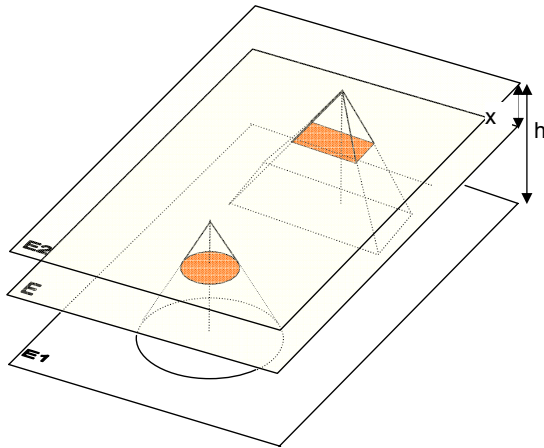
Wir brauchen also neue Prinzipien!



## Das Prinzip von Cavalieri (1598 – 1647)

### Satz von Cavalieri im Raum

Liegen zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen  $E_1$  und  $E_2$ , und sind **in jeder Höhe** die Schnittflächen der beiden Körper mit der zu  $E_1$  parallelen Ebene  $E$  gleich groß, so haben die Körper dasselbe Volumen.



Anschauliche Erklärung des Prinzips,  
kein Beweis!

Wir benutzen den Satz von Cavalieri, um zu zeigen:

**Je zwei Pyramiden (oder Kegel) mit gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche haben das gleiche Volumen.**

- Die Schnittflächen  $Q_1$  und  $Q_2$  gehen durch zentrische Streckung aus den flächeninhaltsgleichen Grundflächen  $G_1$  und  $G_2$  hervor.

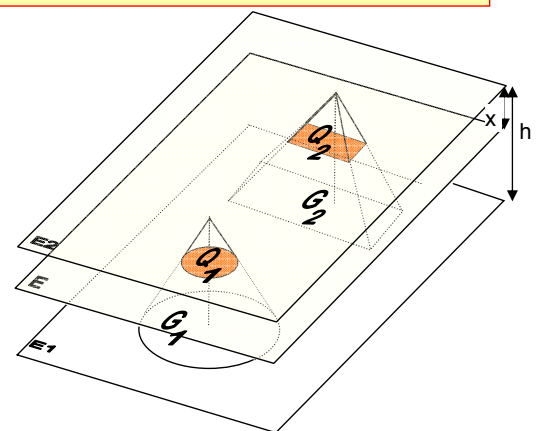
- Der Streckfaktor ist jeweils  $\frac{x}{h}$ .

- Damit ist

$$Q_1 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 G_1 \quad \text{und}$$

$$Q_2 = \left(\frac{x}{h}\right)^2 G_2$$

$Q_1$  und  $Q_2$  haben also gleichen Flächeninhalt.

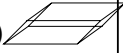


Diesen Zusammenhang werden wir in der folgenden Form später immer wieder benötigen:

$$\frac{Q}{G} = \frac{x^2}{h^2}$$

## Übersicht über die Beweise der Volumenformeln

### Begründung der Formeln **ohne** Prinzip von Cavalieri

Körper	Methode
<b>Quader</b>	Volumenformel folgt aus den Forderungen an eine Volumenfunktion $V$
Senkrechte rechtwinklige <b>Dreiecksprismen</b>	Kongruent ergänzen zu einem <b>Quader</b>
Senkrechte <b>Prismen</b>	Zerlegen in senkrechte <b>Dreiecksprismen</b>
Parallelfläch (Spat, Parallelepipid) 	Zerlegungsgleich zu einem Quader
Schiefe rechtwinklige Dreiecksprismen	Kongruent ergänzen von zu einem Parallelfläch
Schiefe Prismen	Zerlegen in schiefe rechtwinklige Dreiecksprismen
<b>Zylinder</b> und schiefe Zylinder	Grenzwertbetrachtungen: Körper als <b>Grenzkörper</b> geeigneter <b>Prismen</b>

### Begründung der Formeln **mit** Prinzip von Cavalieri

Körper	Methode
Dreieckspyramide mit der Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche $G$	Durch 2 Pyramiden, die zur Ausgangspyramide volumengleich sind, zu einem <i>senkrechten</i> Prisma mit Grundfläche $G$ ergänzen. Nachweis der Volumengleichheit mit dem Satz des Cavalieri.
Beliebige Dreieckspyramide mit Grundfläche $G$ und Höhe $h$	Rückführung auf den Fall einer Dreieckspyramide mit der Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche $G$ mit Höhe $h$ (nochmals Satz des Cavalieri)
Beliebige Pyramide	Zerlegung der Grundfläche in Dreiecke und damit der Pyramide in Dreieckspyramiden gleicher Höhe.
Kegel	Grenzwertbetrachtungen: Körper als <b>Grenzkörper</b> geeigneter <b>Pyramiden</b>
Pyramiden- oder Kegelstümpfe	Differenz von Volumina von Pyramiden oder Kegeln (Strahlensätze)
Kugel	Vergleich mit Zylinder mit ausgesparten Kegel (Strahlensatz und Satz des Cavalieri). Mathematisch korrekte Begründung der Ergebnisse der Umfüllversuche aus der SI.

## Alternativen mit Prinzip von Cavalieri oder Grenzwertbetrachtungen

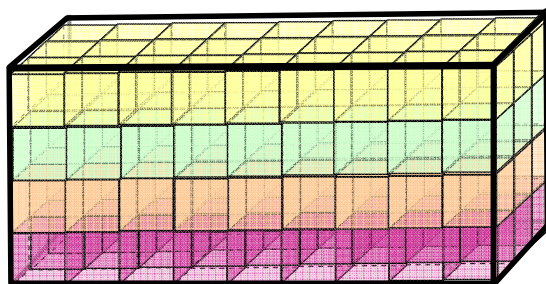
Körper	Methode
Beliebige Dreieckspyramide mit Grundfläche G und Höhe h	Durch 2 Pyramiden, die zur Ausgangspyramide volumengleich sind, zu einem <b>schiefen</b> Prisma mit Grundfläche G ergänzen und Höhe h. Nachweis der Volumengleichheit mit dem Satz des Cavalieri. (Beweis direkter, aber weniger anschaulich)
Beliebige Dreieckspyramide	Pyramide durch Treppenkörper aus senkrechten Prismen annähern. Analog zur Annäherung der Kreisfläche durch Rechtecke. Benötigt Summenformel für Quadratzahlen.
Kegel	Kegel durch Treppenkörper aus senkrechten Zylindern annähern.
Kugel	Kugel durch Treppenkörper aus senkrechten Zylindern annähern. Benötigt Summenformel für Quadratzahlen.

## Quader

Quader, deren Kantenlänge rationale Vielfache a, b, c der Längeneinheit sind.

Wie bei der Berechnung von Flächeninhalten der Rechtecke erhalten wir auch hier wieder aus den Eigenschaften der Volumenfunktion V

$$V(\text{Quader}) = a \cdot b \cdot c \cdot V(W_e) \quad , \quad W_e \text{ Einheitswürfel}$$

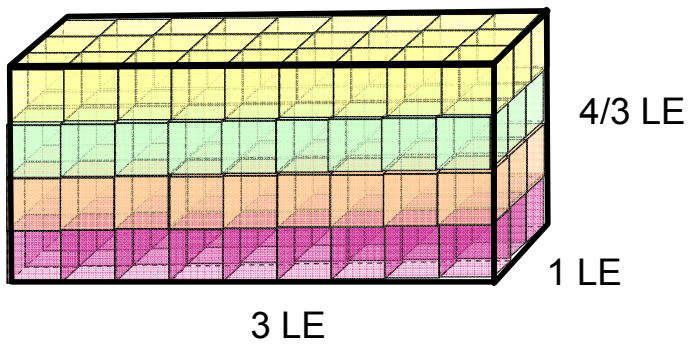


Geeigneter  
rationaler Bruchteil  
des Einheitswürfels  
 $W_e$

a LE

Dies kann auch als Formel  $V = G \cdot h$  aufgefasst werden.

Im Bild soll  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 4/3$  sein.

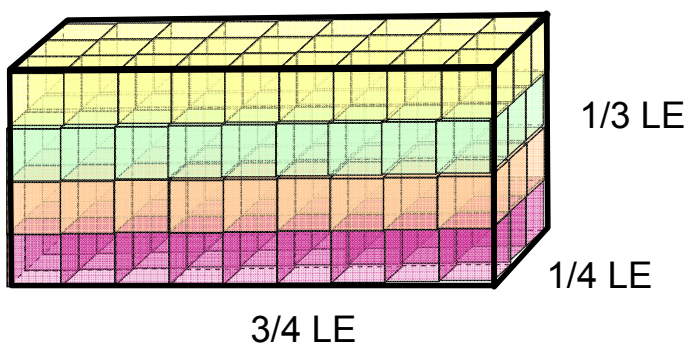


Geeigneter  
rationaler Bruchteil  
des Einheitswürfels  
 $W_e$

- Welchen Anteil des Einheitswürfels stellt das kleine gelbe Würfelchen dar?
- Begründen Sie damit die Formel

$$V(\text{Quader}) = a \cdot b \cdot c \cdot V(W_e) \quad , \quad W_e \text{ Einheitswürfel}$$

Im Bild soll jetzt  $a = 3/4$ ,  $b = 1/4$ ,  $c = 1/3$  sein.



Geeigneter  
rationaler Bruchteil  
des Einheitswürfels  
 $W_e$

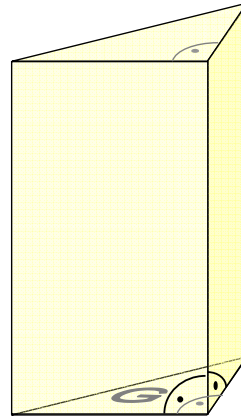
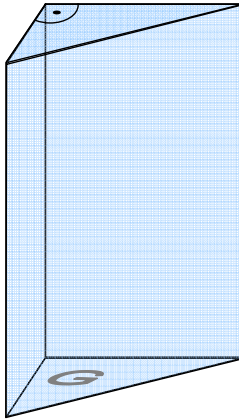
- Welchen Anteil des Einheitswürfels stellt jetzt das kleine gelbe Würfelchen dar?
- Begründen Sie auch damit die Formel

$$V(\text{Quader}) = a \cdot b \cdot c \cdot V(W_e) \quad , \quad W_e \text{ Einheitswürfel}$$

## Rechtwinkliges Dreiecksprisma

Gegeben ist ein Dreiecksprisma, dessen Grundfläche  $G$  ein rechtwinkliges Dreieck ist (Rechtwinkliges Dreiecksprisma).

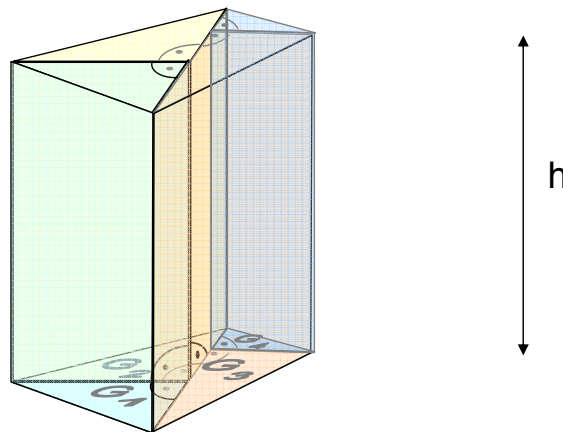
Wir ergänzen dieses durch ein dazu kongruentes zu einem Quader



$$\Rightarrow V(\text{Quader}) = 2G \cdot h \quad \Rightarrow \quad V(\text{Prisma}) = G \cdot h$$

## Beliebige senkrechte Prismen

Gegeben ist ein beliebiges senkrecht Prisma mit der Grundfläche  $G$ .

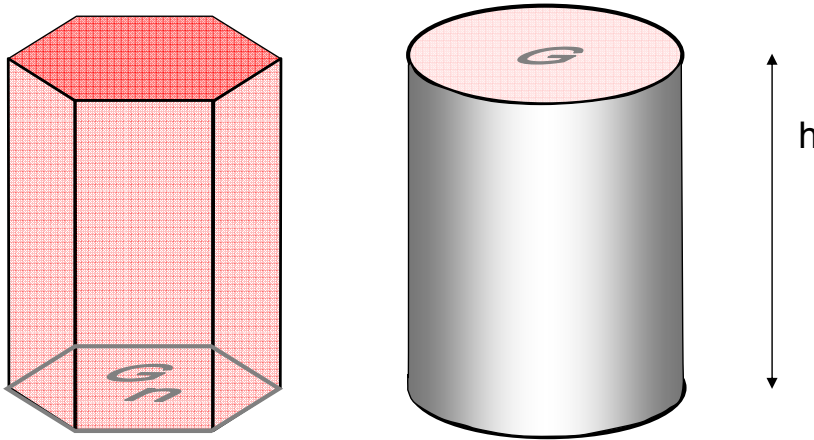


$G$  wird in rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die das Prisma dann in senkrechte rechtwinklige Dreiecksprismen mit Grundseiten  $G_1, G_2, \dots, G_n$  aufteilen.

$$\begin{aligned} V(\text{Prisma}) &= G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h + G_4 \cdot h \\ &= (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \cdot h = G \cdot h \end{aligned}$$

## Zylinder

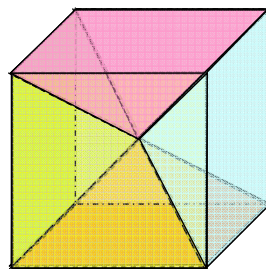
Ein Zylinder mit einem Kreis als Grundfläche  $G$  und der Höhe  $h$  kann von innen und außen durch Prismen beliebig genau angenähert werden.



$$\begin{aligned} V(\text{Zylinder}) &= \text{Grenzwert von } V(\text{n-Ecksprisma}) = \text{Grenzwert von } G_n \cdot h \\ &= G \cdot h \end{aligned}$$

## Pyramiden

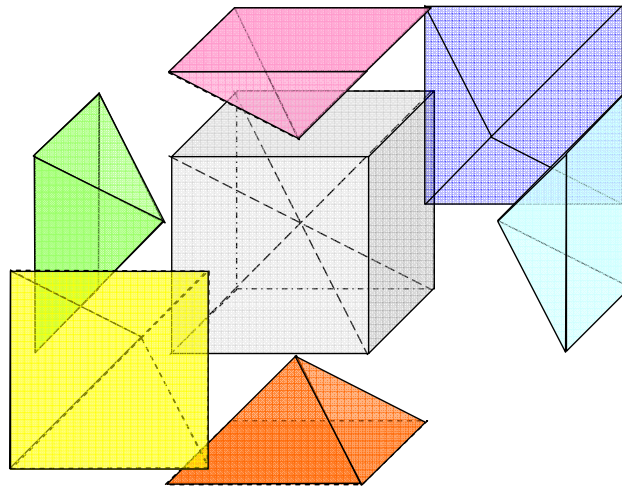
Hinführung zur Berechnungsformel:



Verbinde alle Eckpunkte eines Würfels mit dem Würfelmittelpunkt.  
Wie viele Pyramiden entstehen?

## Pyramiden

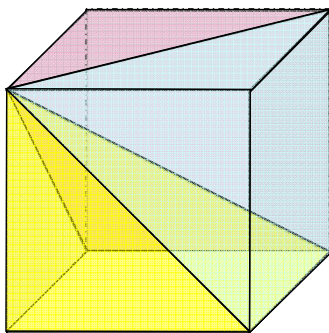
Hinführung zur Berechnungsformel:



$$\begin{aligned}V(\text{Pyramide}) &= 1/6 V(\text{Würfel}) = 1/6 a^3 = 1/6 a^2 \cdot a \\ &= 1/3 a^2 \cdot a/2 \\ &= 1/3 G \cdot h\end{aligned}$$

## Pyramiden

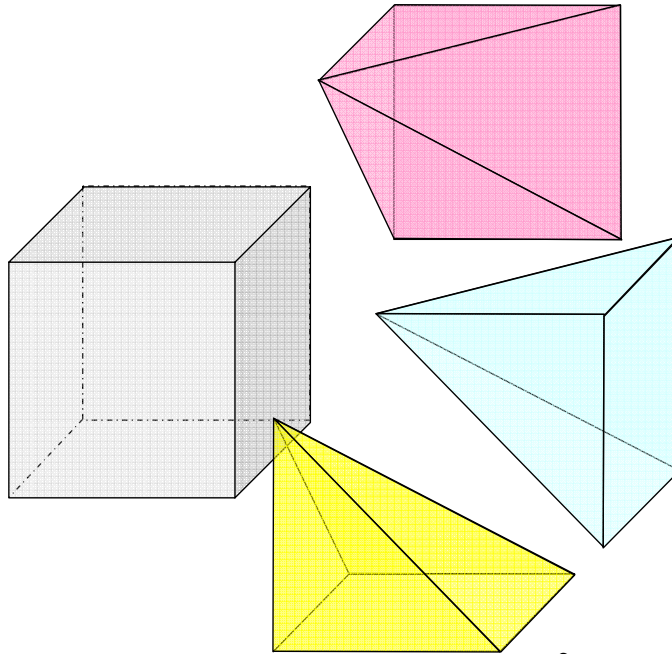
Andere Zerlegung



Verbinde einen Eckpunkte eines Würfels mit den benachbarten Eckpunkten, so dass 3 Pyramiden entstehen.



## Pyramiden



$$\begin{aligned} V(\text{Pyramide}) &= \frac{1}{3} V(\text{Würfel}) = \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} a^2 \cdot a \\ &= \frac{1}{3} G \cdot h \end{aligned}$$

## Spezielle Dreiecksprismen

Gegeben ist eine Pyramide, bei der die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche  $G$  liegt.

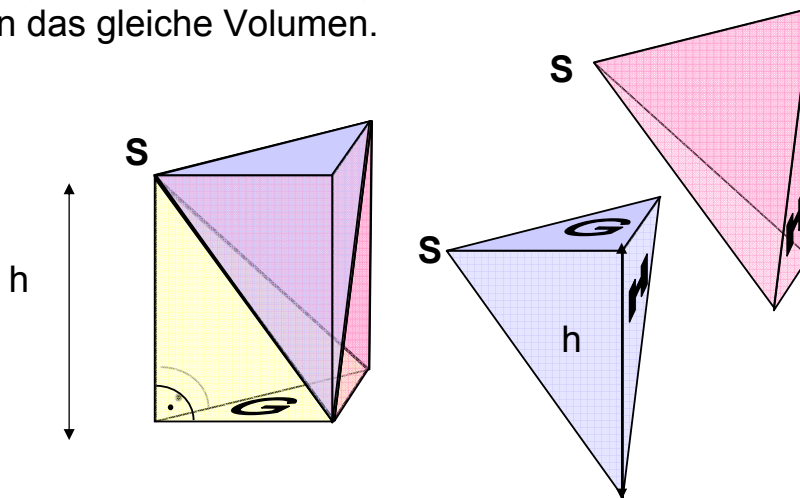


Wir ergänzen diese Pyramide durch 2 weitere Pyramiden, so dass ein senkrecht Dreiecksprisma entsteht.

## Spezielle Dreieckspyramiden

Wir erinnern uns:

Zwei Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben das gleiche Volumen.



Alle drei Pyramiden haben das gleiche Volumen  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} V(\text{Pyramide}) &= 1/3 V(\text{Dreiecksprisma}) \\ &= 1/3 G \cdot h \end{aligned}$$

## Pyramiden allgemein

Zu jeder **Dreieckspyramide** kann man eine Dreieckspyramide finden, bei der die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche  $G$  liegt und die gleiche Höhe hat.

Damit stimmt die Formel auch für beliebige Dreieckspyramiden.

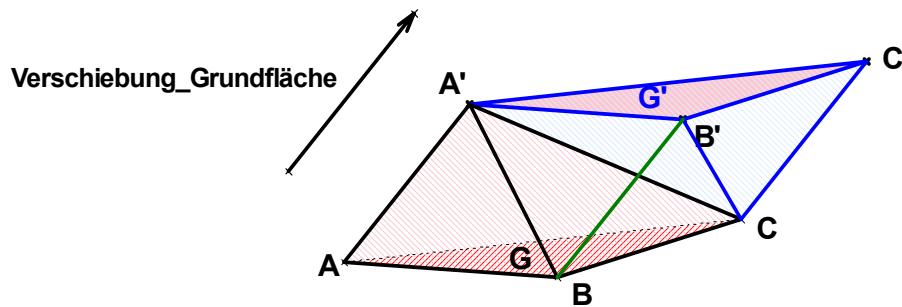
Analog zur allgemeinen Volumenformel für Prismen sieht, man, dass jede Pyramide in Dreieckspyramiden zerlegt werden kann.

Daraus gewinnt man die Formel auch für den allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} V(\text{Pyramide}) &= 1/3 G_1 \cdot h + 1/3 G_2 \cdot h + \dots + 1/3 G_n \cdot h \\ &= 1/3 (G_1 + G_2 + \dots + G_n) \cdot h = 1/3 G \cdot h \end{aligned}$$

## Dreieckspyramiden: Alternative

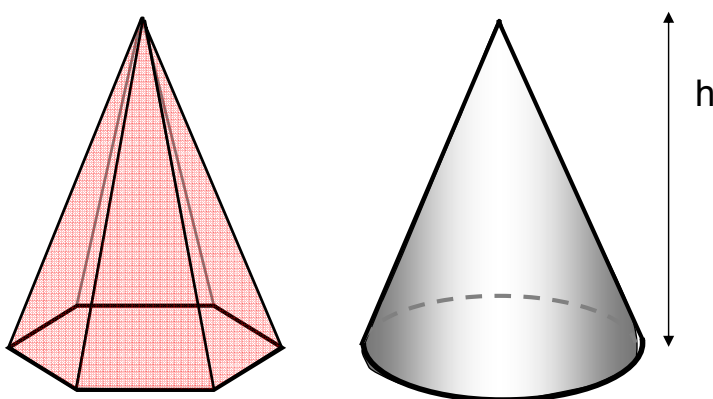
Statt mit speziellen Dreieckspyramiden (bei der die Spitze senkrecht über einer Ecke der Grundfläche  $G$  liegt) zu arbeiten kann man die Ergänzung zu schiefen Prismen auch unmittelbar durchführen, analog zur zuvor durchgeführten Konstruktion. Mit einem dynamischen Geometrieprogramm (DynaGeo) kann man dies gut veranschaulichen.



Die Pyramiden mit den kongruenten Grundflächen  $G$  und  $G'$  und den Spitzen  $A'$  (schwarz) bzw.  $C'$  (blau) haben offensichtlich gleiche Höhe und daher gleiches Volumen. Das Viereck  $BCC'B'$  ist ein Rechteck (Verschiebung von  $BC$  senkrecht zu  $BC$  auf  $B'C'$ ). Daher sind die Dreiecke  $BCB'$  und  $CC'B'$  flächeninhaltsgleich. Die Pyramiden mit diesen Dreiecken als Grundflächen und der Spitze  $A'$  (blau und grün) haben wiederum gleiche Höhe und daher auch gleiches Volumen.

## Kegel

Ein Kegel mit einem Kreis als Grundfläche  $G$  und der Höhe  $h$  kann von innen und außen durch Pyramiden beliebig genau angenähert werden.

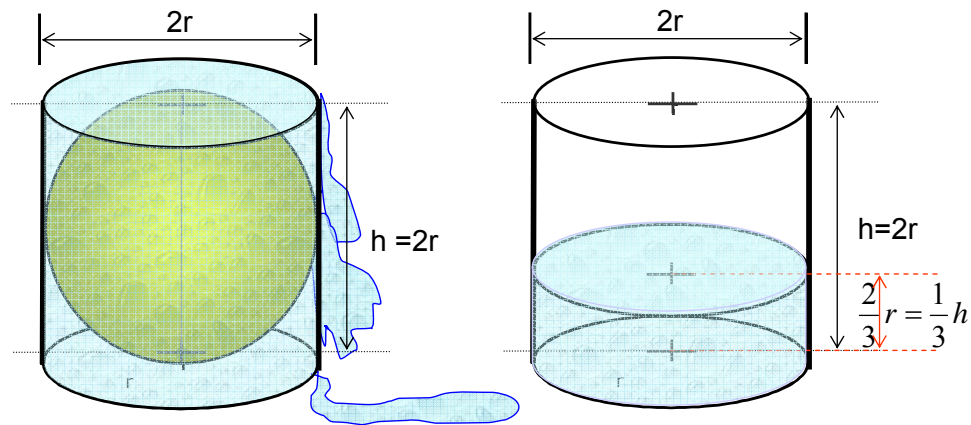


$$\begin{aligned} V(\text{Kegel}) &= \text{Grenzwert von } V(n\text{-Pyramide}) = \text{Grenzwert von } \frac{1}{3} G_n \cdot h \\ &= \frac{1}{3} G \cdot h \end{aligned}$$

# Kugel

Experimentell (Schule):

Um das Volumen einer Kugel zu bestimmen, wird eine Kugel in einen geeigneten mit Wasser gefüllten Zylinder eingetaucht ( $h=2r$ ). .



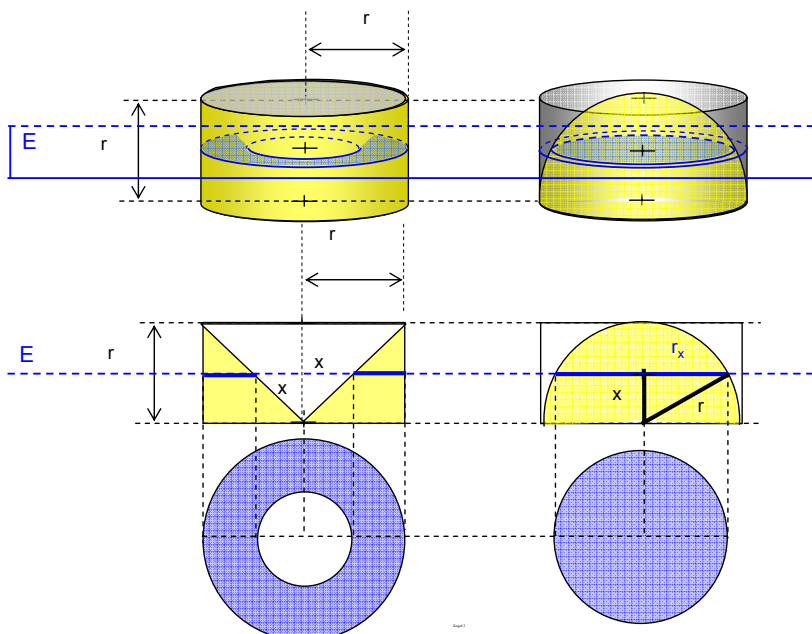
Wird die Kugel wieder entfernt, bleibt  $\frac{1}{3}$  des Wassers noch übrig.

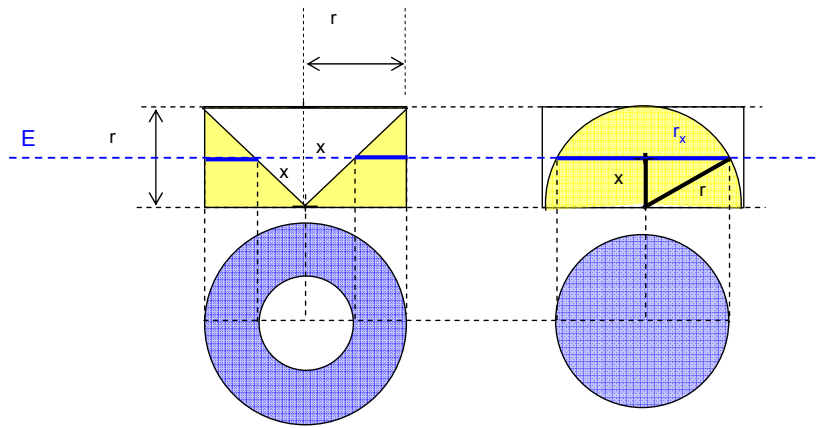
Das lässt vermuten:  $V_{\text{Kugel}} = \frac{2}{3} V_{\text{Zylinder}} = \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi r^3$

Um diese Vermutung exakt zu bestätigen, vergleichen wir das Volumen einer Halbkugel mit dem Volumen des Restkörpers aus einem Zylinder mit Radius und Höhe  $r$ , aus dem ein Kegel mit der Höhe und dem Radius  $r$  entfernt wurde.

Wir zeigen mit Hilfe des Satzes von Cavalieri, dass diese Volumina gleich sind.

Da der Kegel  $\frac{1}{3}$  des Zylindervolumens einnimmt, wird damit die Vermutung bestätigt.





Es genügt zu zeigen, dass die Schnittflächen der beiden Körper mit jeder zur Grundfläche parallelen Ebene E in der Höhe x den gleichen Flächeninhalt haben.

Kreisring in der Höhe x:

Der innere Kreis hat offensichtlich den Radius x.  $\Rightarrow$

$$A_{\text{Ring}} = \pi r^2 - \pi x^2 = \pi (r^2 - x^2)$$

Kreisfläche, in der Höhe x aus der Kugel ausgeschnitten:

$$\text{Radius } r_x^2 = r^2 - x^2 \quad \Rightarrow$$

$$A_{\text{Kreis}} = \pi (r^2 - x^2)$$

Damit ist gezeigt:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{2}{3} V_{\text{Zylinder}} = \frac{2}{3} r^2 \pi \cdot 2r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

## Oberfläche und Mantel

Bei Prismen und Pyramiden wird die Berechnung auf die Berechnung geeigneter Polygone zurückgeführt.

Methoden um fehlende Längen zu erhalten:

- Zentrische Streckung, Strahlensätze, Ähnlichkeit
- Satzgruppe des Pythagoras
- Trigonometrie

Zu speziellen Formeln für regelmäßige Prismen und Pyramiden  $\rightarrow$  Übungen

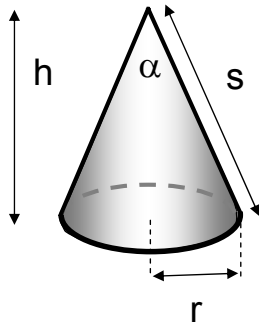
Beweisen Sie:

Für regelmäßige Pyramiden, Pyramidenstümpfe, Kegel und Kegelstümpfe gilt für die Mantelfläche M

$$M = \text{mittlerer Umfang} \cdot \text{Seitenhöhe}$$

Präzisieren Sie die in hier vorkommenden Begriffe.

## Kegelmantel und Oberfläche



Ein Kegel sei mit der Höhe  $h = 5$  cm und  $r = 3$  cm sei gegeben.

Fertigen Sie eine Skizze des Mantels.

Berechnen Sie

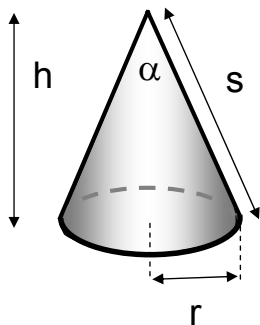
- die Länge der Seitenlinie  $s$ ,
- den Öffnungswinkel  $\alpha$ ,
- die Größe der Mantelfläche
- die Oberfläche.

Zeichnen Sie die Mantelfläche genau.

Wie hängen die einzelnen Größen zusammen?

Schreiben Sie die Beziehungen zwischen den Größen auf.

Beweisen Sie die in Ihrer Formelsammlung angegebenen Formeln.



Ein Kegel mit der Seitenlinie  $s = 5$  cm und einem Öffnungswinkel von  $\alpha = 40^\circ$  sei gegeben.

Zeichnen Sie den Mantel so, dass Sie daraus ein Modell des Kegels bauen können.

## Kugeloberfläche

Um die Oberfläche einer Kugel mit Radius  $r$  zu berechnen stellt man sich die Kugel in „kleine“ Kugelsektoren zerlegt vor, die annähernd Pyramiden sind.

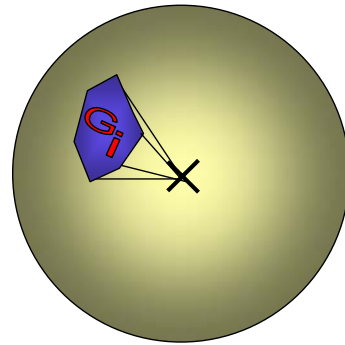
$$\begin{aligned}\text{Es ist } V_{\text{Kugel}} &= \text{Summe aller Pyramidenvolumen} \\ &= \text{Summe } (1/3 r G_i) \\ &= 1/3 r (\text{Summe } G_i) \\ &= 1/3 r O_{\text{Kugel}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Kugel}} = 1/3 \cdot r \cdot O_{\text{Kugel}}$$

$$\Rightarrow O_{\text{Kugel}} = 3/r \cdot V_{\text{Kugel}}$$

$$\Rightarrow \quad \quad = 3/r \cdot 4/3 \pi r^3$$

$$\Rightarrow O_{\text{Kugel}} = 4 \pi r^2$$



## Kapitel 3: Zeichnerische Darstellung von Körpern

### Darstellung von Körpern in der Ebene.

Quelle im Wesentlichen: Krauter, Elementargeometrie S.1-17

**Ziel bei der Darstellung von räumlichen Figuren (Körpern):**

**anschaulich**

-

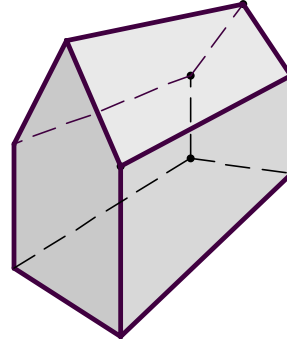
**maßgerecht**

## Zentralprojektion – möglichst anschaulich

Bei einer Zentralprojektion wird ein Körper durch *Projektionsstrahlen*, die alle *durch ein gemeinsames Zentrum* verlaufen, auf eine Ebene projiziert.

### Zentralprojektion ist

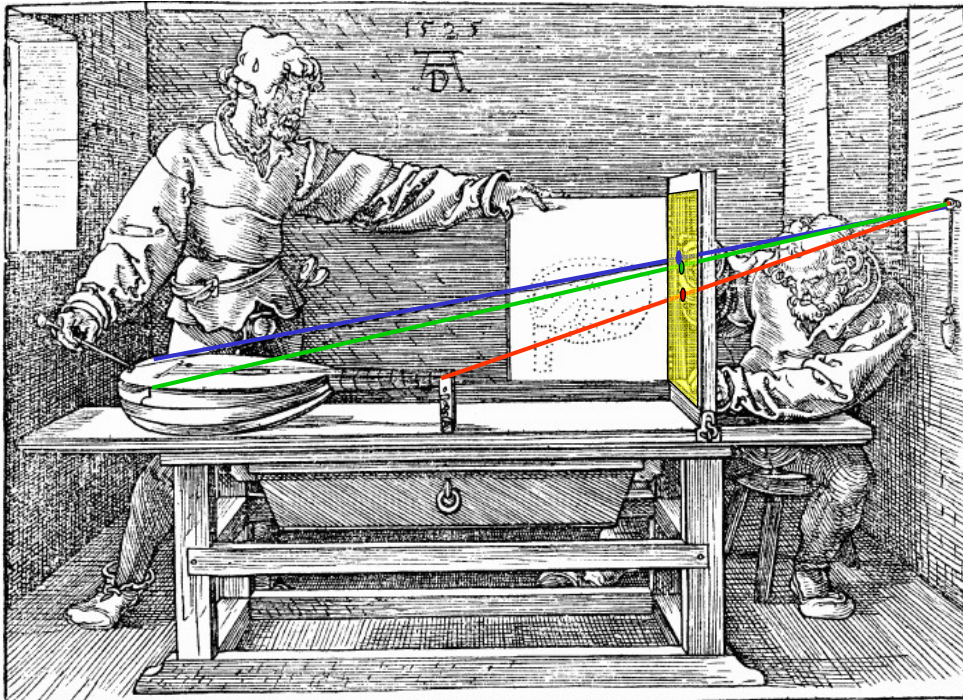
- sehr anschaulich
- wenig maßgerecht
- nicht teilverhältnistreu
- nicht parallelentreu
- konstruktiv aufwendig



Was tritt an die Stelle von

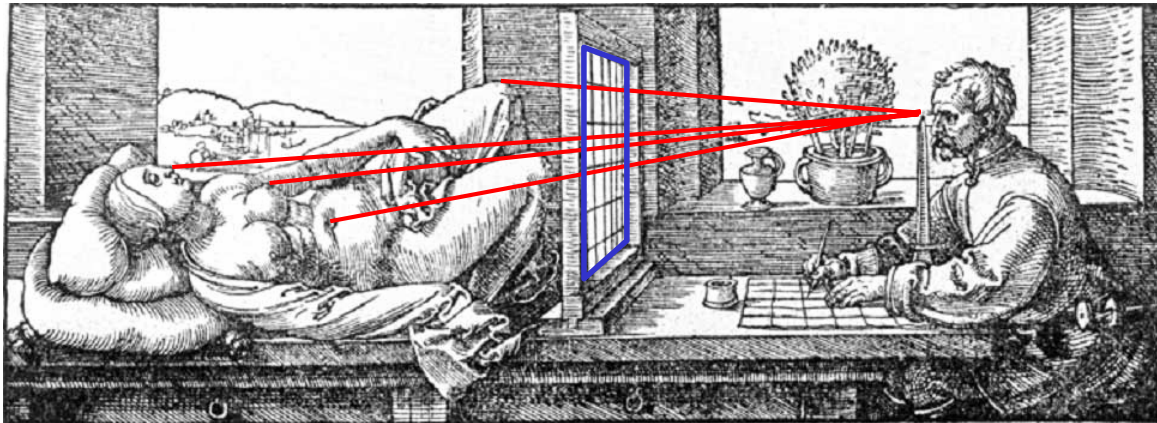
- Parallelentreue?
- Teilverhältnistreu?

### Beispiel aus der Kunst: Albrecht Dürer, Malerei der Renaissance



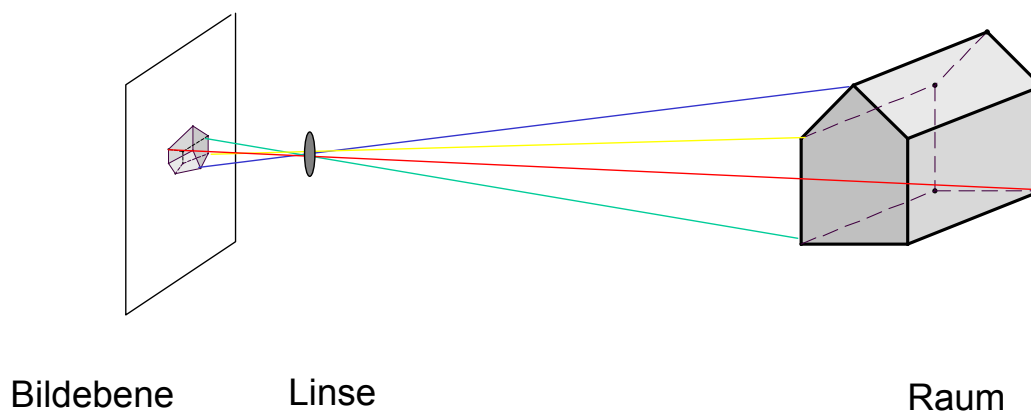


Albrecht Dürer



Bei der Zentralprojektion wird ein Körper durch *Projektionsstrahlen*, die alle durch ein gemeinsames *Zentrum* - hier das *Auge* - verlaufen, auf eine *Ebene* - hier das *Hilfsgitter* - projiziert.

Kameralinse

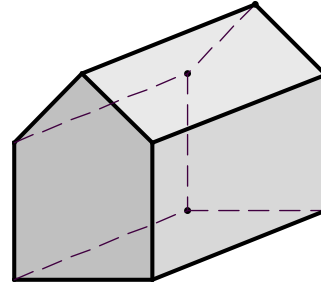


## Parallelprojektion – möglichst maßgerecht

Bei einer Parallelprojektion wird ein Körper im Raum durch zueinander **parallele Projektionsstrahlen** auf eine Ebene projiziert.

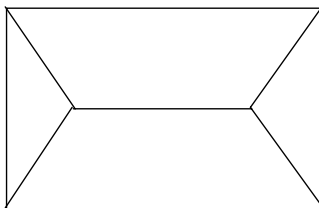
### Parallelprojektion ist

- etwas weniger anschaulich
- weitgehend maßgerecht
- teilverhältnistreu
- parallelentreu
- konstruktiv einfach

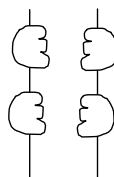


## Senkrechte Parallelprojektion

Bei einer senkrechten Parallelprojektion wird der Raum durch zueinander **parallele Projektionsstrahlen** auf eine Ebene projiziert auf der die Projektionsstrahlen senkrecht stehen.



Grundriss eines Hauses



Drudel

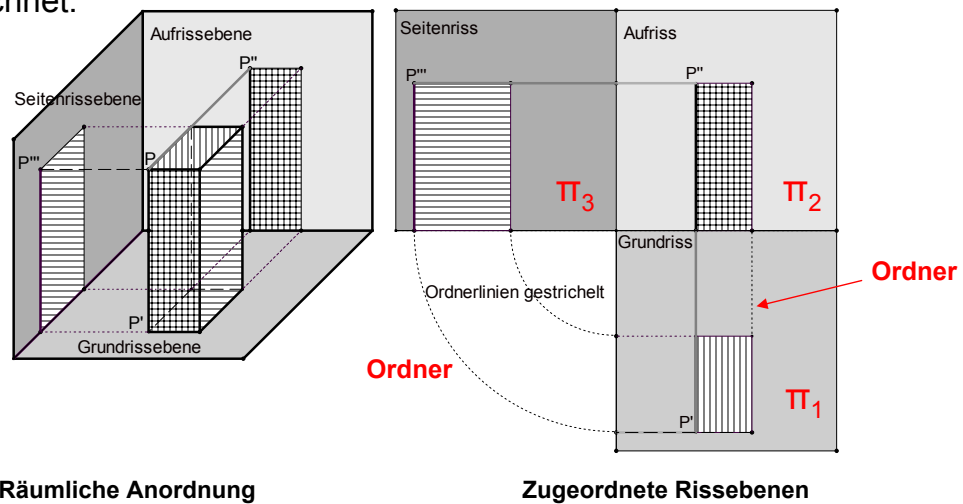
Da die Projektion nicht bijektiv ist, kann man aus dem Bild das Urbild ohne weitere Angaben nicht mehr eindeutig rekonstruieren.

Man kann zu einer solchen Projektion zusätzliche Angaben über den Abstand der Punkte zur Bildebene machen. Dann ist die Rekonstruktion wieder möglich.

Wo trifft man dieses Verfahren im Alltag?

## Dreitafelprojektion (Grundriss, Aufriss, Seitenriss)

Eine weitere Möglichkeit ist die Angabe einer zweiten senkrechten Parallelprojektion auf eine Ebene, die senkrecht zur ersten steht. Üblicherweise wird die erste Projektion als **Grundriss** und die zweite als **Aufriss** bezeichnet.



Aus dem Grundriss und dem Aufriss lässt sich die senkrechte Parallelprojektion auf eine dritte, zu Grund- und Aufrissebene senkrechte Projektionsebene eindeutig konstruieren: Diese nennt man **Seitenriss**.

## Dreitafelprojektion (Grundriss, Aufriss, Seitenriss)

**Senkrechte Parallelprojektion** auf drei zueinander senkrechte Projektionsebenen.

Projektion auf die horizontale Standebene: **Grundriss (Draufsicht)**

Projektion auf eine frontal stehende vertikale Ebene: **Aufriss (Vorder- oder Frontansicht)**

Projektion auf eine zu den beiden vorhergehenden senkrecht stehende dritte Ebene : **Seitenriss (Seitenansicht)**.

**Ordnerlinien:** Spuren beim Eindrehen der Rissebenen in die Zeichenebene

**Abstand eines Raumpunktes P von der Aufrissebene:**

im Grundriss (und im Seitenriss) *in wahrer Größe* als Abstand des Punktes P' bzw. P''' von der jeweiligen Rissachse

**Alle ebenen Figuren im Raum, die zu der betreffenden Projektionsebene parallel sind, werden jeweils in wahrer Größe dargestellt.**

### Beispiel:

Haus mit  $l = 10\text{ m}$ ,  $b = 8\text{ m}$ , Traufhöhe  $h_1 = 5\text{ m}$ , Firsthöhe  $h_2 = 3\text{ m}$

#### 1. Rissachsen

#### 2. Grundriss des Hauses in wahrer Größen.

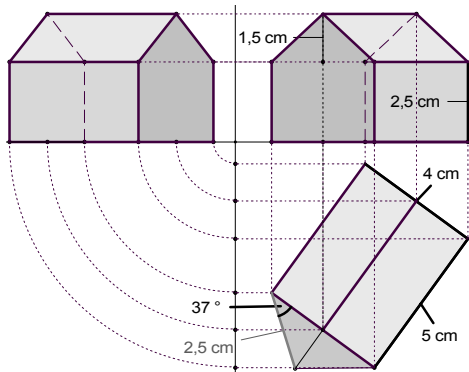
Alle ebenen Figurenteile, die parallel zur Grundrissebene sind, werden im Grundriss in wahrer Größe abgebildet.

#### 2. Aufriss im Raum lotrechte Kanten des Hauses:

parallel zur Aufrissebene  $\rightarrow$  in wahrer Länge abgebildet

Hausbreite und Dachkanten erscheinen im Aufriss nicht in wahrer Größe.

#### 3. Seitenriss: verwende Ordner aus dem Grundriss und aus dem Aufriss .



#### Zusatz:

Bestimmung der **wahren Länge** der Dachkanten am Giebel.

Im Grundriss:

Giebdreieck mit Hilfe der Dachstuhlhöhe  $h_2$  umklappen, so dass es parallel zur Grundrissebene liegt und daher in wahrer Größe dargestellt wird (Methode des „Paralleldrehens“)

## Abbildungseigenschaften der Parallelprojektion auf eine Ebene

Voraussetzung: Projektionsrichtung nicht parallel zur Bildebene

### 1. Geradentreue (eingeschränkt)

**Das Bild einer Geraden im Raum ist eine Gerade in der Bildebene.**

**Ausnahme: Geraden in Projektionsrichtung werden auf einen Punkt reduziert. „projizierende Lage“ !!!.**

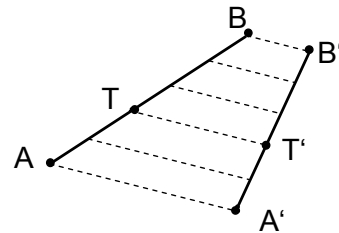
$\rightarrow$  Parallelprojektion ist **keine injektive Abbildung** des Raums auf die Bildebene

### 2. Paralleltreue

**Die Bildgeraden von (im Raum) zueinander parallelen Geraden  $g$  und  $h$  sind in der Bildebene wieder zueinander parallele Geraden  $g'$  und  $h'$  (oder zwei Punkte).**

### 3. Teilverhältnistreue

Teilt ein Punkt  $T$  eine Strecke  $AB$  in einem bestimmten Verhältnis, so teilt der Bildpunkt  $T'$  von  $T$  die Bildstrecke  $A'B'$  von  $AB$  im selben Verhältnis.



Insbesondere gilt: **Mitte bleibt Mitte** .

(Beweis: Projektionssatz)

### 4. Kongruente Abbildung von zur Bildebene parallelen Figuren

Alle zur Bildebene parallelen ebenen Figuren (Strecken, Winkel, Flächenstücke) werden in wahrer Größe, d.h. kongruent abgebildet.

#### Zusammenfassung:

Die Parallelprojektion ist geradentreu, parallelentreu und teilverhältnistreu (mit den oben genannten Einschränkungen).

Jede zur Bildebene parallele Figur wird kongruent – also in wahrer Größe – abgebildet und zwar unabhängig von der gewählten Projektionsrichtung.

### Bestimmung der wahren Länge einer Strecke.

$A'B'$  im Grundriss und durch  $A''B''$  im Aufriss.

Man bestimme die wahre Länge der Strecke  $AB$ .

Idee:

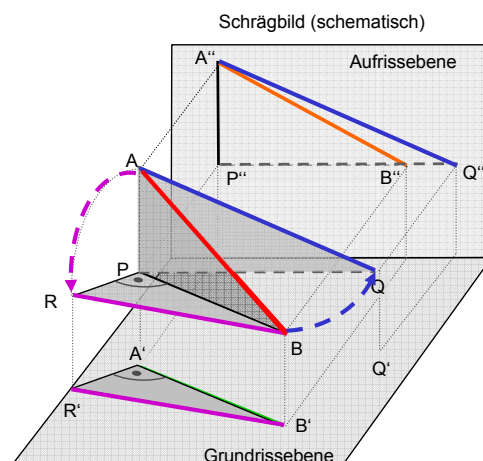
Drehe die betreffende Figur so, dass sie parallel zu einer Bildebene liegt.

Zwei Standardverfahren:

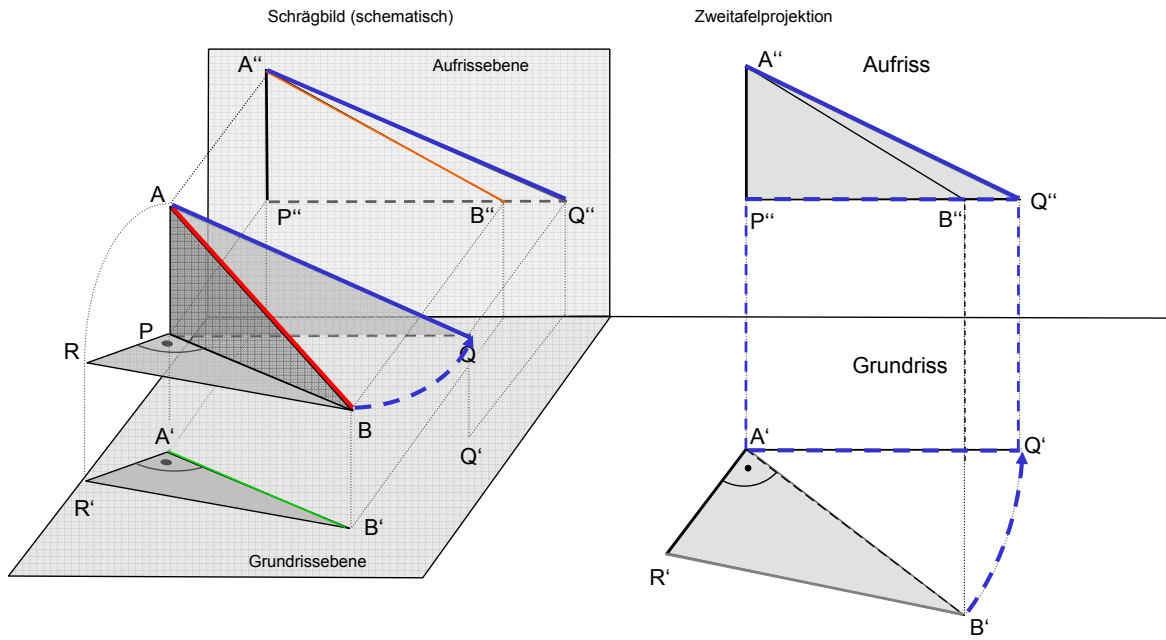
1. „**Paralldrehen**“ (Drehmethode von Monge)

2. „**Umklappen**“

Die Verfahren im Einzelnen:  
Nächste Seite



# 1. „Paralldrehen“ (Drehmethode von Monge)

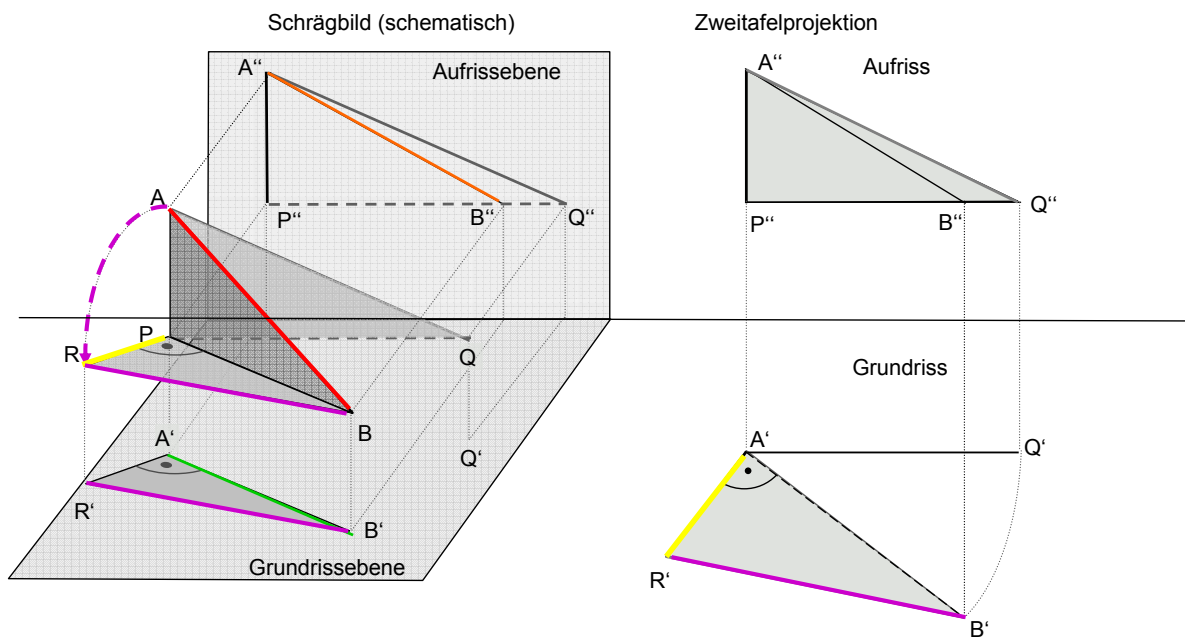


Drehen

Grundriß übertragen

Wahre Länge im Aufriß zeichnen

# 2. „Umklappen“



Umklappen

Wahre Länge im Grundriß zeichnen

## Rezept zur Bestimmung der wahren Länge einer Strecke.

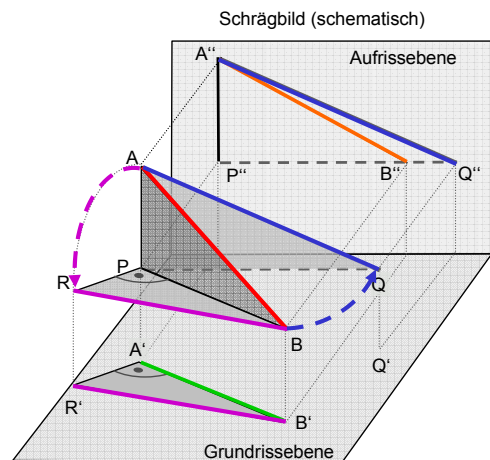
Passendes (rechtwinkliges) Stützdreieck PBA erzeugen!  
PA wird im Aufriss in wahrer Länge dargestellt  
PB wird im Grundriss in wahrer Länge dargestellt  
Stützdreieck PBA so drehen, dass es parallel zur Grundrissebene oder parallel zur Aufrissebene liegt

### Paralldrehen:

**Das „Stützdreieck“ PBA wird um PA soweit gedreht, bis es parallel zur Aufrissebene liegt**  
PBA → PQA ; gedrehtes Dreieck PQA liegt parallel zur Aufrissebene und wird daher in wahrer Größe abgebildet

### Umklappen

**Das „Stützdreieck“ PBA wird um PB soweit gedreht, bis es parallel zur Grundrissebene liegt**  
PBA → PBR ; gedrehtes Dreieck PBR liegt parallel zur Grundrissebene und wird daher in wahrer Größe abgebildet

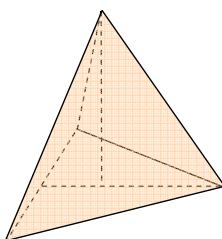


## Beispiele 1

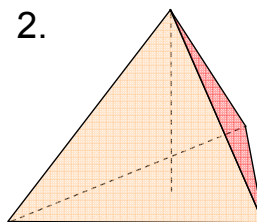
**Zeichnen Sie den Grund- und Aufriss eines regulären Tetraeders.  
Eine Tetraederfläche soll in der Grundrissebene liegen.**

1. Wählen Sie eine Seitenkante, die nicht in der Grundrissebene liegt, parallel zur Aufrissebene.
2. Wählen Sie eine Seitenkante, die in der Grundrissebene liegt, parallel zur Rissachse.

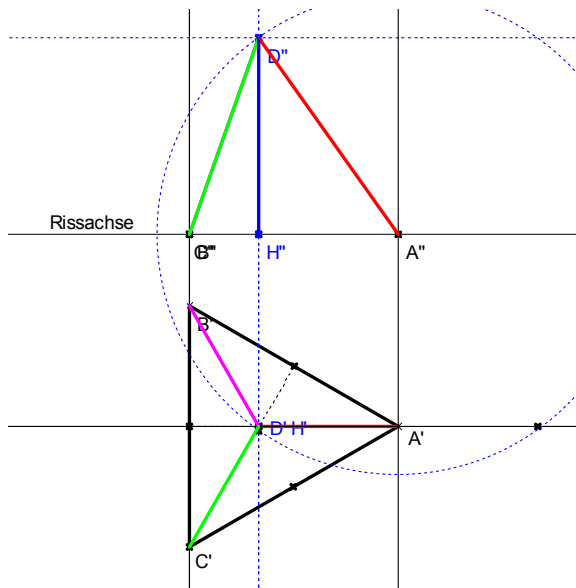
1.



2.



## Eine Seitenkante parallel zur Aufrissebene

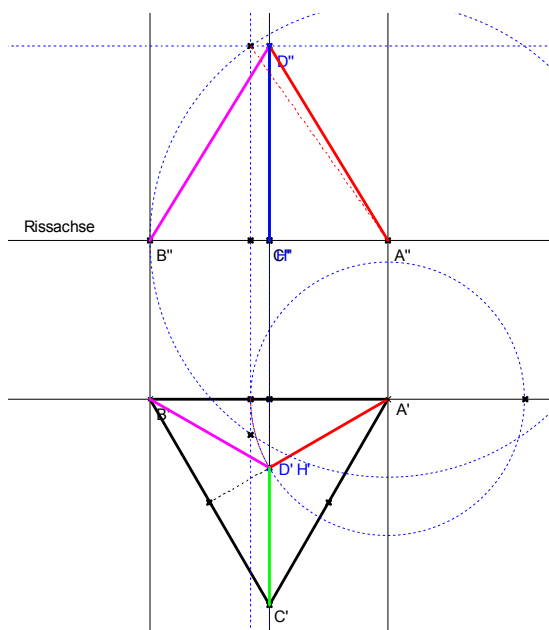


Idee zur Bestimmung der Körperhöhe:

Das Dreieck AHD, das die Körperhöhe als eine Seite hat, liegt parallel zur Aufrissebene. Sein Aufriss zeigt die wahre Körperhöhe.

Dieser Aufriss ist konstruierbar, da das Dreieck rechwinklig ist, eine Seite dem Grundriss entnommen werden kann und eine andere Seite die Länge der Seitenkante des Tetraeders ist (rot) .

## Eine Grundkante parallel zur Rissachse



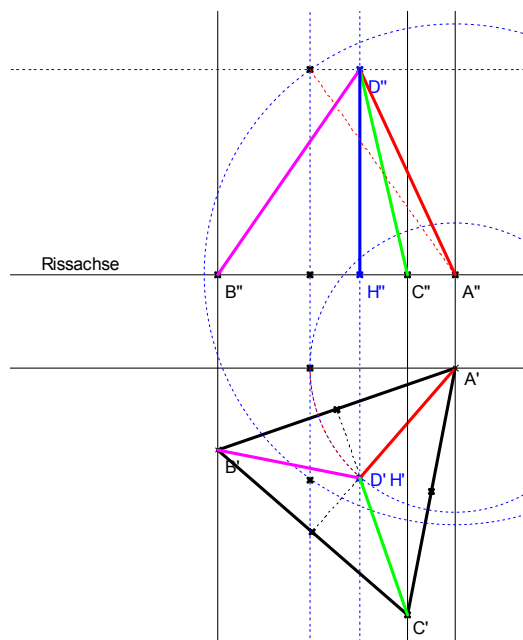
Idee zur Bestimmung der Körperhöhe:

Das Dreieck AHD, das die Körperhöhe als eine Seite hat, wird jetzt so **gedreht**, dass es parallel zur Aufrissebene liegt und sein Aufriss die wahre Körperhöhe zeigt.

Dieser Aufriss ist wie zuvor konstruierbar, da wieder eine Seite dem Grundriss entnommen werden kann und eine andere Seite die Länge der Seitenkante des Tetraeders ist (rot) .



## Allgemeine Lage



Idee zur Bestimmung der Körperhöhe:

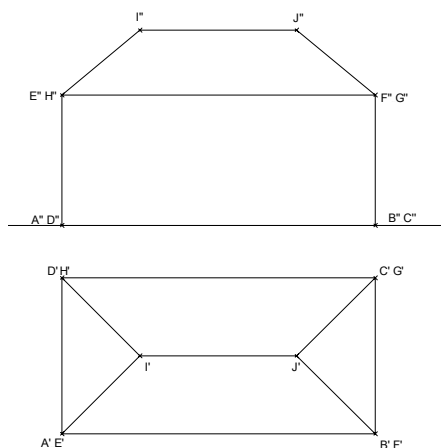
Genauso wie im vorangehenden Fall.

## Beispiele 2

**Bestimmen Sie aus dem Grund- und Aufriss durch Zeichnung die wahre Länge der Dachkante EI.**

**Zeichnen Sie den Seitenriss.  
Maßstab 1:200**

**Vorlage auf dem Übungsblatt.**

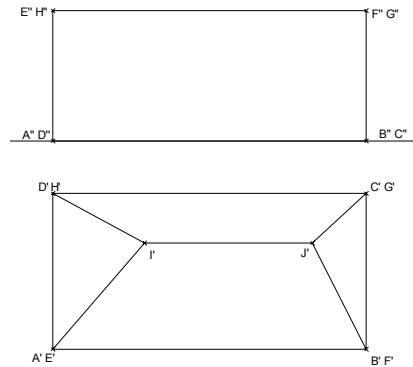


**Der Architekt möchte ein etwas kreativeres Haus entwickeln. Der Grundriss und ein Teil des Aufrisses sind gegeben. Der Dachfirst soll trotz Kreativität waagrecht verlaufen. Die wahre Länge der Kante GJ soll 5 m betragen.**

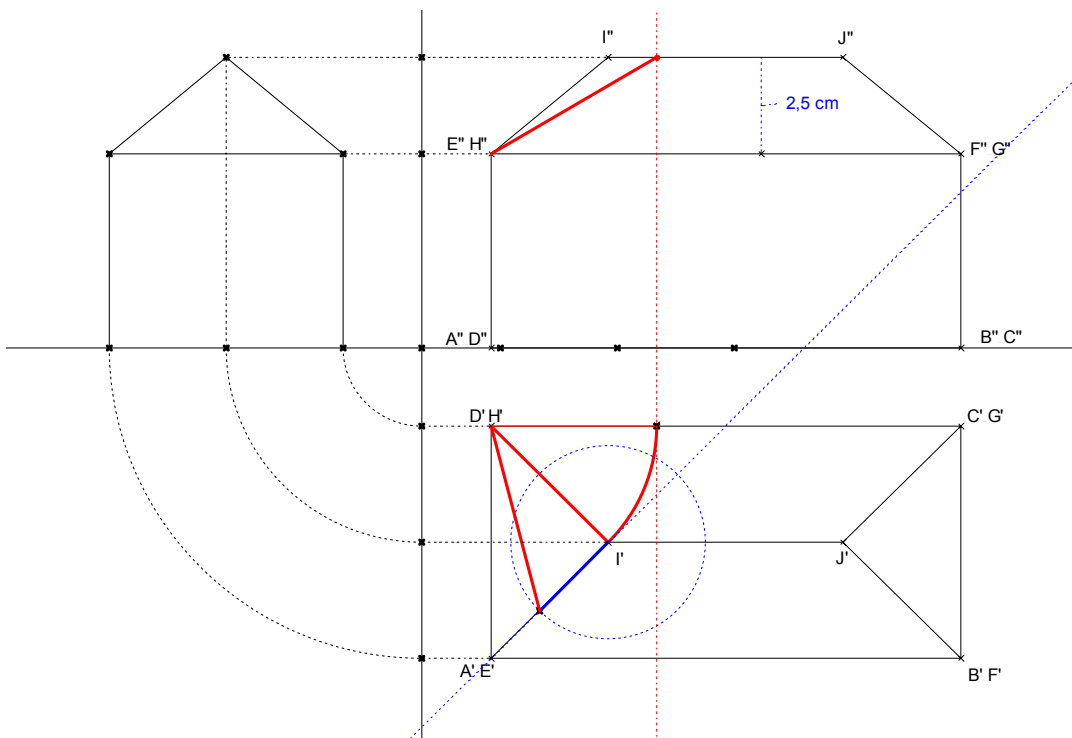
**Vervollständigen Sie den Aufriss und zeichnen Sie auch noch den Seitenriss.**

**Maßstab 1:200**

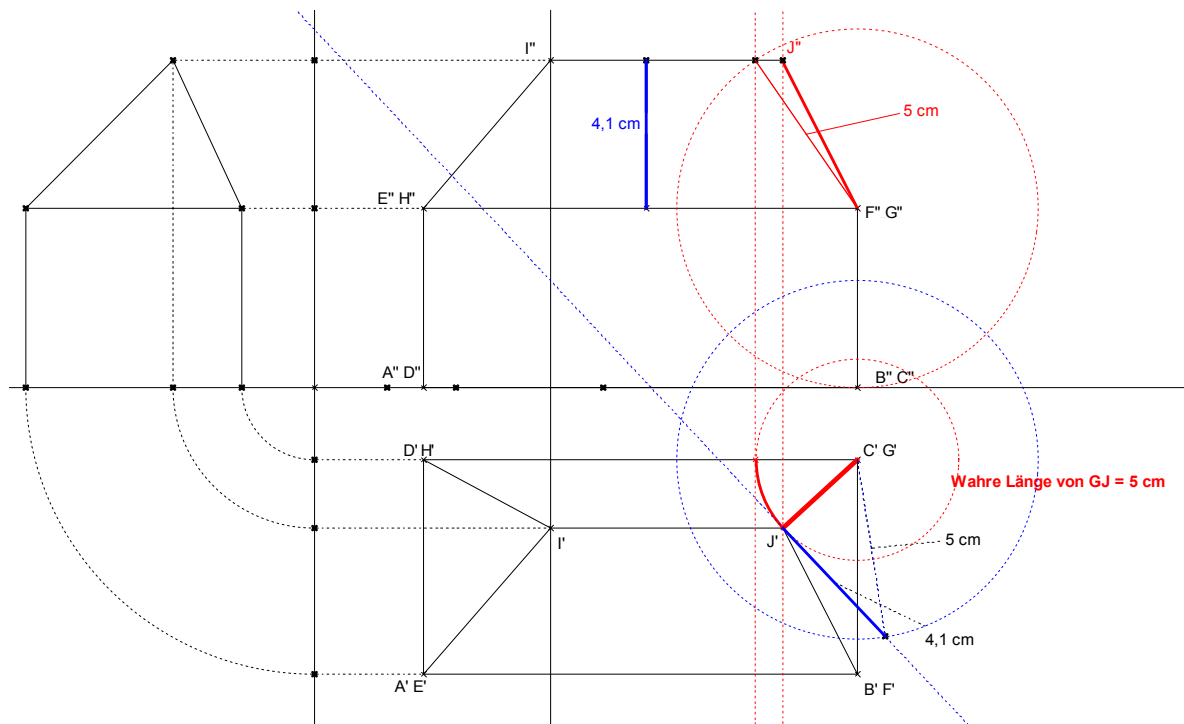
**Vorlage auf dem Übungsblatt.**



**Lösung Aufgabe 1. Maßstab 1:200**



## Lösung Aufgabe 2. Maßstab 1:200

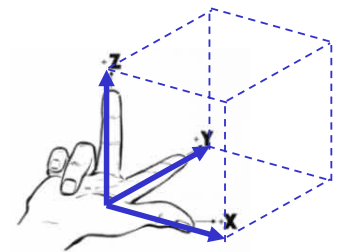


## Schrägbilder von Körpern

Schrägbilder entstehen durch schiefe - also nicht unbedingt senkrechte - Parallelprojektion von Körpern auf eine Bildebene.

Sie geben in der Regel einen besseren räumlichen Eindruck von Körpern als die Ansichten der Dreitafelprojektion.

Man denkt sich den darzustellenden Körper eingebettet in ein räumliches kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen  $x$ ,  $y$  und  $z$ , die ein so genanntes „**Rechtssystem**“ bilden, d.h. angeordnet sind wie der Daumen ( $x$ -Achse), der Zeigefinger ( $y$ -Achse) und der Mittelfinger ( $z$ -Achse) der rechten Hand.



Dieses Koordinatensystem wird oft mit dem Körper zusammen abgebildet. Man spricht dann von einer **Axonometrie**.

Damit kann man Schrägbilder leichter zeichnen:

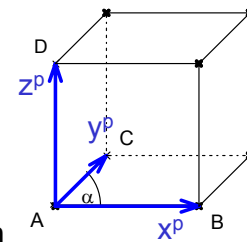
Man wählt die Richtungen und die Längen der projizierten Achsen aus und überträgt die Punkte aus dem Original in das projizierte Koordinatensystem.

Beim Zeichnen verwendet man dass bei der Projektion

- Parallele in Parallelen übergehen,
- die Teilverhältnisse auf Strecken erhalten bleiben.

Zwei besondere Projektionen sind gebräuchlich:

1. **Schiefe Parallelprojektion in die Aufrissebene: Kavalierprojektion (Frontschau).**



Hier ist die **Projektionsebene parallel zur x-z-Ebene**, d.h. **alle Längen und Winkel aus der Aufrissebene werden in wahrer Größe dargestellt.**

Die Richtung der Projektion der y-Achse wird durch ihren Winkel  $\alpha$  zur x-Achse angegeben und die Verkürzung der Längen in diese Richtung durch einen Faktor  $k$ .

Gebräuchliche Werte für  $\alpha$  und  $k$ :

$\alpha = 45^\circ$  ,  $k = 0,5$  , manchmal auch  $\alpha = 90^\circ$  ,  $k = 0,5$  (Zylinder und Kegel)

Bemerkung:

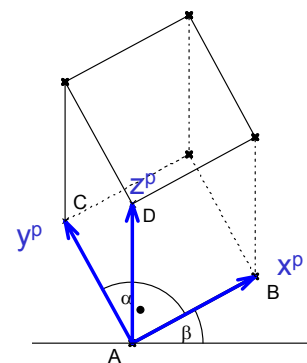
Man kann die Projektionsebene natürlich auch parallel zur y-z-Ebene wählen.

2. **Schiefe Parallelprojektion in die Grundrissebene: Militärprojektion (Vogelschau)**

Hier ist die **Projektionsebene parallel zur x-y-Ebene**, d.h.

**alle Längen und Winkel aus der Grundrissebene werden in wahrer Größe dargestellt.**

Zudem ist die Projektionsrichtung so gewählt, dass auch **alle Strecken in z-Richtung in wahrer Länge** abgebildet werden.



Die Richtung der Projektion der x-Achse wird durch ihren Winkel  $\beta$  zur Horizontalen angegeben, der Winkel  $\alpha$  zwischen x-Achse und y-Achse beträgt  $90^\circ$  ..

Gebräuchliche Werte für  $\beta$ :  $\alpha = 30^\circ$  .

Zylinder und Kegel lassen sich in dieser Weise leicht zeichnen, da die Projektion der Grundfläche ein Kreis bleibt.

Schulbuch →

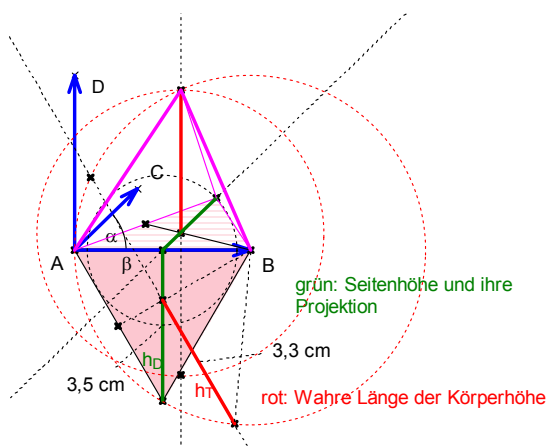
## Tetraeder

Zeichnen Sie ein regelmäßiges Tetraeder mit einer Grundfläche in der Grundrissebene

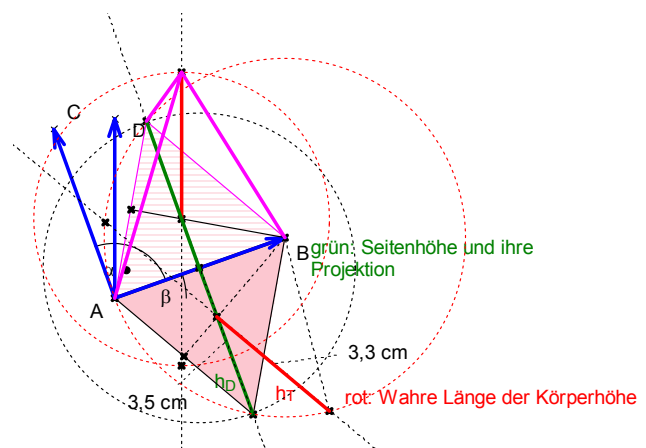
- in Kavalierprojektion,
- in Militärprojektion.

Wählen Sie die Winkel und Faktoren wie Sie es für günstig halten.

## Tetraeder



Kavalierprojektion  
 $\alpha \approx 45^\circ$ ,  $k=0,5$



Militärprojektion  
 $\beta \approx 20^\circ$

## Achtecksprisma und Zylinder

Zeichnen Sie ein regelmäßiges **senkrecht**es Achtecksprisma:

- Grundfläche in der Grundrissebene und
- eine Seite des Achtecks parallel zur Rissachse

- in Grund- und Aufriss,
- in Kavalierprojektion,
- in Militärprojektion.

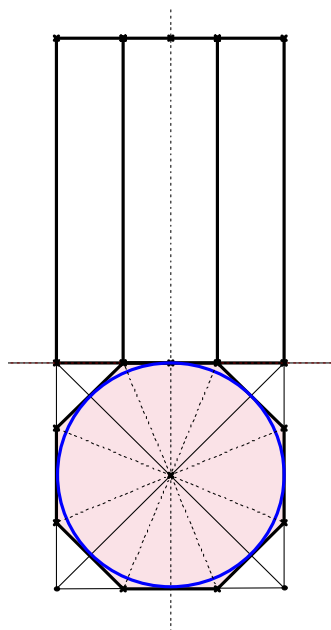
Skizzieren Sie jeweils in das Prisma einen **Zylinder**, der die Seitenflächen von innen berührt.

Benutzen Sie dafür eine andere Farbe.

Beachten Sie:

Bei Parallelprojektionen bleibt die Eigenschaft einer Geraden, Tangente an eine gekrümmte Kurve zu sein, erhalten.

## Achtecksprisma und Zylinder – Lösungen: Grund- und Aufriss



Grund- und Aufriss

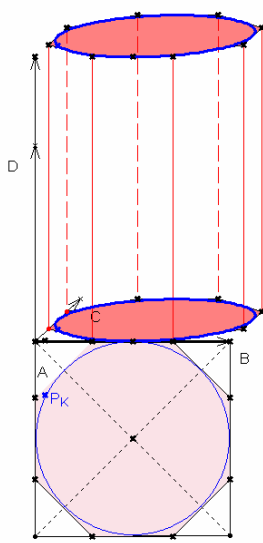
Konstruktion eines regelmäßigen Achtecks aus einem Hilfsquadrat:

Die Winkel zwischen den Diagonalen und den Symmetrieachsen durch Seitenmitten werden halbiert →

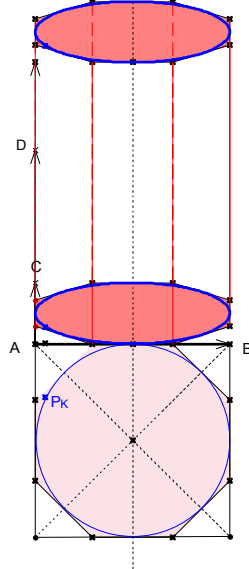
Eckpunkte des Achtecks.

Die hier konstruierten Strecken können jetzt zum Zeichnen der Kavalier- und Militärprojektion verwendet werden.

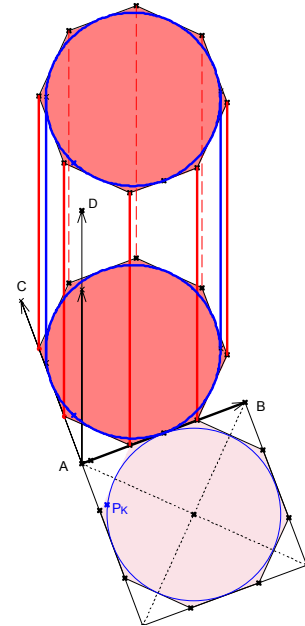
## Achtecksprisma und Zylinder – Lösungen: Kavalier- und Militärprojektion



Kavalierprojektion  
mit  $\alpha \approx 60^\circ$



Kavalierprojektion  
mit  $\alpha = 0^\circ$



Militärprojektion mit  
 $\beta \approx 25^\circ$

## Satz von Pohlke

Bisher haben wir einfach nach Belieben ein  $x^p$ - $y^p$ - $z^p$ -Koordinatensystem gewählt, ohne zu überlegen, ob ein solches System auch wirklich die Parallelprojektion eines kartesischen  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystems sein kann.

Dieses Vorgehen wird durch den so genannten **Satz von Pohlke** gerechtfertigt:

Satz von Pohlke (ca. 1850)

Jedes (nicht entartete) axonometrische System ist Parallelprojektion eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems.

Überlegen Sie, durch welche Parallelprojektionen die Kavalierprojektion und die Militärprojektion erzeugt werden können.

## Weitere Übung: Würfel mit Umkugel

Zeichnen Sie den Grund- und Aufriss eines Würfels zusammen mit den Umrissen der Kugel, die durch alle Ecken des Würfels geht.

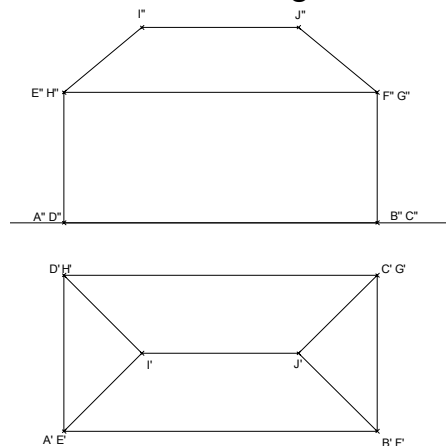
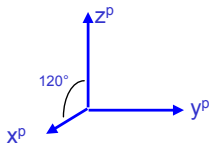
Überlegen Sie, welche Kreise jeweils als Umriss projiziert werden.

Wählen Sie die Lage des Würfels so, dass Sie die Kreise in einfacher Weise zeichnen können. Eine Seitenfläche des Würfels soll in der Grundrissebene liegen.

Copyright: Hans-Joachim Kahl

## Weitere Übungen 1

Zeichnen Sie das Haus jeweils in Kavalierprojektion, wobei die Rissachse die  $y^p$ -Achse ist, der Winkel zwischen  $x^p$ -Achse und  $z^p$ -Achse  $120^\circ$  beträgt und der Verkürzungsfaktor in  $x^p$ -Richtung 0,5 beträgt.

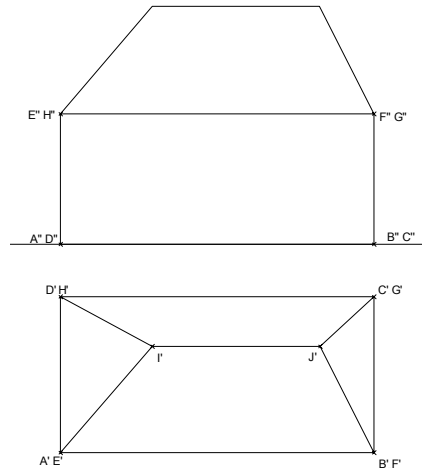
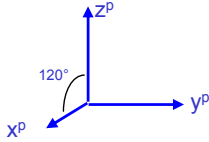


Copyright: Hans-Joachim Kahl



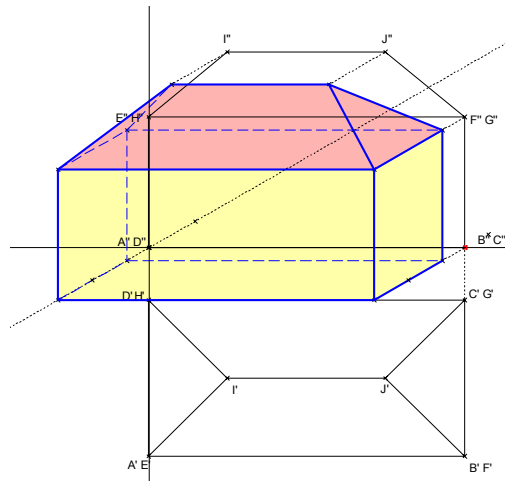
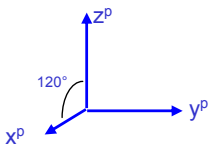
## Weitere Übungen 2

Zeichnen Sie das Haus jeweils in Kavalierprojektion, wobei die Rissachse die  $y^p$ -Achse ist, der Winkel zwischen  $x^p$ -Achse und  $z^p$ -Achse  $120^\circ$  beträgt und der Verkürzungsfaktor in  $x^p$ -Richtung 0,5 beträgt.



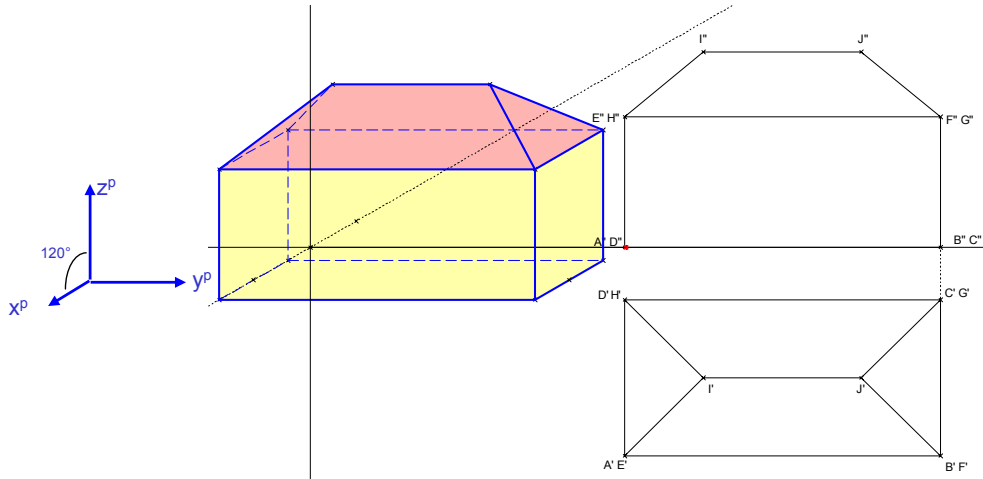
## Lösung Übung 1:

Lage des  $x^p$ - $y^p$ - $z^p$ -Koordinatensystems so, dass die Grundrissebene um die Rissachse in die  $x^p$ - $y^p$ -Ebene gedreht erscheint. So ist die Kavalierprojektion einfach zu zeichnen, überlagert aber Grund- und Aufriss.

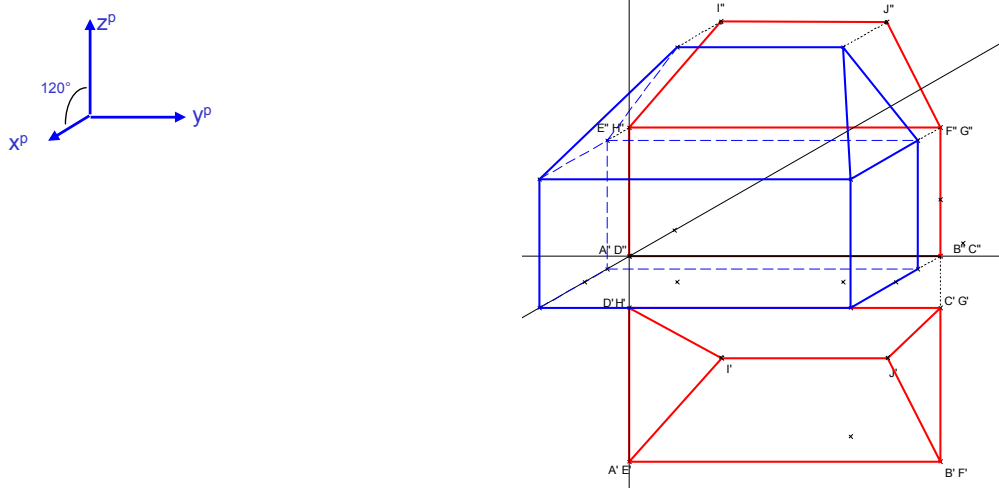


## Lösung Übung 1:

Lage des  $x^p$ - $y^p$ - $z^p$ -Koordinatensystems so, dass die Grundrissebene um die Rissachse in die  $x^p$ - $y^p$ -Ebene gedreht erscheint, aber noch in  $y^p$ -Richtung verschoben. So ist die Kavalierprojektion schwieriger zu zeichnen (übertragen geeigneter Strecken aus Grund- und Aufriss), ist aber etwas übersichtlicher.



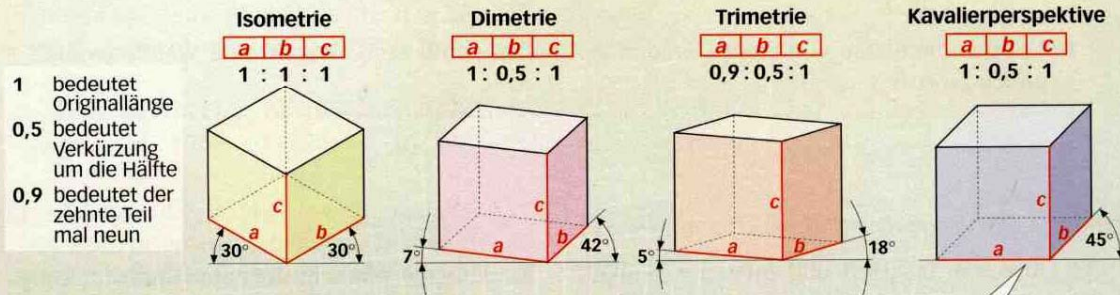
## Lösung Übung 2:



# Schrägbilder

Eine einfache räumliche Darstellung eines Körpers gelingt durch die Konstruktion eines **Schrägbilds**. Je nach Wahl der Winkel und des Verhältnisses der Seiten hinsichtlich ihrer Originallänge bzw. Verkürzung hat der dargestellte Würfel eine unterschiedliche räumliche Wirkung auf unsere Augen.

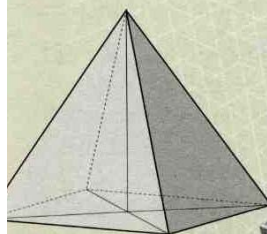
Grundsätzlich kann man Winkel und Seitenverhältnisse dieser Art der Darstellung beliebig wählen. Nach der deutschen Industrienorm (DIN) ist jedoch in technischen Zeichnungen die Isometrie bzw. die Dimetrie zu wählen.



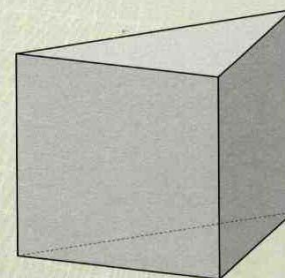
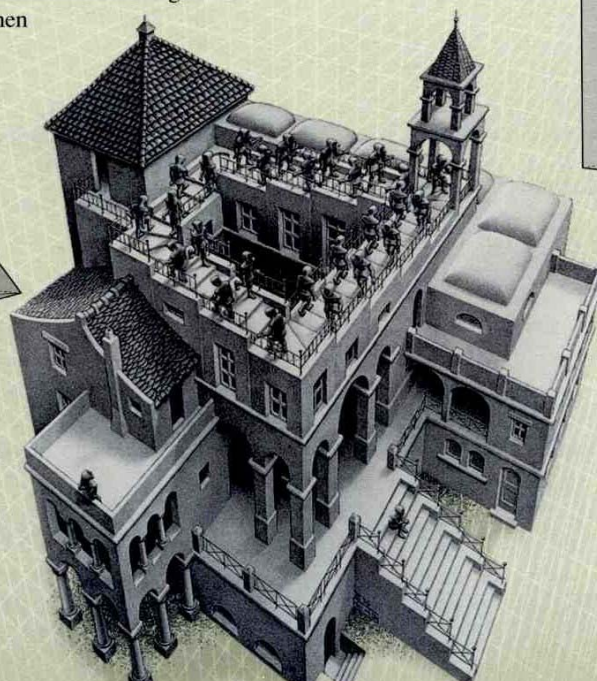
- 1** Zeichne nach den Vorschriften der Isometrie, Dimetrie, Trimetrie und Kavalierperspektive das Schrägbild des Körpers.
- Würfel mit  $a = 5,4$  cm
  - Quader mit  $a = 8,1$  cm,  $b = 4,0$  cm und  $c = 5,0$  cm

**Kavalier** nannte man einen überhöht angeordneten Bau bei alten Festungen. Von ihm aus konnte man sich einen guten Überblick über das Vorgelände verschaffen. Bei der Planung der Festung zeichneten Militärs diesen Überblick in einer einfachen Perspektive, die danach **Kavalierperspektive** oder **Militärperspektive** genannt wurde.

Der niederländische Grafiker **Maurits Cornelis Escher** zeichnete räumliche Darstellungen mit verblüffenden optischen Täuschungen.



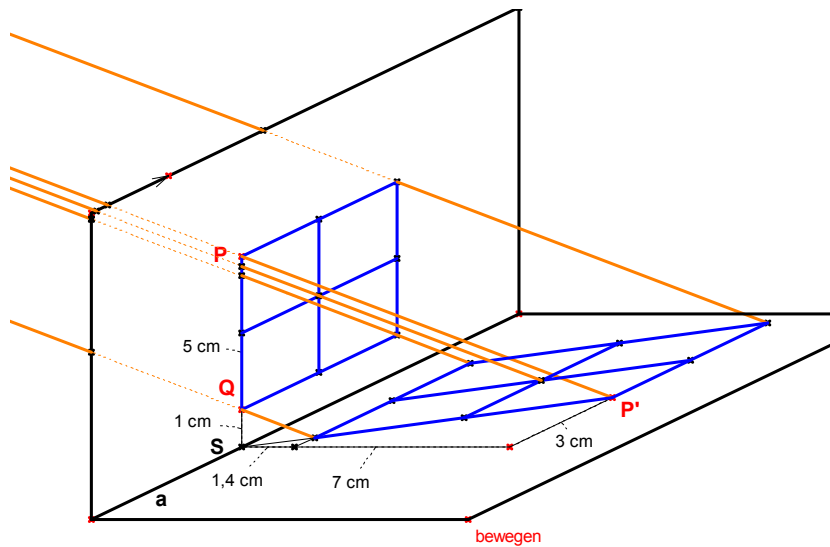
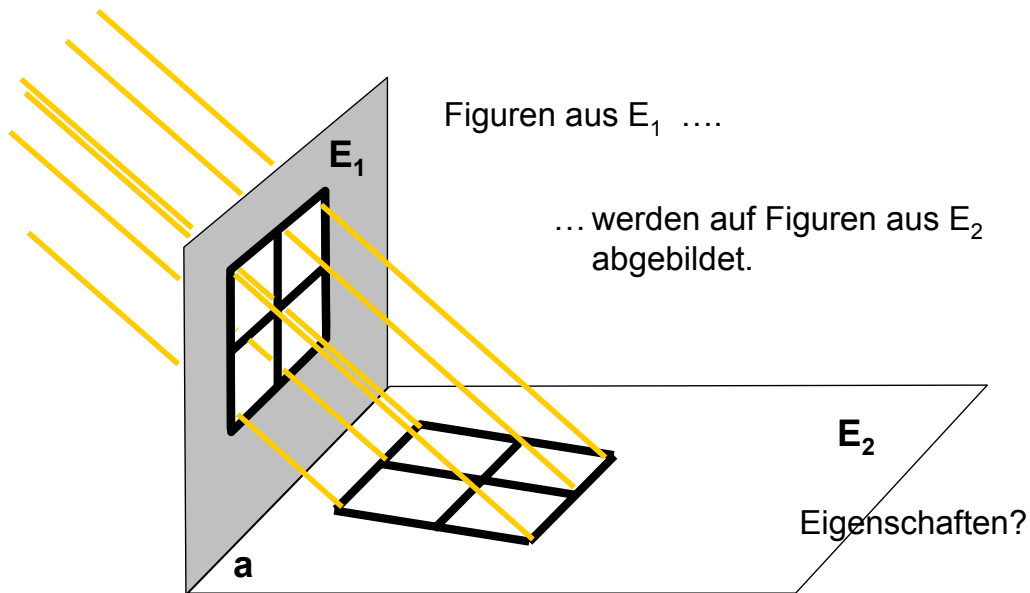
- 2** a) Welche Art Schrägbild-darstellung wurde für die Pyramide mit quadratischer Grundfläche gewählt?  
b) Welche Maße hat die Pyramide?



- 3** Das dreiseitige Prisma hat als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck. Die Darstellung ist dimetrisch.
- Zeichne die Grundfläche.
  - Zeichne das Prisma in Kavalierperspektive.
  - Zeichne eine trimetrische Darstellung des Prismas.

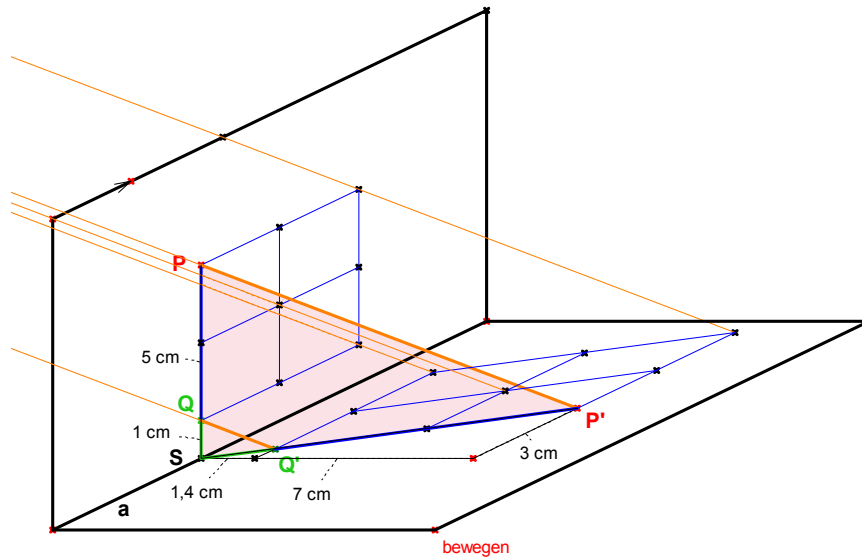
## Kapitel 4: Affine Abbildungen

Parallelprojektion einer Ebene in eine andere Ebene:  
 Motivation für die Abbildungsvorschrift von Achsenaffinitäten.



Worauf werden wohl die folgenden Figuren abgebildet:  
 Rechteck, Quadrat, gleichseitiges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck, Trapez,  
 Parallelogramm, Kreis?

Gegeben ist ein Punkt  $P$  in  $E_1$  und sein Bildpunkt  $P'$  in  $E_2$ .  
 Wie findet man zu einem beliebigen weiteren Punkt  $Q$  den Bildpunkt  $Q'$ ?



Gegeben ist ein Punkt  $P$  in  $E_1$  und sein Bildpunkt  $P'$  in  $E_2$ .

Wie findet man zu einem beliebigen weiteren Punkt  $Q$  den Bildpunkt  $Q'$ ?

Zeichne in der Ebene, die durch  $P$ ,  $P'$  und  $Q$  bestimmt wird!

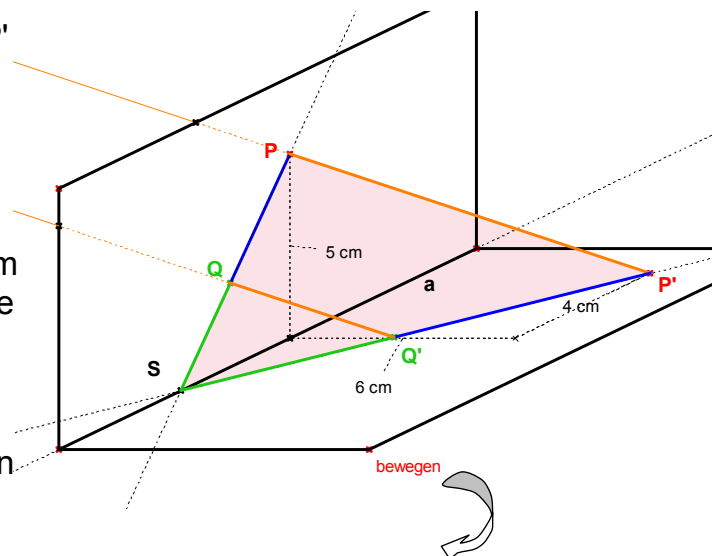
Damit die Verhältnisse einfacher werden, stellen wir nur noch  $P$ ,  $P'$  und  $Q$  dar.

Ein Punkt  $P$  und sein Bildpunkt  $P'$  sind gegeben.

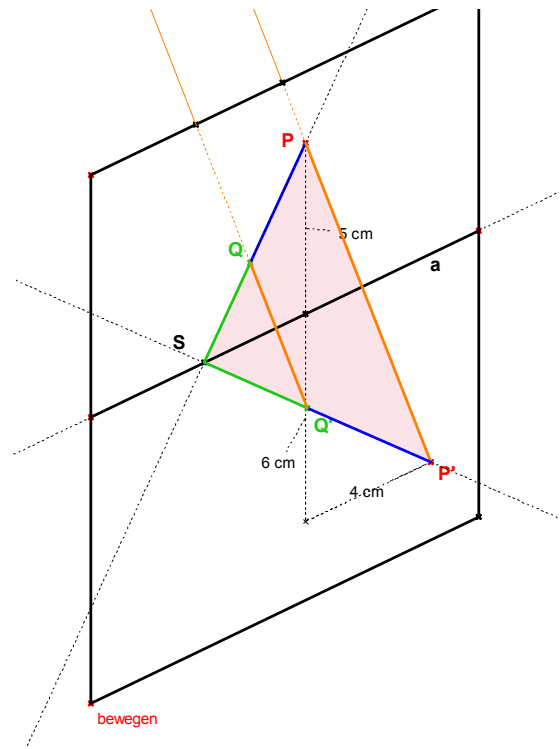
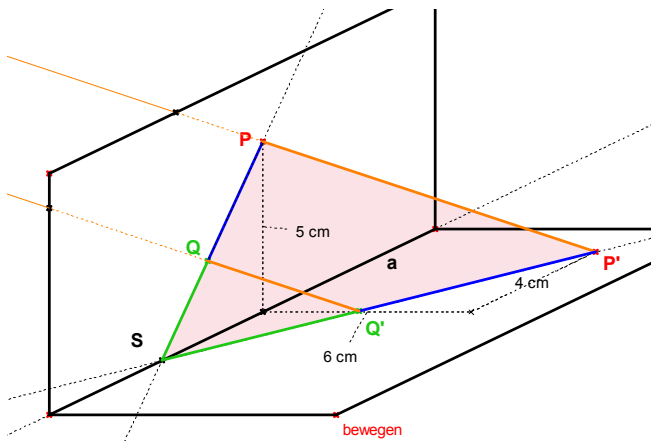
Dieses Punktepaar legt die Abbildung offenbar fest.

Zeichnen Sie zwei Ebenen wie im nebenstehenden Bild, wählen Sie zwei Punkte  $P$  und  $P'$  und bilden Sie weitere Punkte ab.

Das Bild ist die Kavalierprojektion von zwei Ebenen.



Wir wollen diese Abbildung als Abbildung einer Ebene in sich darstellen, indem wir die Bildebene in die Urbildebene drehen.

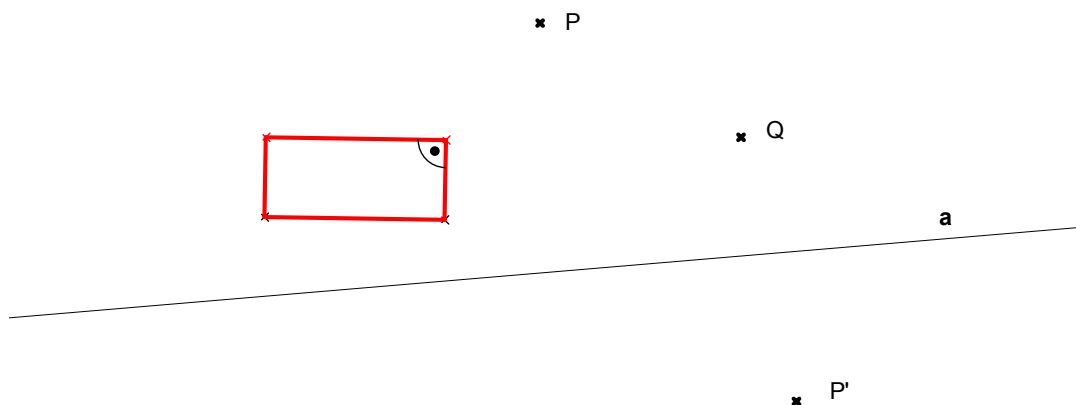


Zeichnen Sie jetzt in einer *einzig* Zeichenebene die Achse  $a$  sowie zwei Punkte  $P$  und  $P'$ .

Bilden Sie weitere Punkte  $Q$  ab. Zeichnen Sie auch ein Rechteck und bilden dieses ab.

Formulieren Sie die Abbildungsvorschrift, die Sie verwenden.  
Gibt es Punkte, bei denen Ihre Vorschrift Schwierigkeiten bereitet?

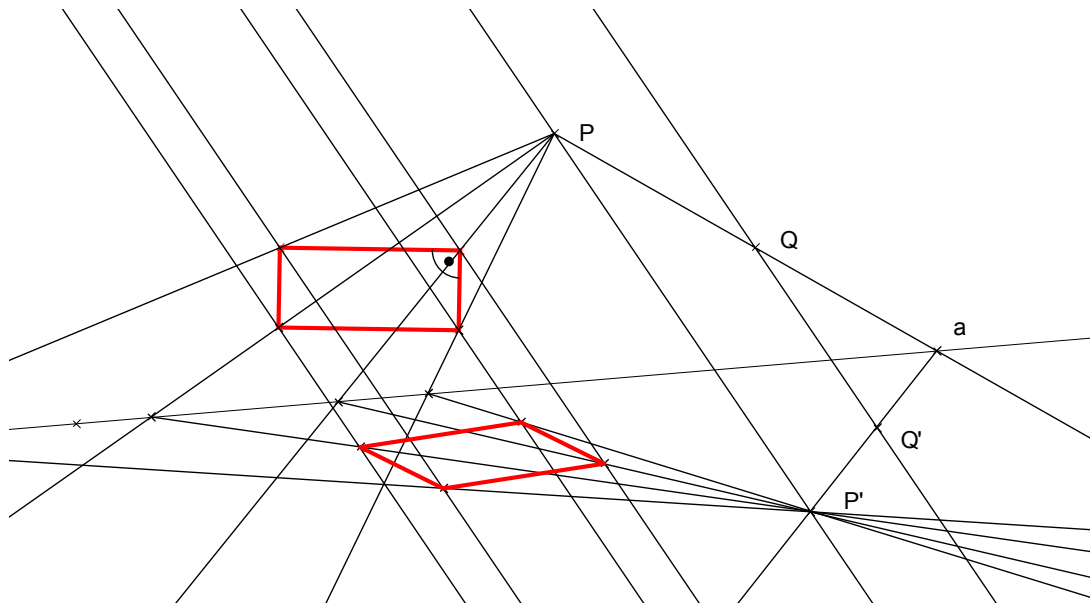
-----



Bilden Sie weitere Punkte  $Q$  ab. Zeichnen Sie auch ein Rechteck und bilden dieses ab.

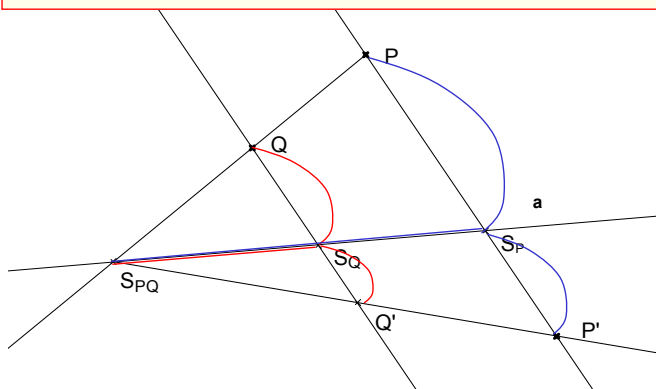
Formulieren Sie die Abbildungsvorschrift, die Sie verwenden.  
Gibt es Punkte, bei denen Ihre Vorschrift Schwierigkeiten bereitet?

-----



Abbildungen dieser Art nennen wir Achsenaffinitäten.  
 Eine Achsenaffinität ist festgelegt durch die Affinitätsachse  $a$  und ein Punktepaar  $P, P'$ .  
 Welche Bedingungen muss man an  $P, P'$  stellen, damit eine bijektive Abbildung der Ebene definiert wird?

### Achsenaffinität



Aus den Strahlensätzen ergibt sich, dass für alle Punkte  $Q$  gilt

$$\overline{S_Q Q'} : \overline{S_Q Q} = \overline{S_P P'} : \overline{S_P P} =: k$$

$$\overline{S_Q Q'} = k \cdot \overline{S_Q Q}$$

Begründung?

Damit kann die Abbildungsvorschrift folgendermaßen formuliert werden:

Definiere  $k := \overline{S_P P'} : \overline{S_P P}$

Für alle Punkte  $Q$  gilt

-  $Q'Q$  ist parallel zu  $P'P$ ,

- für den Schnittpunkt  $S_Q$  von  $Q'Q$  mit  $a$  gilt  $\overline{S_Q Q'} = k \cdot \overline{S_Q Q}$

Wir geben eine etwas abgewandelte Definition an, da sie leichter handhabbar ist als die Angabe eines Punktepaars  $P, P'$ .

## Achsenaffinität

Eine Achsenaffinität kann festgelegt werden durch

- eine **Affinitätsachse**  $a$ ,
- einen **Affinitätswinkel**  $\alpha$ , der die Affinitätsrichtung bestimmt, ( $0 < \alpha < 180^\circ$ )
- einen **Affinitätsfaktor**  $k \neq 0$

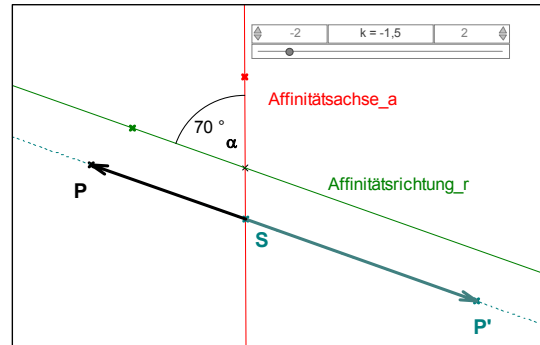
sowie die folgende Vorschrift zur Abbildung von Punkten  $P$  der Ebene in sich

$$P \in a \Rightarrow P' = P$$

$P \notin a \Rightarrow S$  ist der Schnittpunkt von  $PP'$  mit  $a$ ,  
 $PP'$  schließt mit  $g$  den Winkel  $\alpha$  ein,

$$\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$$

(d.h. für  $k > 0$  liegen  $P$  und  $P'$  auf der gleichen Seite von  $a$ ,  
für  $k < 0$  liegen  $P$  und  $P'$  auf verschiedenen Seiten von  $a$ ).



Alternative: Statt des Winkels  $\alpha$  gibt man eine Gerade  $r \nparallel a$  als Affinitätsrichtung an.

### Aufgaben

Bilden Sie ein beliebiges Dreieck, ein Rechteck, ein Quadrat mit folgenden Achsenaffinitäten ab:

1.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $k = -1$
2.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $k = -3$
3.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $k = -0,5$
4.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $k = 2$
5.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $k = 0,5$
6.  $\alpha = 30^\circ$ ,  $k = -1$
7.  $\alpha = 60^\circ$ ,  $k = -2$
8.  $\alpha = 60^\circ$ ,  $k = 3$



## Spezialfälle von Achsenaffinitäten:

## Spezialfälle von Achsenaffinitäten:

**Identität:**  $k = +1$

**Achsen Spiegelung:**  $\alpha = 90^\circ$  ,  $k = -1$

**Schrägspiegelung:**  $k = -1$

**Senkrechte Achsenaffinität:**  $\alpha = 90^\circ$

## Eigenschaften von Achsenaffinitäten

### Fixelemente:

Fixpunkte: Alle Punkte der Affinitätsachse  
Fixpunktgerade: Affinitätsachse  
Fixgeraden: alle Geraden parallel zur Affinitätsrichtung

### Invarianten:

geradentreu,  
parallelentreu,  
teilverhältnistreu  
*nicht* längenverhältnistreu.

Nur in speziellen Fällen:

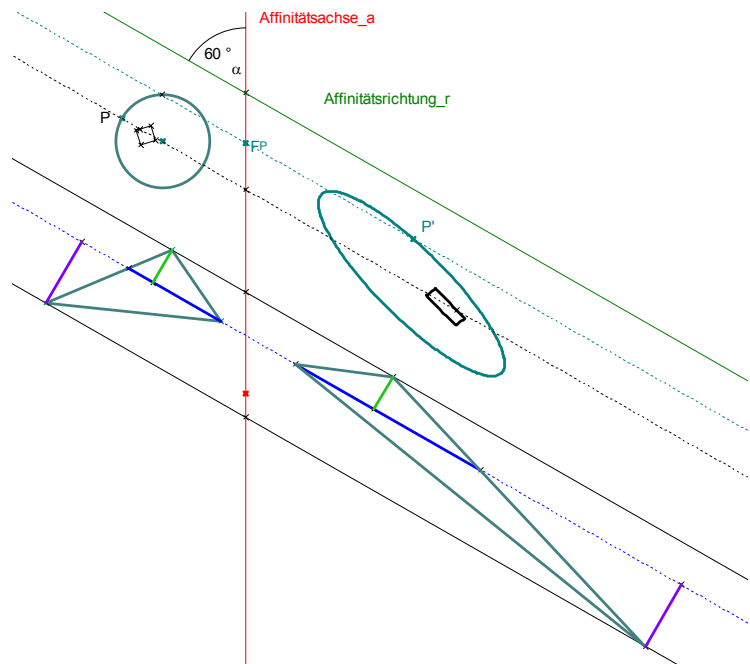
Umlaufsinn erhalten wenn  $k > 0$

## Veränderung des Flächeninhalts bei Achsenaffinitäten

Dreiecke mit „Grundseite“ parallel zur Affinitätsrichtung:

Länge der Grundseite mit  $|k|$  multipliziert,  
Länge der Höhe unverändert  
⇒  
**Flächeninhalt mit  $|k|$  multipliziert.**

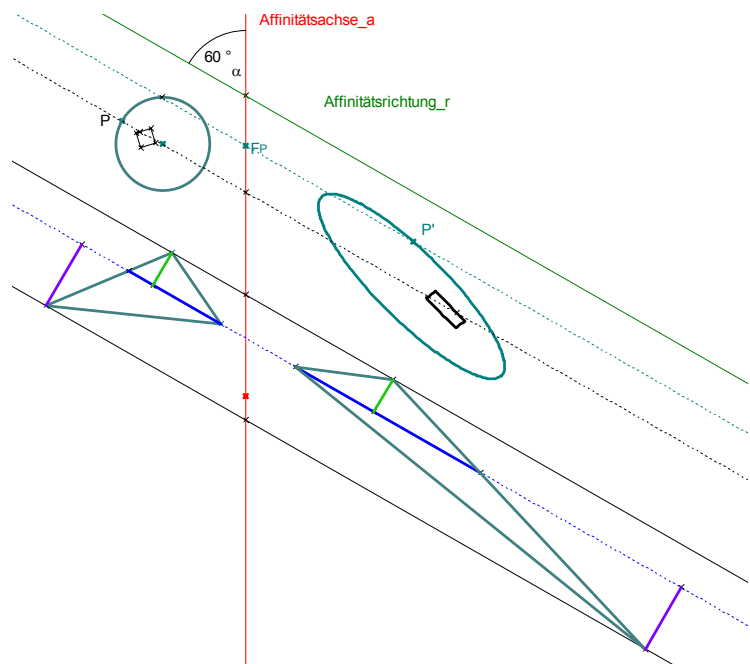
Beliebige Dreiecke:  
Zerlegen in zwei Dreiecke mit „Grundseite“ parallel zur Affinitätsrichtung  
⇒  
**Flächeninhalt mit  $|k|$  multipliziert.**



## Veränderung des Flächeninhalts bei Achsenaffinitäten

Beliebige n-Ecke:  
Zerlegen in Dreiecke  
⇒  
**Flächeninhalt mit  $|k|$  multipliziert.**

Beliebige Figuren, z.B. Kreis:  
Annähern durch n-Ecke  
⇒  
**Flächeninhalt mit  $|k|$  multipliziert.**



**Anmerkung:**

Beachten Sie im Folgenden jeweils den Unterschied zwischen den folgenden leicht zu verwechselnden Eigenschaften von Abbildungen. Geben Sie jeweils ein Beispiel dazu an.

**Längentreue:**

Alle Streckenlängen bleiben erhalten.

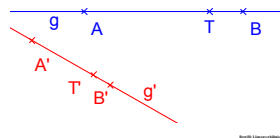
**Längenverhältnistreue:**

Verglichen werden die Längen von 2 beliebigen Strecken  $a, b$  und die Längen ihrer Bildstrecken  $a'$  und  $b'$ :  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

**Teilverhältnistreue**

Verglichen werden die Längenverhältnisse auf **einer Geraden** mit den

Längenverhältnissen auf der Bildgeraden:  $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{A'T'}}{\overline{T'B'}}$  wenn A, B, T auf einer Geraden liegen.



**Parallelentreue:**

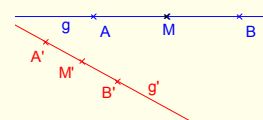
Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet,  $g \parallel h \Rightarrow g' \parallel h'$

**Geraden und Bildgeraden sind parallel:**  $g' \parallel g$

**Aufgaben**

Begründen Sie:

Für die Gültigkeit der Teilverhältnistreue einer geradentreuen Abbildung reicht schon aus, dass die Mitte einer jeden Strecke auf die Mitte der Bildstrecke abgebildet wird.



Bijektive, geradentreue Abbildungen sind parallelentreu.

## Affine Abbildungen

Wir definieren:

Eine Abbildung  $f: E \rightarrow E$  heißt **affine Abbildung**  $\Leftrightarrow$   
 $f$  ist bijektiv und geradentreu

Folgerungen:

- Affine Abbildungen sind parallelentreu.
- Achsenaffinitäten sind affine Abbildungen.
- Verkettungen von Achsenaffinitäten sind affine Abbildungen.
- Affine Abbildungen sind teilverhältnistreu (Beweis nächste Seite)

- Affine Abbildungen sind teilverhältnistreu

Begründung:

Eine Strecke  $AB$  mit Mittelpunkt  $M$  wird auf eine Strecke  $A'B'$  abgebildet.

Zu zeigen:

Das Bild von  $M$  ist Mittelpunkt von  $A'B'$ .

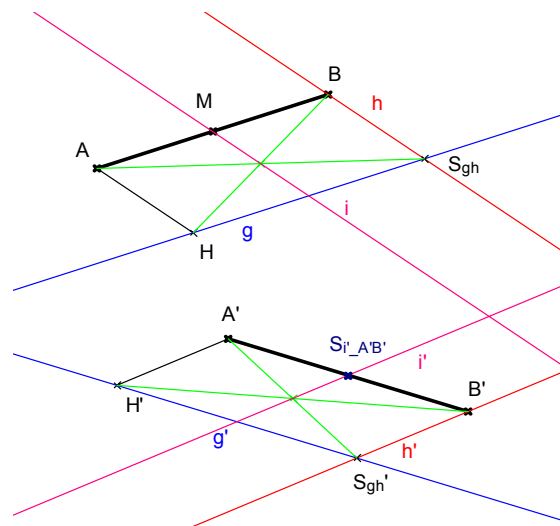
Zeichne einen Hilfspunkt  $H \notin AB$ .

Die **Parallelen**  $g$  zu  $AB$  durch  $H$  und  $h$  zu  $AH$  durch  $H$  werden abgebildet auf entsprechende **Parallelen**  $g'$  und  $h'$ .

Die **Diagonalen** des Parallelogramms  $ABS_{gh}H$  werden abgebildet auf die entsprechenden **Diagonalen** von  $A'B'S_{gh'}H'$ .

Die **Parallele**  $i$  zu  $AH$  durch den **Diagonalschnittpunkt** geht durch  $M$  und wird abgebildet auf die **Parallele**  $i'$  durch den entsprechenden **Diagonalschnittpunkt** von  $A'B'S_{gh'}H'$  zu  $A'H'$ .

Der Schnittpunkt  $S_{i'A'B'}$  von  $i'$  mit  $A'B'$  ist Mittelpunkt von  $A'B'$ . Da  $S_{i'A'B'}$  das Bild von  $M$  ist folgt die Behauptung.



Aus der Teilverhältnistreue affiner Abbildungen folgt zusammen mit der Geradentreue mit den gleichen Argumenten wie bei Kongruenzabbildungen:

Eine affine Abbildung wird eindeutig festgelegt durch die Abbildung eines einzigen Dreiecks.

Beweisidee übernächste Seite.

Für Kongruenzabbildungen konnte leicht gezeigt werden, dass sich **jedes Dreieck** mit **höchstens 3 Achsenspiegelungen** auf **jedes kongruente Dreieck** abbilden lässt.

Analog können wir beweisen:

**Jedes Dreieck** kann mit **höchstens 3 Achsenaffinitäten** auf **jedes beliebige andere Dreieck** abgebildet werden.

Alle Dreiecke sind zueinander affin!

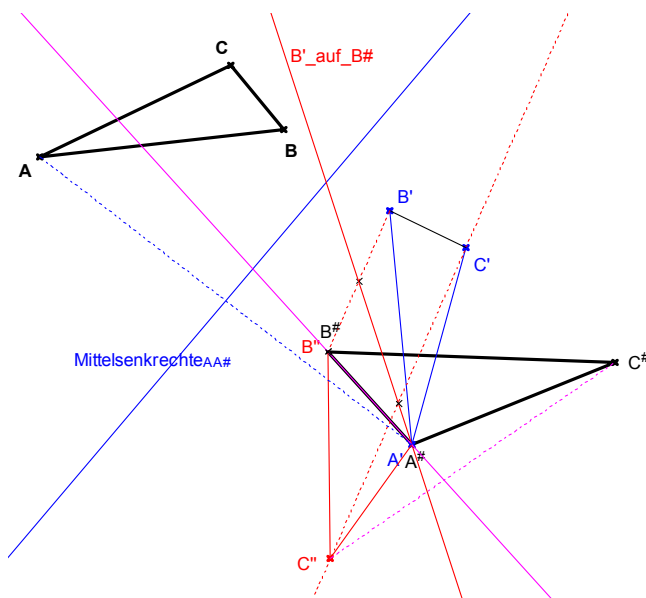
Beweisidee nächste Seite.

Wieder folgert man daraus wie bei der Untersuchung der Kongruenzabbildungen:

Die **affinen Abbildungen** sind genau die **Verkettung von Achsenaffinitäten**.

**Jedes Dreieck** kann mit **höchstens 3 Achsenaffinitäten** auf **jedes beliebige andere Dreieck** abgebildet werden.

Alle Dreiecke sind zueinander affin!

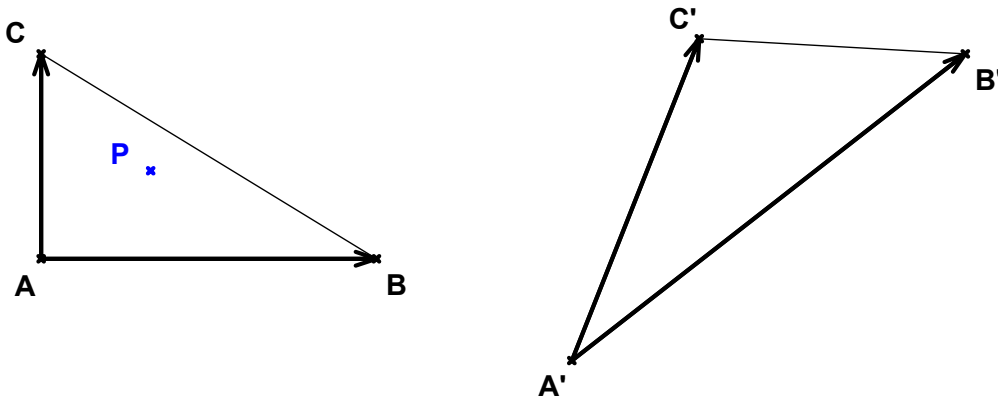


Man kann sogar zeigen, dass **jedes Dreieck** kann mit **höchstens 2 Achsenaffinitäten** auf **jedes beliebige andere Dreieck** abgebildet werden.

Dieser Beweis ist allerdings schwieriger und verwendet Sätze aus der Geometrie, die bisher nicht bewiesen wurden.

Aufgabe:

Das Dreieck ABC wird durch eine affine Abbildung auf das Dreieck  $A'B'C'$  abgebildet. Konstruieren Sie das Bild eines beliebigen Punktes P.

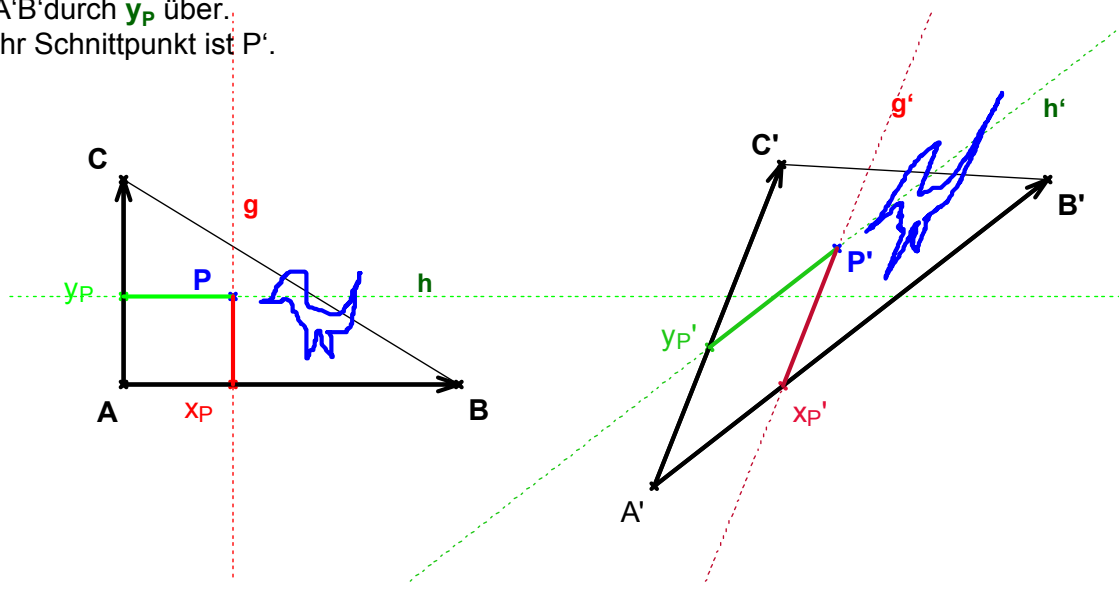


Man kann zwei Seiten des Dreiecks, z.B. AB und AC zur Definition eines „Koordinatensystems“ benutzen:

Durch jeden Punkt P kann man die Parallelen  $g$  zu AC und  $h$  zu AB zeichnen. Deren Schnittpunkte mit AB und AC bezeichnet man mit  $x_P$  und  $y_P$ .

Wegen der Teilverhältnistreue der affinen Abbildung liegen die Bildpunkte  $x_{P'}$  von  $x_P$  und  $y_{P'}$  von  $y_P$  auf den verlängerten Seiten des Bilddreiecks  $A'B'C'$  eindeutig fest.

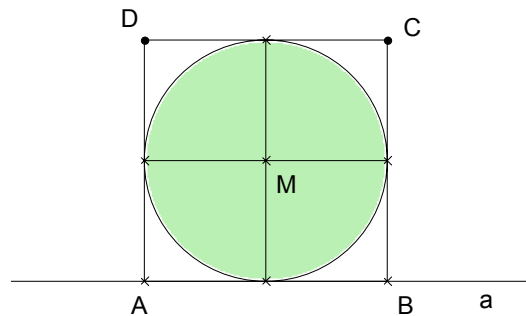
Wegen der Parallelentreue gehen  $g$  und  $h$  in Parallelen  $g'$  zu  $A'C'$  durch  $x_{P'}$  bzw.  $h'$  zu  $A'B'$  durch  $y_{P'}$  über. Ihr Schnittpunkt ist  $P'$ .



## Aufgabe

Bilden Sie mit der Achsenaffinität mit der Achse  $a$ , dem Winkel  $\alpha$  und dem Affinitätsfaktor  $k$  ab.

- a)  $\alpha = 90^\circ$ ,  $k = -\frac{1}{2}$   
 b)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $k = -\frac{1}{2}$

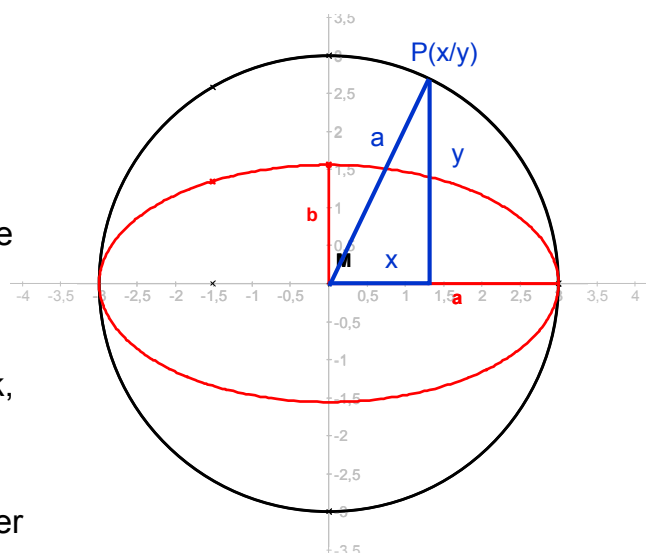


## Aufgabe

Ein Kreis mit Mittelpunkt  $O(0/0)$  und Radius  $a$  hat im kartesischen Koordinatensystem die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Eine **Ellipse** wird als **senkrecht-achsenaffines Bild eines Kreises** definiert. Ist der Radius des Kreises  $a$  und verwendet man als Affinitätsachse die  $x$ -Achse, dann erhält man eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ .



- Bestimmen Sie den Affinitätsfaktor  $k$ , mit dem die Ellipse aus dem Kreis hervorgeht.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  und Mittelpunkt  $O$ .

## Die Scherung: Spezialfall einer affinen Abbildung

Während im Allgemeinen affine Abbildungen nicht flächeninhaltstreu sind, ergibt sich aus den bisher gewonnenen Ergebnissen :

Wenn man zwei Achsenaffinitäten mit Affinitätsfaktoren  $k_1$  und  $k_2$  hintereinander ausführt, dann ändert sich der Flächeninhalt von Figuren mit dem Faktor  $|k_1 \cdot k_2|$ .

Ist  $|k_1 \cdot k_2| = 1$ , dann müssen bei der Hintereinanderausführung Flächeninhalte erhalten bleiben!

Beispiele für solche Faktoren  $k_1$  und  $k_2$  könnten etwa

$$\begin{aligned} k_1 &= -1, k_2 = -1 \\ k_1 &= 2, k_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

sein.

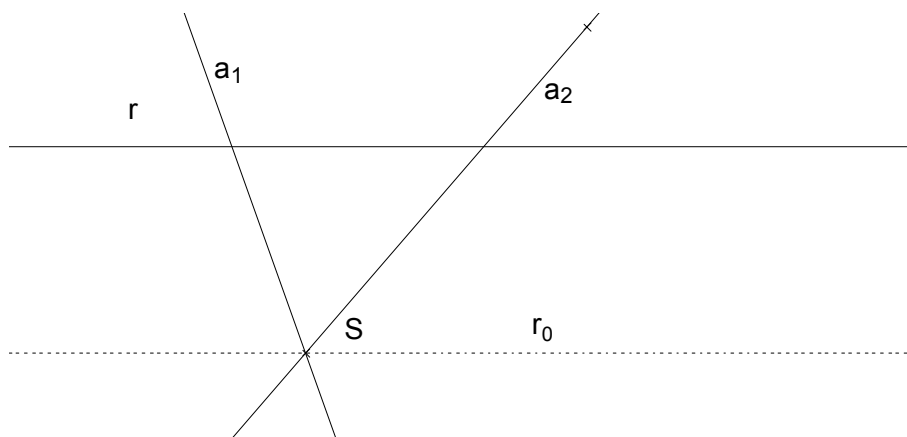
Es gibt also nichttriviale affine Abbildungen, die Flächeninhalte erhalten.

Ein solcher Typ von Abbildung, die **Scherung**, die in der Elementargeometrie eine große Rolle spielt, soll jetzt untersucht werden.

Aufgabe:

Führen Sie hintereinander zwei Schrägspiegelungen an zwei sich schneidenden Achsen  $a_1$  und  $a_2$  mit der gleichen durch eine Gerade  $r$  gegebenen Affinitätsrichtung durch.

Untersuchen Sie insbesondere die Punkte, die auf der durch den Schnittpunkt von  $a_1$  und  $a_2$  verlaufenden Parallelen  $r_0$  zu  $r$  liegen.





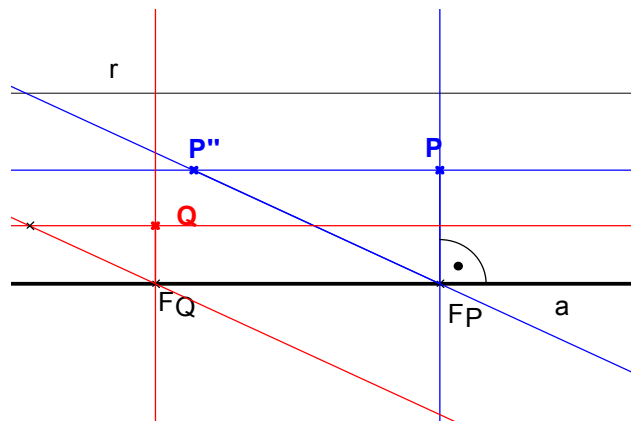
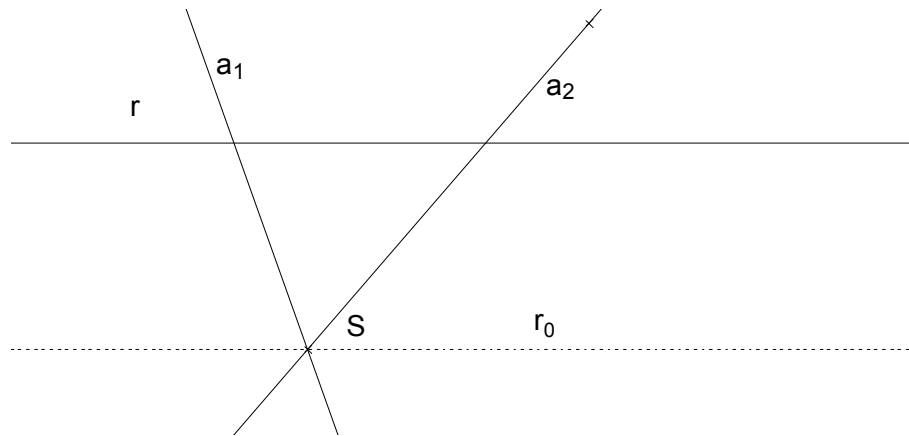
Beobachtung:

Die **Punkte auf  $r_0$**  sind **Fixpunkte**.

Die **Verbindungsgeraden  $PP'$**  sind **parallel zu  $r$** .

Solche Abbildungen nennt man **Scherungen**.

Zeigen Sie, dass man diese Abbildung auch durch andere Achsenaffinitäten mit der gleichen Affinitätsrichtung darstellen kann.



Durch einen Punkt  $P$  und seinen Bildpunkt  $P'$  ist eine Scherung eindeutig festgelegt.

Beschreiben Sie, wie man zu jedem weiteren Punkt  $Q$  den Bildpunkt konstruieren kann.

Dies führt zur folgenden einfachen Definition einer Scherung auf der nächsten Seite.

## Definition der Scherung

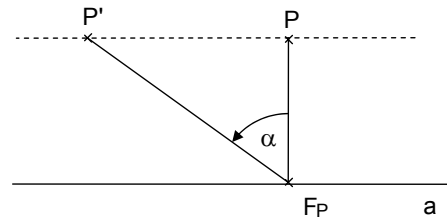
Gegeben sind

- eine Scherungsgerade  $a$
- ein Scherungswinkel  $\alpha$ ,  $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Abbildungsvorschrift für Punkte  $P$ :

$$P \in a \Rightarrow P' = P$$

$$P \notin a \Rightarrow P'P \parallel a, \angle PF_P P' = \alpha, \text{ wobei } F_P \text{ der Lotfußpunkt von } P \text{ auf } a \text{ ist.}$$



Alternative Definition:

Statt des Winkels  $\alpha$  gibt man das Scherungsverhältnis  $v$  an:

$$v = \tan \alpha = \frac{\overline{PP'}}{\overline{PF_P}}$$

(mit geeignetem Vorzeichen)

## Eigenschaften der Scherung

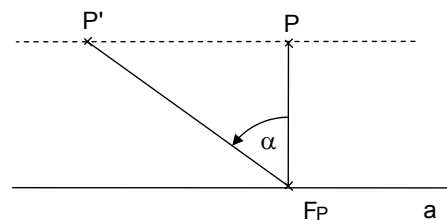
Fixelemente

- Fixpunkte: Die Punkte auf der Scherungsachse  $a$
- Fixpunktgerade  $a$

Invarianten:

Zu den Invarianten allgemeiner Affinitätsabbildungen kommt hinzu:

- Flächeninhalt bleibt erhalten
- Umlaufsinn bleibt erhalten

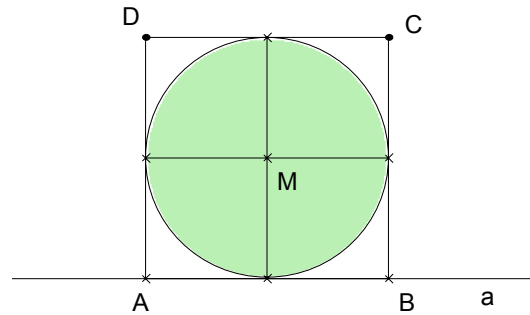
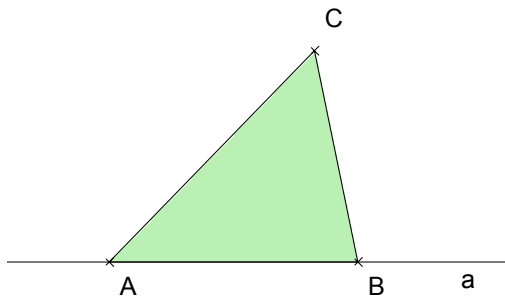


## Aufgabe

Scheren Sie mit der Achse  $a$   
und dem Winkel  $\alpha = 60^\circ$  .

Scheren Sie mit der Achse  $a$   
und dem Winkel  $\alpha = 60^\circ$  .

Scheren Sie mit der Achse  $a$   
und dem Winkel  $\alpha = -30^\circ$  .

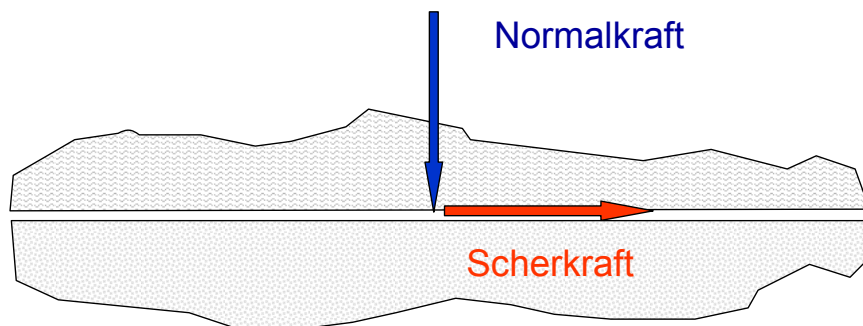


Zum Begriff „Scherung“

In Physik, Technik oder Geographie unterscheidet man an Grenzflächen wirkende Kräfte nach ihrer Richtung.

Normalkraft: Senkrecht zur Grenzfläche

Scherkraft: Parallel zur Grenzfläche



## Anwendung 1 der Scherung: Flächeninhaltsgleiche Umwandlung von n-Ecken in Dreiecke

Problem:

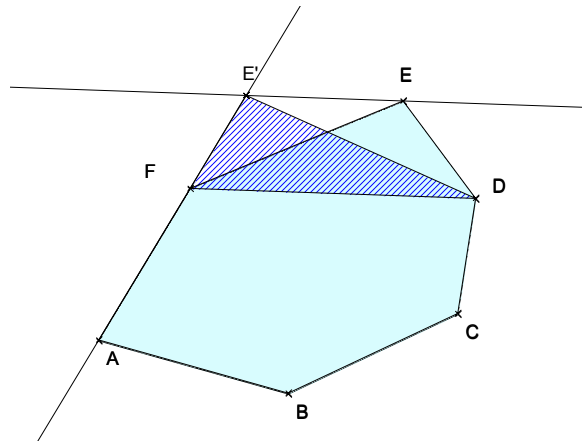
Ein beliebiges n-Eck soll mit Zirkel und Lineal in ein flächeninhaltsgleiches Dreieck (Rechteck, Quadrat) umgewandelt werden.

Lösung:

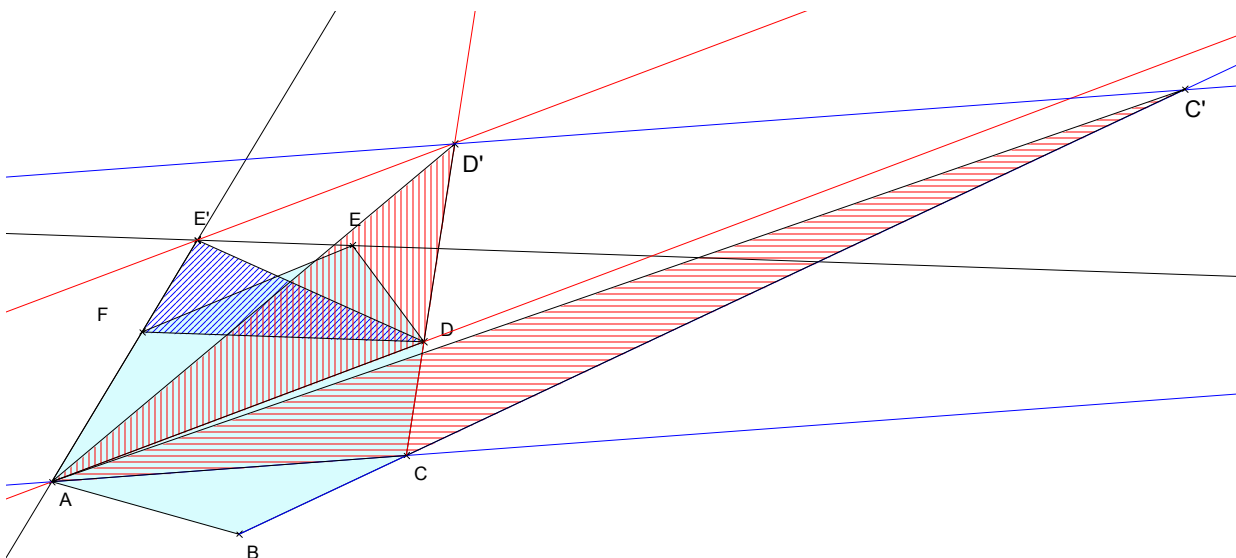
„Ecken nacheinander abscheren“, bis ein Dreieck entstanden ist (s. Skizze).

Das Dreieck kann dann in ein Rechteck und schließlich in ein Quadrat umgewandelt werden (mit dem Kathetensatz oder dem Höhensatz).

Funktioniert das Verfahren auch, wenn das n-Eck nicht konvex ist, also etwa die Ecke E „einspringt“?

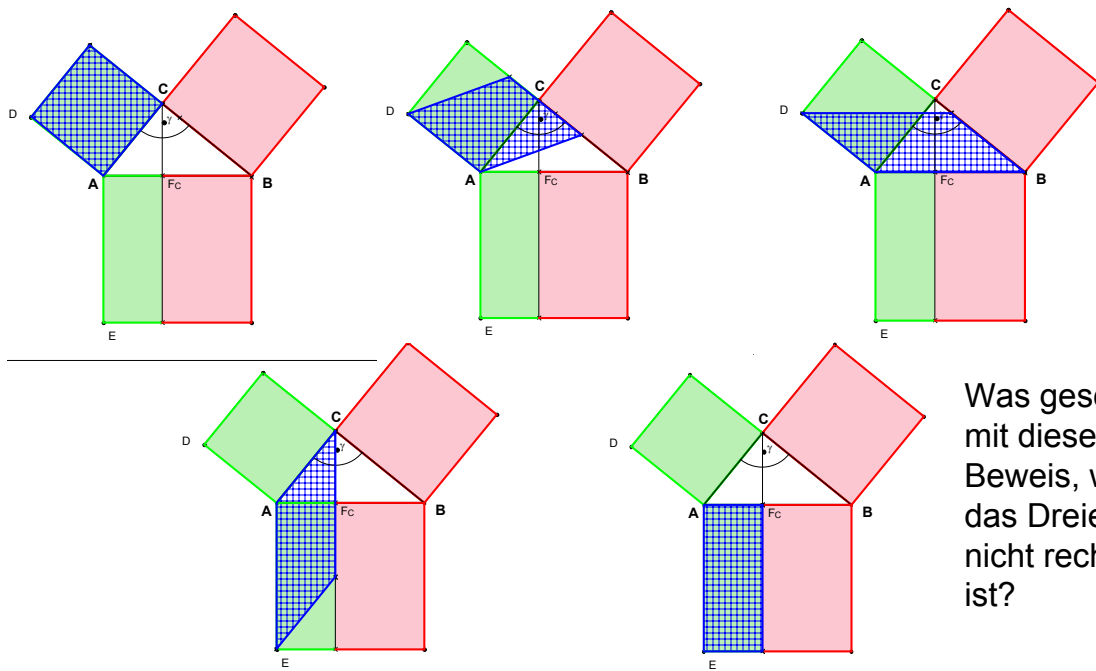


Umwandlung bis zum Dreieck



## Anwendung 2 der Scherung: Beweis des Kathetensatzes

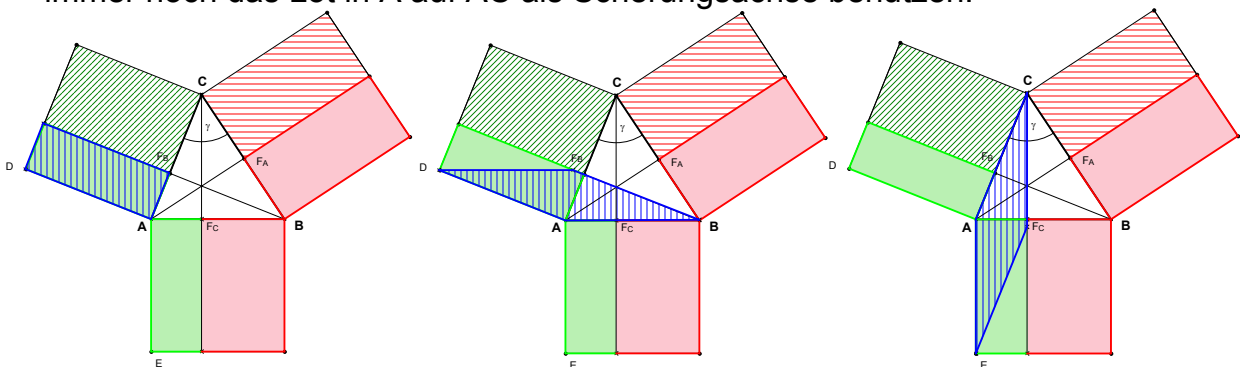
Erklären Sie an Hand der folgenden Bildsequenz einen Beweis für den Kathetensatz.



Was geschieht mit diesem Beweis, wenn das Dreieck nicht rechtwinklig ist?

## Anwendung 3 der Scherung: Beweis des Cosinussatzes

Wenn das Dreieck ABC bei C keinen rechten Winkel besitzt, dann kann man immer noch das Lot in A auf AC als Scherungsachse benutzen:



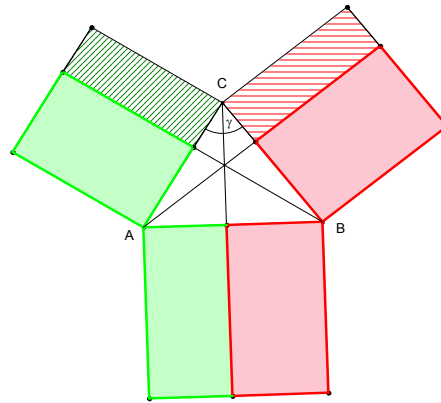
Jetzt wird nicht mehr das Quadrat über der Seite AC, sondern das Rechteck aus  
- der Projektion der Seite AB auf die Seite AC und  
- der Seite AC  
geschert.

Erklären Sie den Beweiskgang und formulieren Sie den Zusammenhang in Worten.

## Cosinussatz

Für jedes Dreieck gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$



Begründen Sie diesen Sachverhalt für *spitzwinklige* Dreiecke mit Hilfe der vorangehenden Überlegungen.

Für beliebige Dreiecke wird der Beweis im Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen im nächsten Kapitel behandelt.

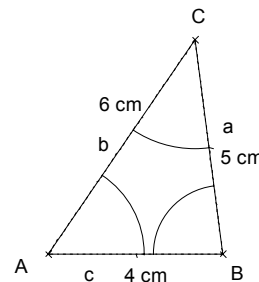
### Aufgabe 1

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$  und  $c = 4 \text{ cm}$ . **Berechnen** Sie die Winkel in diesem Dreieck.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

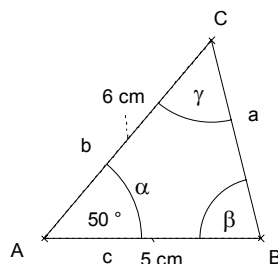
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$



### Aufgabe 2

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen  $b = 6 \text{ cm}$  und  $c = 5 \text{ cm}$  und  $\alpha = 50^\circ$ . **Berechnen** Sie die Seitenlänge  $a$  in diesem Dreieck.



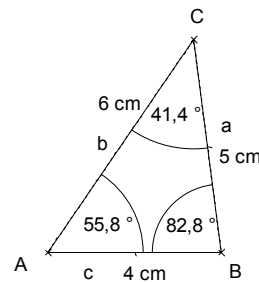
## Aufgabe 1

Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$  und  $c = 4 \text{ cm}$ . **Berechnen** Sie die Winkel in diesem Dreieck.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

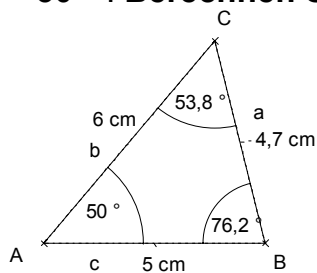
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$



## Aufgabe 2

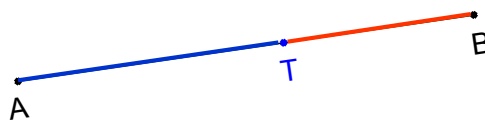
Konstruieren Sie ein Dreieck mit den Seitenlängen  $b = 6 \text{ cm}$  und  $c = 5 \text{ cm}$  und  $\alpha = 50^\circ$ . **Berechnen** Sie die Seitenlänge  $a$  in diesem Dreieck.



## Kapitel 5: Teilverhältnisse und Ähnlichkeit

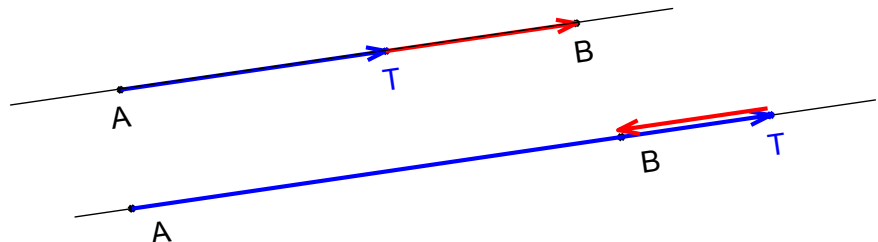
### Definition Teilverhältnis $\lambda$

$$\lambda = \frac{|AT|}{|TB|}$$



Allgemeiner

$$\vec{AT} = \lambda \cdot \vec{TB}$$



T ist **innerer** Teilpunkt, falls  $\lambda > 0$

T ist **äußerer** Teilpunkt, falls  $\lambda < 0$

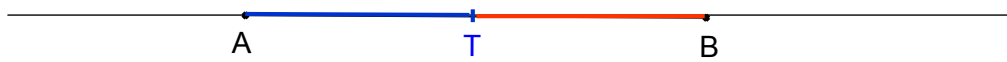
Notation  $\lambda = \text{TV}(A, B; T)$

Schätzen Sie die Werte für das Teilverhältnis  $\lambda = TV(A, B; T)$



—

Schreiben Sie die Werte für das Teilverhältnis  $\lambda = TV(A, B; T)$  unter die Skizze  
z.B.  $\lambda \approx 0$ , positiv oder  $\lambda \approx -2$

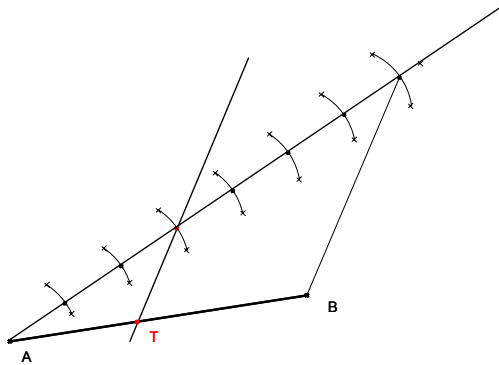


—



Teilen Sie die Strecke AB im Verhältnis  $\lambda = TV(A,B;T) = \frac{n}{m} > 0$ .

Konstruktion mit Zirkel und Lineal (Strahlensatz)



Führen Sie die Konstruktion

für  $\lambda = \frac{3}{4}$  durch.

Übertragen Sie die Konstruktion auf den Fall  $\frac{n}{m} < 0$ .

Führen Sie die Konstruktion für  $\lambda = -\frac{3}{4}$  durch.

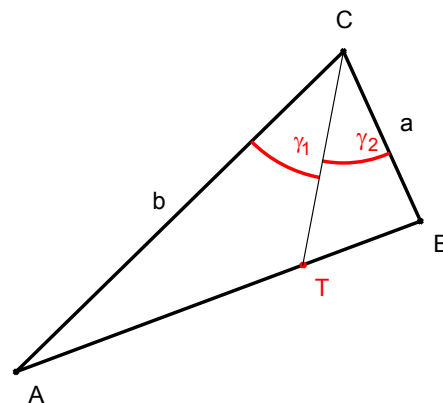
### Winkelhalbierende im Dreieck

Kann man eine Aussage darüber machen, in welchem Verhältnis eine Winkelhalbierende im Dreieck die gegenüberliegende Seite teilt?

$TV(A,B;T) = ?$

Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

d.h. 
$$\frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$$



#### Beweis:

Wir zeigen sogar etwas verschärft - und damit auch eine Umkehr des obigen Satzes

$$\gamma_1 = \gamma_2 \Leftrightarrow \frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$$

Behauptung

$$\gamma_1 = \gamma_2 \Leftrightarrow \frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$$

Beweis

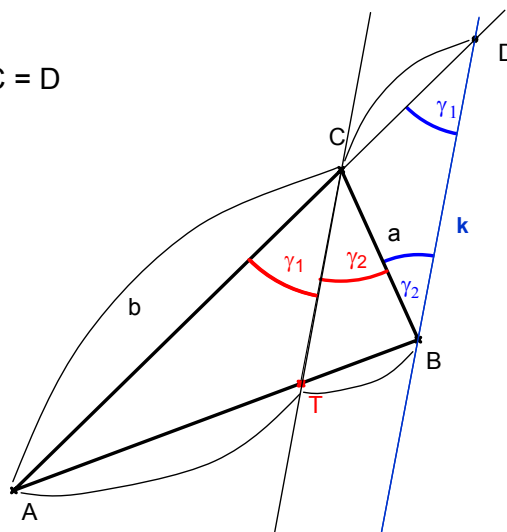
Zeichne **Parallele**  $k$  zu  $CT$  durch  $B$ ;  $k \cap AC = D$   
(Winkelsätze an Parallelen)

Der 1. Strahlensatz liefert  $\frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{|CD|}$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 &\Rightarrow \triangle DCB \text{ gleichwinklig} \\ &\Rightarrow \triangle DCB \text{ gleichschenkelig} \\ &\Rightarrow |CD| = |CB| = a \\ &\Rightarrow \frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Sei umgekehrt  $\frac{|AT|}{|TB|} = \frac{b}{a}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |CD| = a = |CB| \\ &\Rightarrow \triangle DCB \text{ gleichschenkelig} \\ &\Rightarrow \triangle DCB \text{ gleichwinklig} \\ &\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 \end{aligned}$$



## Ein ganz besonderes Teilverhältnis: Der goldene Schnitt

Seit der Antike hat ein als besonders harmonisch empfundenen Teilverhältnis die Mathematik beschäftigt und außergewöhnlich große Bedeutung auch in der Architektur und der Kunst erlangt:

Die Teilung einer Strecke im so genannten „**Goldenen Schnitt**“, auch **stetige Teilung** oder **göttliche Teilung** (*proportio divina*)

Dieses Teilverhältnis tritt auch vielfach in den Naturwissenschaften auf und hat daher einen eigenen Namen bekommen:

Die **goldene Schnittzahl**  $\Phi$  (großes Phi).

(manchmal wird diese Zahl auch mit anderen Buchstaben bezeichnet, etwa  $\tau$ ,  $\varphi$ ).

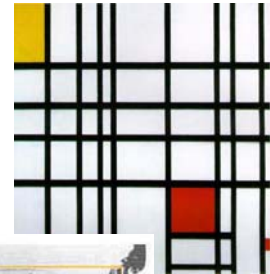
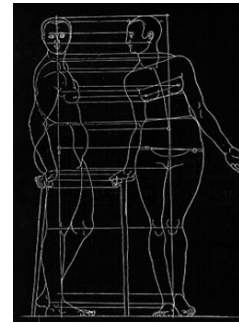
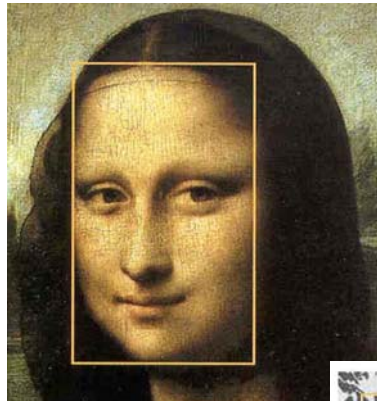
In engem Zusammenhang mit der goldenen Schnittzahl  $\Phi$  steht auch die Folge der **Fibonacci-Zahlen** („Fibonacci“ eigentlich Leonardo von Pisa, der mit den Kaninchen).

Bilder zum goldenen Schnitt

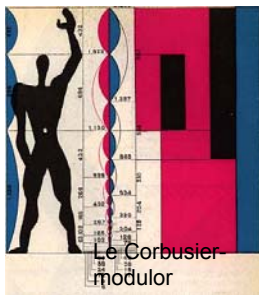
Auch in Schulbüchern, Didaktik-Büchern, allgemein-bildenden Büchern findet man den „goldenen Schnitt“



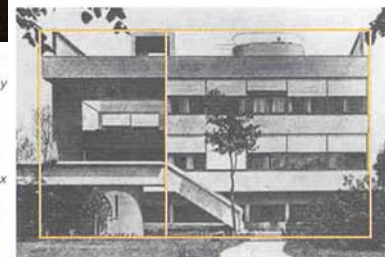
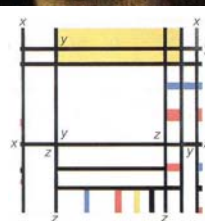
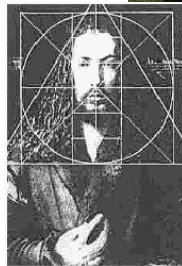
Leonardo da Vincis berühmtes Bild „Vitruv“



Mondrian



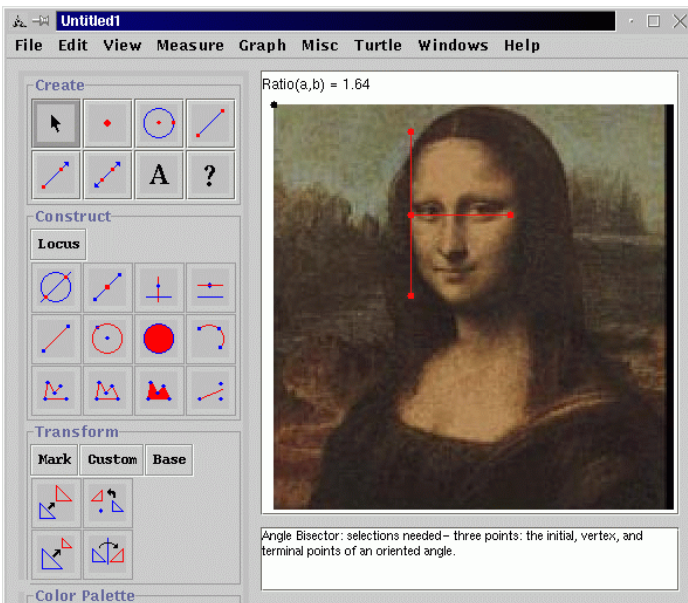
Le Corbusier-modulor



Le Corbusier

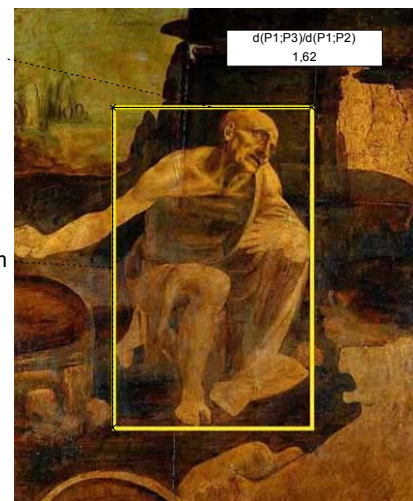
<http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/goldenerschnitt/lu/>

... auch als Beispiel der Möglichkeiten von Geometrie-Software



5,1 cm

8,2 cm



Da Vinci - Jeremias



Stöbern Sie einmal im Internet, schauen sich die Artikel von Wikipedia an, .....

Jetzt aber zur **Definition** dieses Teilverhältnisses.

T sei Teilpunkt der Strecke  $\overline{AB}$ .

T teilt  $\overline{AB}$  im Goldenen Schnitt  $\Leftrightarrow$

$$\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{TB} = \Phi$$

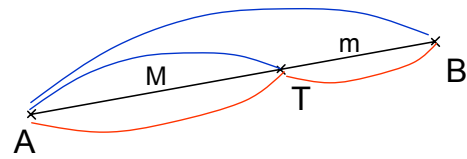
$$\frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{größererAbschnitt}} = \frac{\text{größererAbschnitt}}{\text{kleinererAbschnitt}} = \Phi$$

Kurze Bezeichnungen:

Größerer Abschnitt: Major M

kleinerer Abschnitt: Minor m

$$\frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{Major}} = \frac{\text{Major}}{\text{Minor}} = \Phi$$



Kurz:

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m} = \Phi$$

### Berechnung der goldenen Schnittzahl $\Phi$

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m} = \Phi \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{m}{M} = \frac{M}{m} \quad \Leftrightarrow$$

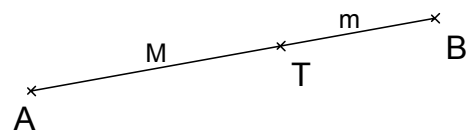
$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \quad \Leftrightarrow$$

$$\Phi + 1 = \Phi^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{oder } \Phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ da aber } \Phi > 0 \text{ sein muss, scheidet dieser Wert aus})$$

$$\Phi \approx 1,618$$



## Eigenschaften der goldenen Schnittzahl $\Phi$

Die goldene Schnittzahl  $\Phi$  hat merkwürdige Eigenschaften. Formulieren Sie diese in der Form, die in der Sekundarstufe I zum Aufstellen von Termen und Gleichungen verwandt wird.

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \quad \text{Die Zahl } \Phi \text{ ist um 1 größer als ihr Kehrwert.}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \quad \text{Der Kehrwert von } \Phi \text{ ist um 1 kleiner als } \Phi.$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \text{Das Quadrat von } \Phi \text{ ist um 1 größer als } \Phi.$$

Der Wert von  $\Phi$  ist ungefähr 1,618. Bestimmen Sie das Quadrat und den Kehrwert von  $\Phi$  näherungsweise.

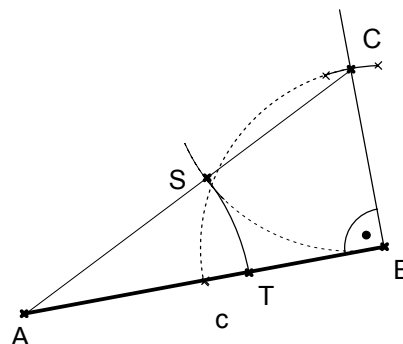
## Konstruktion der Teilung im goldenen Schnitt

Eine der zahlreichen Konstruktionen der Teilung einer Strecke im goldenen Schnitt:

$$CB \perp AB ; |CB| = \frac{1}{2} |AB|$$

$$S = AC \cap \text{Kreis}(C, |BC|)$$

$$T = AB \cap \text{Kreis}(A, |AS|)$$



Behauptung:

$\overline{AB}$  wird durch T im Goldenen Schnitt geteilt.

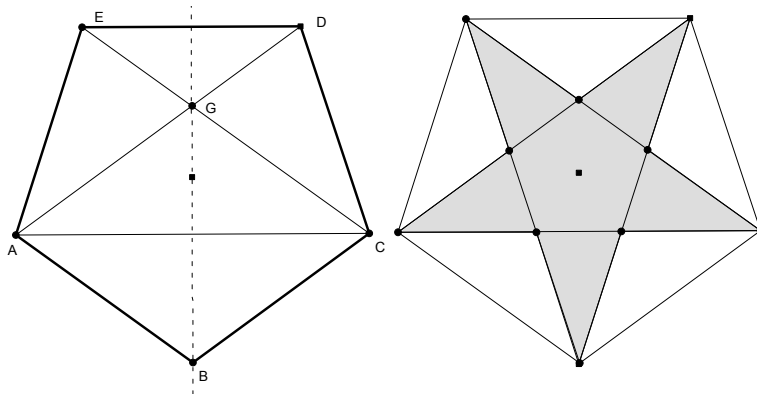
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = \frac{c\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{\overline{AT}}{\overline{AS}} = \frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{c}{\frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2c}{c(\sqrt{5}-1)} = \frac{2c(\sqrt{5}+1)}{c(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

Prüfen Sie (zur Kontrolle) dass auch  $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \Phi$  ist.

## Das regelmäßige Fünfeck und seine Diagonalen

Das regelmäßige Fünfeck und das aus seinen Diagonalen gebildete überschlagene Fünfeck, das Pentagramm oder der „Drudenfuß“ spielen seit der Antike eine magische Rolle.

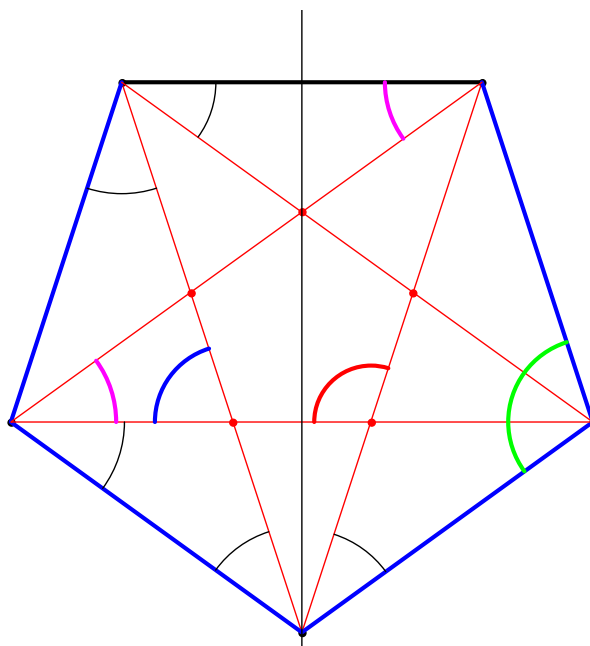


Das Pentagramm war das Wahrzeichen des Geheimbundes der Pythagoreer (der Anhänger des Pythagoras von Samos in Kroton), der Drudenfuß sollte den Teufel abwehren (in Goethes Faust kann Mephistopheles die Türschwelle nicht überschreiten, weil dort ein Drudenfuß zu sehen ist).

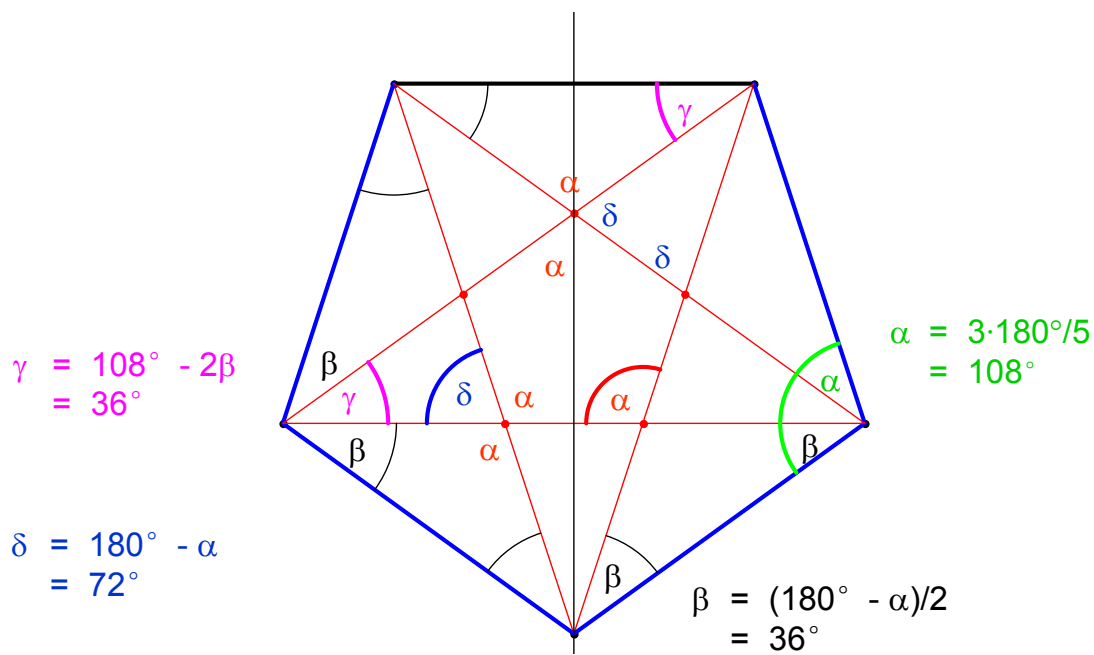
Wir wollen zeigen:

Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks teilen sich im Goldenen Schnitt

Die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks teilen sich im Goldenen Schnitt



Berechnen Sie die in der Figur auftretenden Winkel.



In der Figur treten 2 Typen von zueinander ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken auf.

Wir betrachten die stumpfwinkligen Dreiecke

$ECD$  und  $EGD$

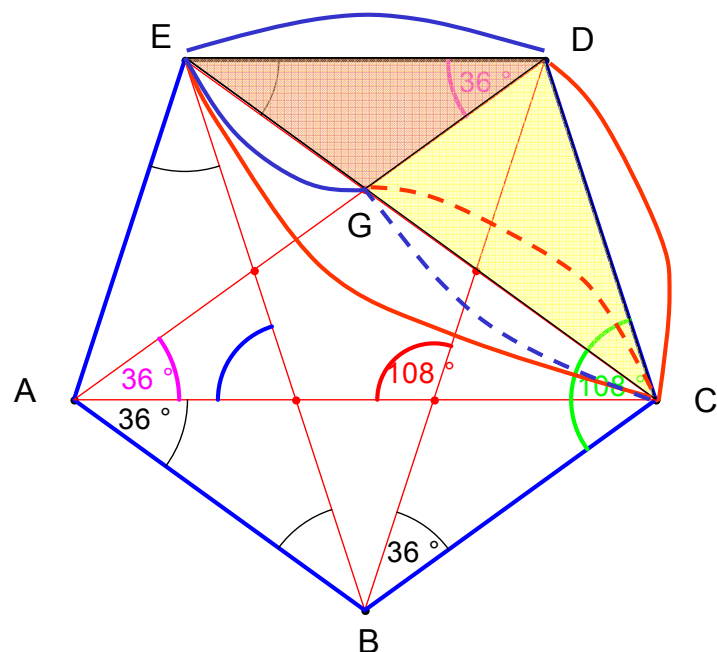
Dann folgt aus deren Ähnlichkeit

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EG}}$$

und da die Strecken  $\overline{CG}$ ,  $\overline{CD}$  und  $\overline{ED}$

gleich lang sind auch

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{EG}}$$



⇒ Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis des goldenen Schnitts.

## Anderer Beweis

Ein regelmäßiges Fünfeck ist  
 - achsensymmetrisch zur Mittelsenkrechten  
 - drehsymmetrisch zum Mittelpunkt.

Aus den Symmetrieeigenschaften folgt:

$$\overline{AC} = \overline{EC} \quad (\text{gleichlange Diagonalen})$$

$ED \parallel AC$  (Achsensymmetrie)

$$\begin{aligned} \angle DCE &= \angle DEC && (\text{gleichschenkliges Dreieck}) \\ &= \angle GCA && (\text{Wechselwinkel}) \\ &= \angle GAC && (\text{gleichschenkliges Dreieck}) \end{aligned}$$

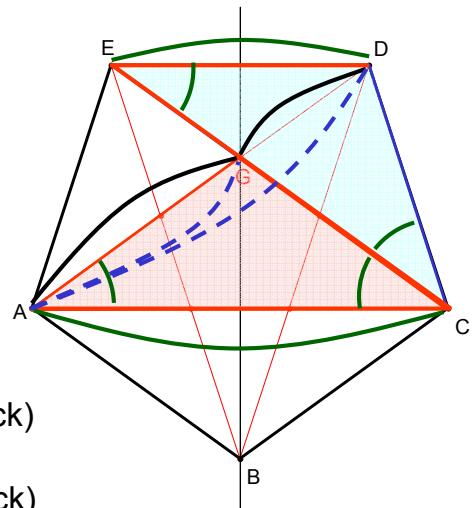
$$\Rightarrow \triangle EDC \cong \triangle AGC$$

Bestimme das Teilverhältnis  $\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}}$  :

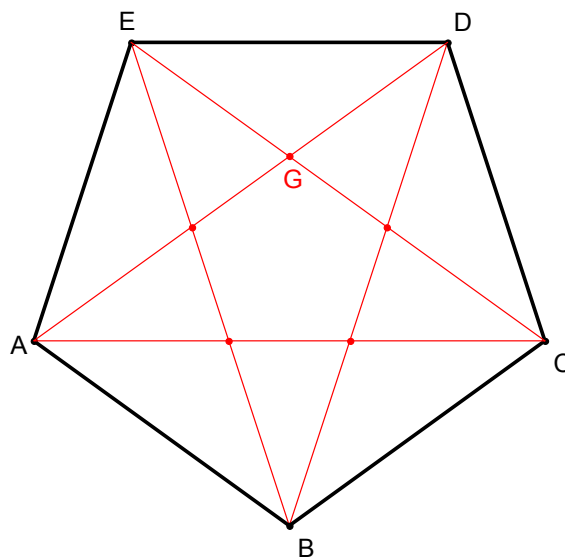
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} \quad (\text{Strahlensatz})$$

$$= \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} \quad \left( \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} \text{ Diagonalen ; Kongruenz } \right)$$

⇒ Die Diagonalen teilen sich im Verhältnis des goldenen Schnitts.



Aufgabe:



Berechnen Sie jeweils das Verhältnis von

- größerem Diagonalenabschnitt zur Diagonalen,
- Fünfecksseite zu Diagonale,
- kleinerem Diagonalenabschnitt zur Diagonalen,
- innerer Fünfecksseite zur ursprünglichen Fünfecksseite.



## Ähnlichkeiten am rechtwinkligen Dreieck

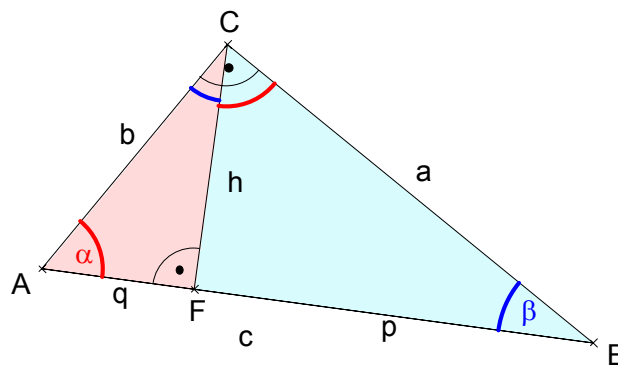
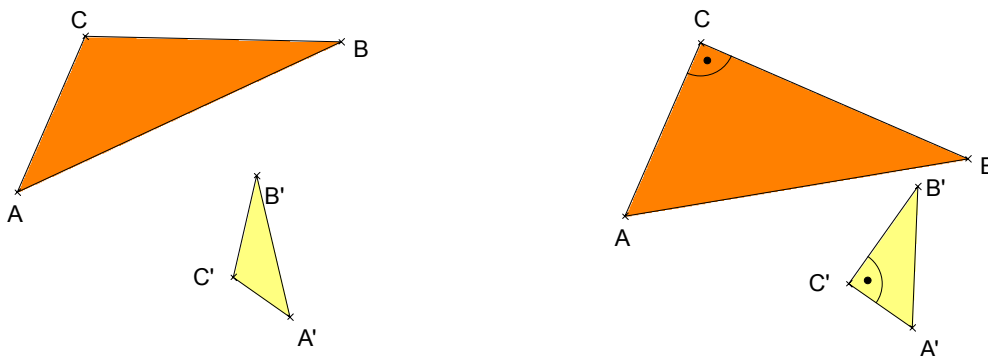
Ähnlichkeit beliebiger Dreiecke

Zwei Dreiecke sind ähnlich wenn sie in *zwei* Winkeln übereinstimmen.

Ähnlichkeit rechtwinkliger Dreiecke

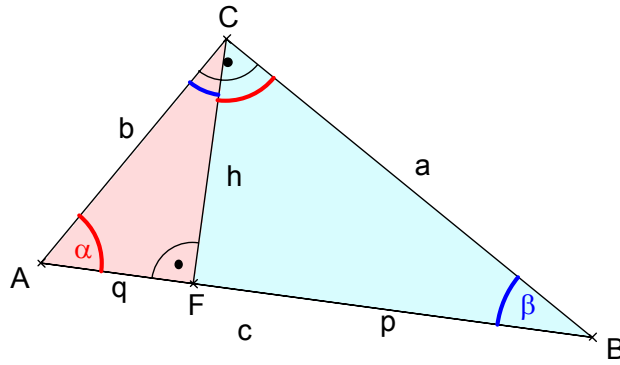
Zwei *rechtwinklige* Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in *einem* Winkel  $< 90^\circ$  übereinstimmen.

Begründungen?



Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB und dem Höhenfußpunkt F auf AB.

Dann sind die Dreiecke ABC, BCF und CAF zueinander ähnlich.



Damit kann man die Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras sehr kurz beweisen:

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q} \quad \Rightarrow \quad h^2 = p \cdot q \quad (\text{Höhensatz})$$

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a^2 = p \cdot c \quad (\text{Kathetensatz})$$

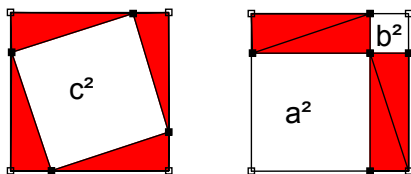
$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b^2 = q \cdot c \quad (\text{Kathetensatz})$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = (p+q) \cdot c = c^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

### Gegenüberstellung einiger Beweise zum Satz des Pythagoras

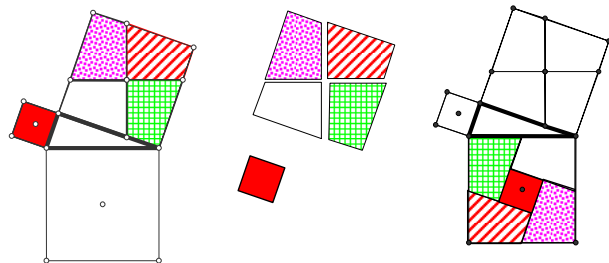
#### Ergänzungsbeweis

Die weißen Quadratflächen sind ergänzungsgleich.

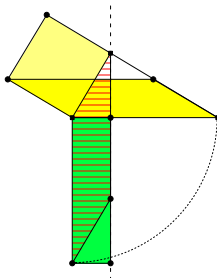


#### Zerlegungsbeweis

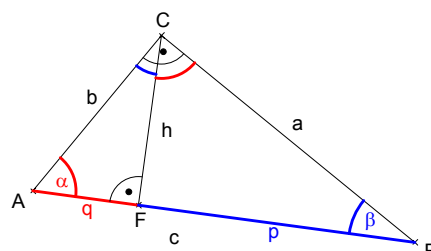
Die Quadratflächen über den Katheten und die Quadratfläche über der Hypotenuse sind zerlegungsgleich.



#### Scherungsbeweis



#### Beweis über Ähnlichkeit

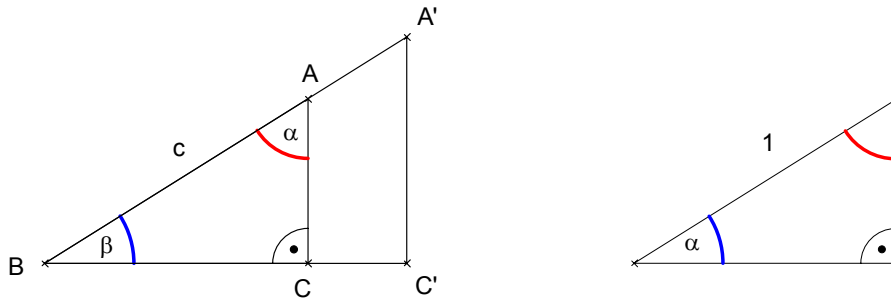


## Rechtwinkliges Dreieck und trigonometrische Funktionen

Ein rechtwinkliges Dreieck ist eindeutig bestimmt durch

- eine Seite und einen Winkel ( $< 90^\circ$ )
- eine Seite und das *Verhältnis* von zwei Seitenlängen

Kathete : Hypotenuse      sinus, cosinus  
Kathete 1 : Kathete 2      tangens, cotangens

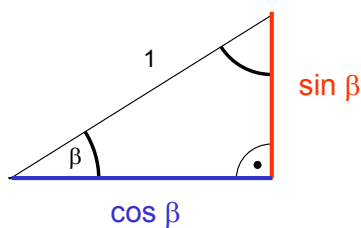


Stimmen zwei rechtwinklige Dreiecke in einem Winkel  $\neq 90^\circ$  überein, dann sind die Längenverhältnisse entsprechender Seiten gleich.

Um solche Verhältnisse durch Streckenlängen eindeutig zu repräsentieren, wählt man Dreiecke mit der Hypotenusenlänge 1 LE bzw. Kathetenlänge 1 LE.

### Definitionen

Hypotenuse 1 LE



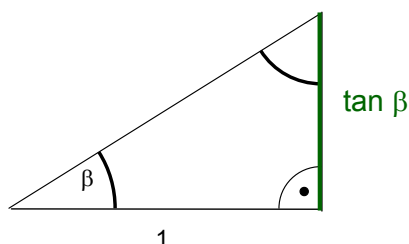
$$\sin \beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der **Gegenkathete zu  $\beta$**

$$\cos \beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{Ankathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der **Ankathete zu  $\beta$**

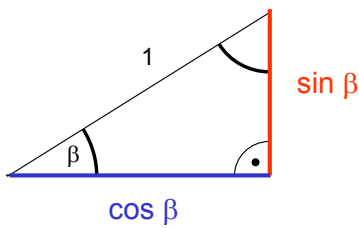
Ankathete 1 LE



$$\tan \beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{1\text{LE}}$$

= Maßzahl der **Gegenkathete zu  $\beta$**

## Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

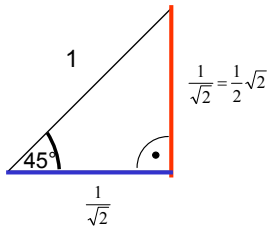


$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin \beta = \cos(90^\circ - \beta) \quad \cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$$

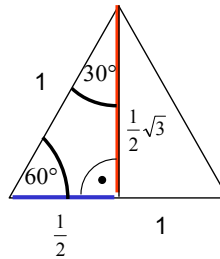
$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

### Werte für spezielle Winkel



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$



$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

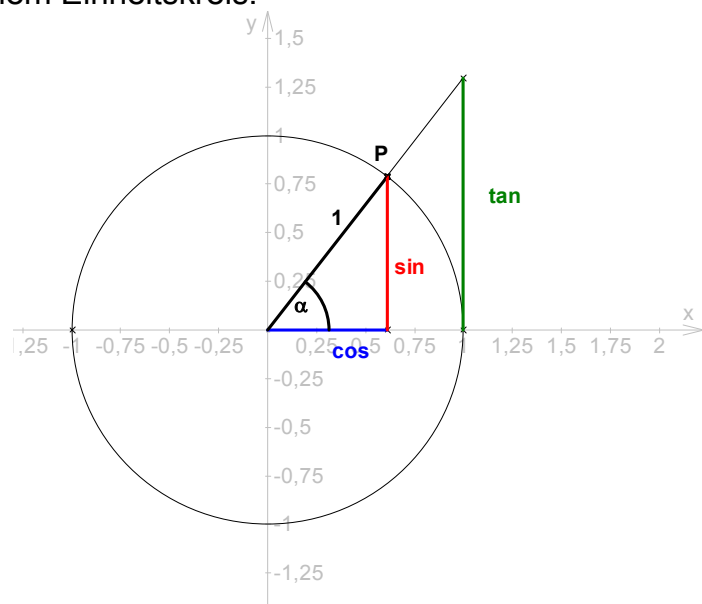
## Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Betrachte zunächst noch einmal die Definition der trigonometrischen Funktionen an rechtwinkligen Dreiecken mit Eckpunkt P, bei denen die Hypotenuse die Länge 1 hat. P bewegt sich auf einem Einheitskreis.

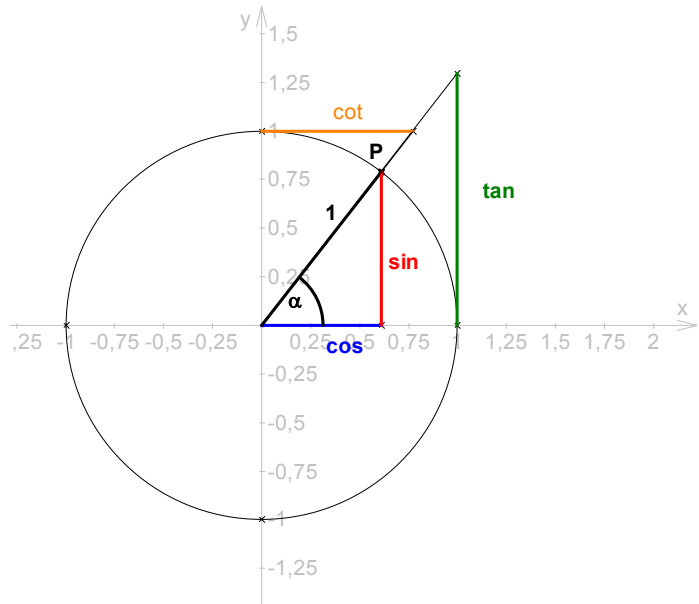
Dann lassen sich die Winkelfunktionen wieder als Längen gewisser Strecken interpretieren.

Insbesondere ist

- $\sin(\alpha)$  die y-Koordinate von P
- $\cos(\alpha)$  die x-Koordinate von P
- $\tan(\alpha) = \sin(\alpha) / \cos(\alpha)$



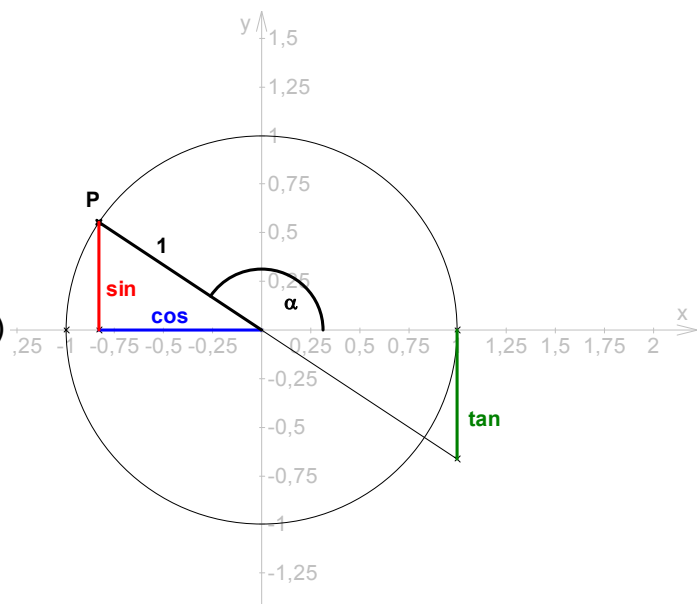
Hier ist auch noch die Cotangensfunktion cot berücksichtigt.



Diese Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis lassen sich jetzt auf Winkel  $> 90^\circ$  erweitern. Der Winkel zu einem Punkt wird stets im Gegenuhrzeigersinn von der positiven x-Achse zum Strahl OP gemessen.

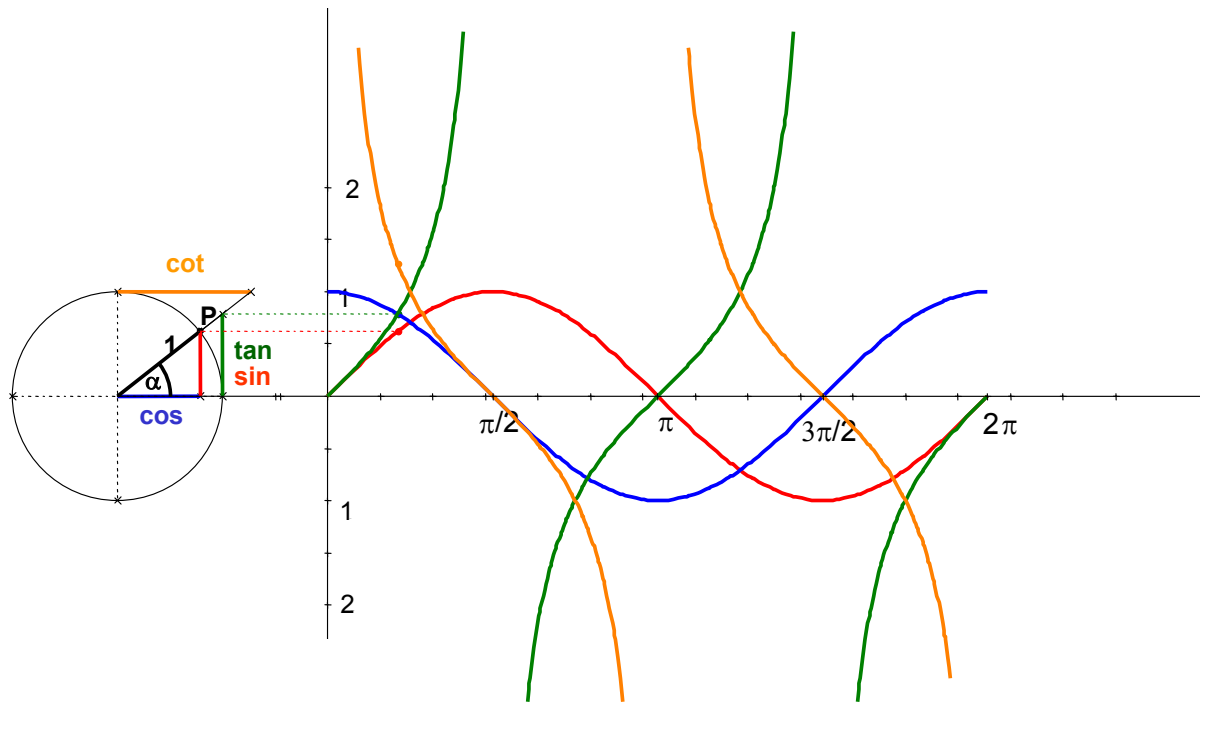
Hier ist wieder

- $\sin(\alpha)$  die y-Koordinate von P
- $\cos(\alpha)$  die x-Koordinate von P
- $\tan(\alpha) = \sin(\alpha) / \cos(\alpha)$
- $\cot(\alpha) = \cos(\alpha) / \sin(\alpha) = 1 / \tan(\alpha)$



## Trigonometrische Funktionen: Funktionsgraphen

Hier die entstehenden Graphen (Winkel im Bogenmaß auf der horizontalen Achse):



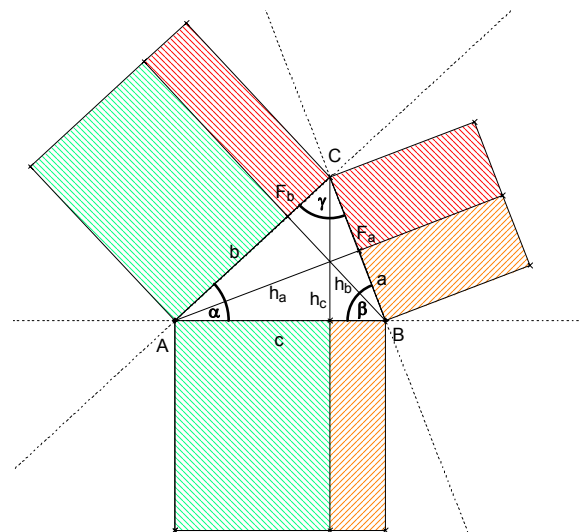
## Dreiecke berechnen: Sinus- und Cosinussatz für beliebige Dreiecke

Während beim Kathetensatz und beim Satz des Pythagoras der rechte Winkel ausgezeichnet ist stehen jetzt alle Ecken gleichberechtigt nebeneinander. Wir zeigen mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze, dass bei *spitzwinkligen* Dreiecken jeweils die an Dreiecksseiten zusammenstoßenden gleich schraffierten Rechtecke flächeninhaltsgleich sind.

Diese Flächen entstehen, wenn die Quadrate über den Dreiecksseiten durch die Verlängerungen der Dreieckshöhen in Rechtecke geteilt werden.

Aus dieser Figur erkennt man sofort die Verallgemeinerungen des Kathetensatzes und des Satzes von Pythagoras:

Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Dreiecksseiten vermindert um die zwei gleich großen entsprechenden Rechtecke.



## Cosinussatz für spitzwinklige Dreiecke

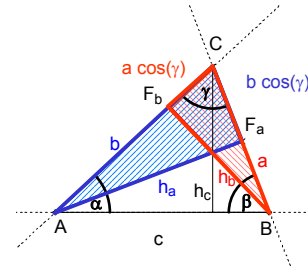
Wir betrachten jetzt die beiden Dreiecke  $AF_aC$  und  $BF_bC$ .

Es gilt

$$\overline{CF_a} = b \cos(\gamma)$$

$$\overline{CF_b} = a \cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow a \cdot \overline{CF_a} = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \overline{CF_b}$$



## Cosinussatz für spitzwinklige Dreiecke

Wir betrachten jetzt die beiden Dreiecke  $AF_aC$  und  $BF_bC$ .

Es gilt

$$\overline{CF_a} = b \cos(\gamma)$$

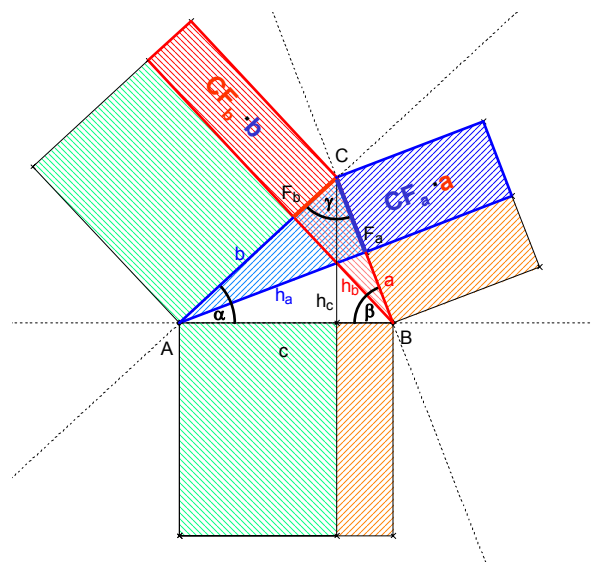
$$\overline{CF_b} = a \cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow a \cdot \overline{CF_a} = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = b \cdot \overline{CF_b}$$

Dies sind gerade die Flächeninhalte der beiden rot und blau schraffierten Rechtecke

Daraus ergibt sich wieder der Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma)$$



## Cosinussatz für stumpfwinklige Dreiecke

Für stumpfwinklige Dreiecke sind die Figuren etwas unübersichtlicher. Wir betrachten den Fall, dass der Winkel  $\gamma$  stumpf ist.

Wir zeigen wieder, dass folgende Rechtecke flächeninhaltsgleich sind:

$AF_bGF$  und  $ALNF_c$

$F_aIJB$  und  $F_cBMN$

$F_aIKC$  und  $F_bGHC$

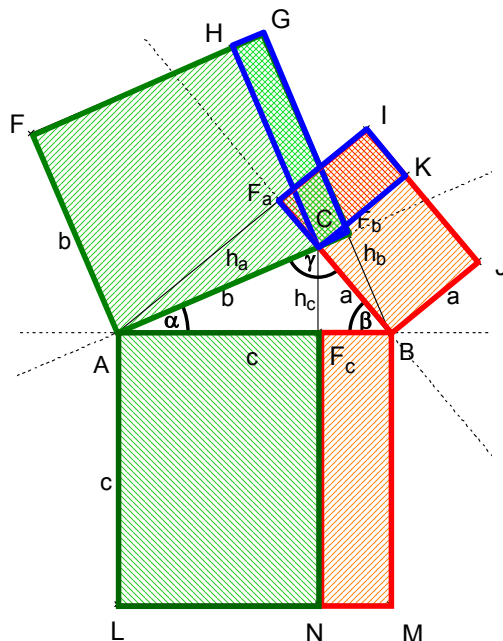
Wir zeigen weiter, dass die blau umrandeten Rechtecke den *negativ bewerteten* Flächeninhalt

$$a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

besitzen.

Auch daraus ergibt sich wieder der Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos(\gamma)$$

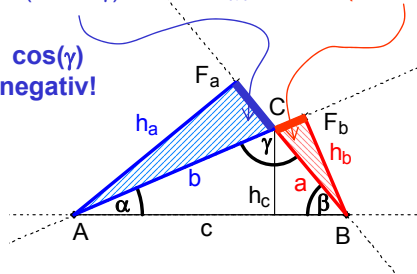


Zuerst betrachten wir die beiden Rechtecke am Winkel  $\gamma$  (Farben gegenüber der vorangehenden Zeichnung verändert, um den Unterschied zwischen den Rechtecken zu sehen).

$$b \cos(180^\circ - \gamma) = -b \cos(\gamma) \quad a \cos(180^\circ - \gamma) = -a \cos(\gamma)$$

$\cos(\gamma)$   
negativ!

$\cos(\gamma)$   
negativ!



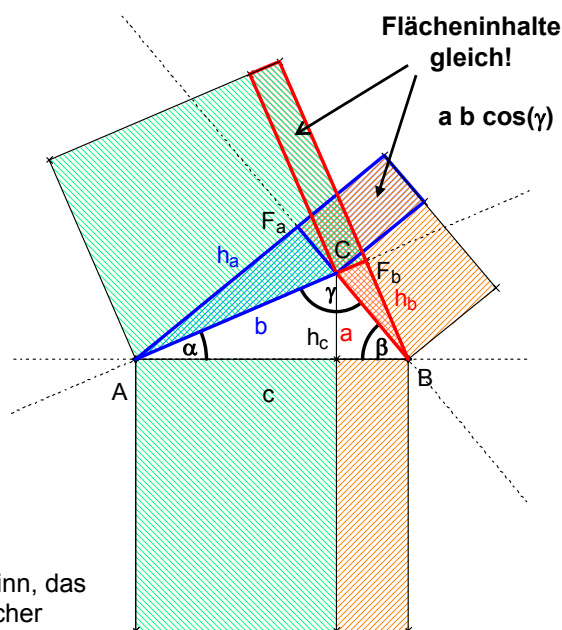
Wenn man diese "Flächeninhalte" als

$$a b \cos(\gamma)$$

ausdrückt, dann sind diese negativ!

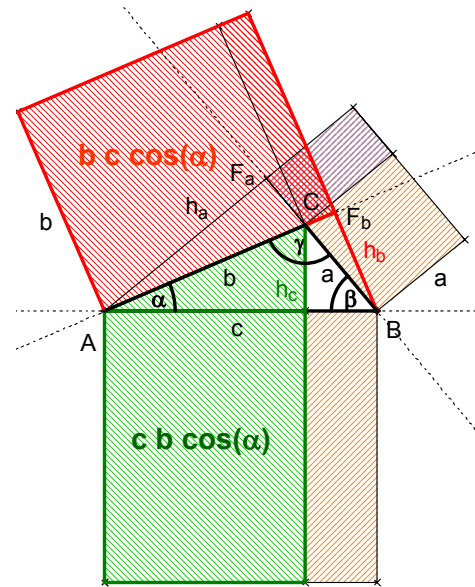
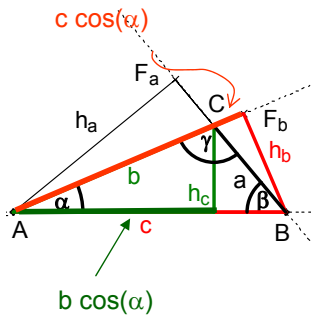
Dieses sind dann zwar keine Flächeninhalte im strengen Sinn, das Vorzeichen lässt aber zu, dass der Cosinussatz in einheitlicher Form geschrieben werden kann.

Man kann das Vorzeichen von Flächeninhalten über den Umlaufsinn deuten.



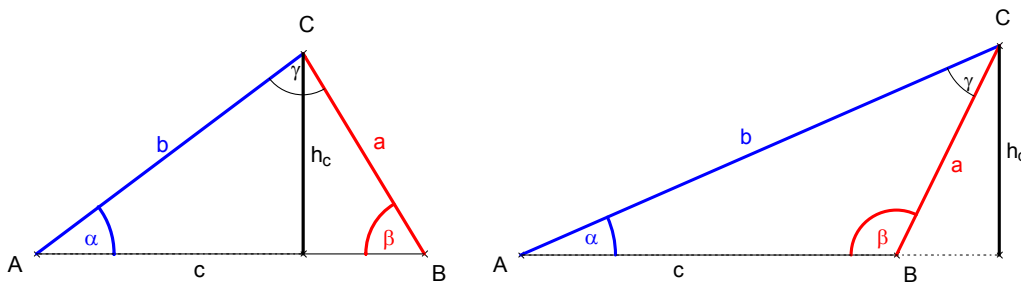


Jetzt sind noch die Rechtecke um die spitzen Winkel, etwa  $\alpha$ , zu untersuchen.  
 (Auch hier sind die Farben gegenüber der ursprünglichen Zeichnung verändert).



## Sinussatz

Der Sinussatz ist wesentlich einfacher zu beweisen als der Cosinussatz. Der Beweis verläuft für spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke gleich.

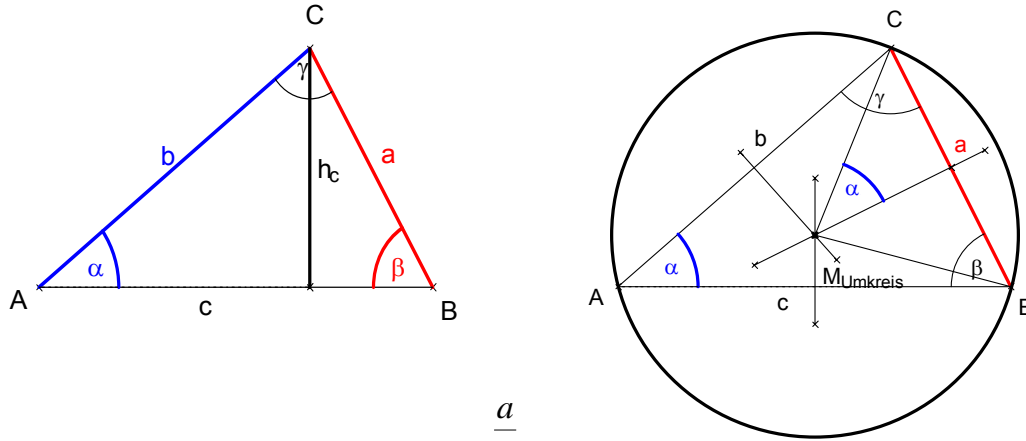


Die Höhe  $h_c$  lässt sich sowohl mit Hilfe von  $a$  und  $\alpha$  als auch mit  $b$  und  $\beta$  ausdrücken:

$$h_c = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

Das ist im Wesentlichen der Sinussatz.  
 Wir wollen diese konstanten Verhältnisse aber noch deuten.

Man zeichnet zum Dreieck ABC den Umkreis. Der Winkel  $\alpha$  auf dem Umkreis ist gerade die Hälfte des zur Seite a gehörenden Mittelpunktswinkels (Umfangswinkelsatz).

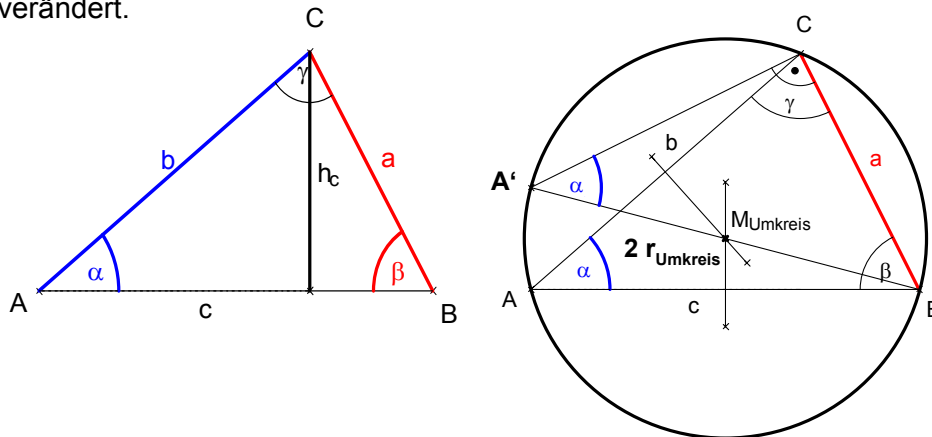


Daraus ergibt sich sofort 
$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{r_{\text{Umkreis}}} = \frac{a}{2r_{\text{Umkreis}}}$$

Damit erhält man den Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r_{\text{Umkreis}}$$

Man zeichnet zum Dreieck ABC den Umkreis. Hält man die Seite a fest und bewegt den Punkt A' auf dem Umkreis des ursprünglichen Dreiecks, dann bleibt der Umfangswinkel  $\alpha$  unverändert.



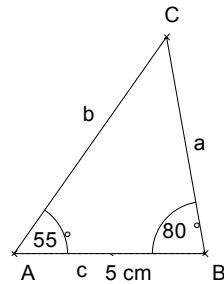
Betrachtet man die Lage des Punktes A', bei der BA' durch den Umkreismittelpunkt verläuft, dann ist das Dreieck rechtwinklig und der Sinus von  $\alpha$  lässt sich mit Hilfe des Umkreisradius ausdrücken: 
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{2r_{\text{Umkreis}}}$$

Daraus ergibt sich der Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r_{\text{Umkreis}}$$

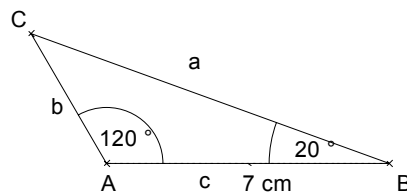
## Aufgabe 1

Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seitenlänge  $c = 5 \text{ cm}$  und den Winkeln  $\alpha = 55^\circ$  und  $\beta = 80^\circ$ . **Berechnen** Sie die übrigen Seiten des Dreiecks. Berechnen Sie auch den Radius des Umkreises.



## Aufgabe 2

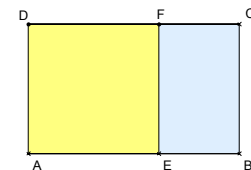
Konstruieren Sie ein Dreieck mit der Seitenlänge  $c = 7 \text{ cm}$  und den Winkeln  $\alpha = 120^\circ$  und  $\beta = 20^\circ$ . **Berechnen** Sie die übrigen Seitenlängen in diesem Dreieck.



## Rechtecksformate

Wir wollen noch eine weitere Anwendung des Ähnlichkeitsbegriffs geben. Wir hatten schon in den Übungen goldene Rechtecke definiert:

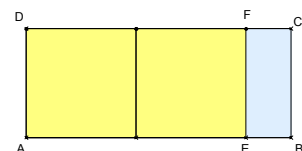
Ein Rechteck heißt golden, wenn durch Abtrennen eines Quadrates (dessen Seitenlänge die kürzere Rechtecksseite ist) ein zum ursprünglichen Rechteck ähnliches Rechteck entsteht.



In analoger Weise definieren wir weitere Rechtecksformen.

### Aufgabe

Ein Rechteck heiße silbern, wenn durch Abtrennen zweier Quadrate (deren Seitenlänge die kürzere Rechtecksseite ist) ein zum ursprünglichen Rechteck ähnliches Rechteck entsteht.



Berechnen Sie das Seitenverhältnis von silbernen Rechtecken.

## DIN-Format

Die Papierformate der DIN-A-Reihe werden durch folgende Bedingungen definiert:

- Halbiert man die längere Seite des Rechtecks, dann entstehen zwei zum ursprünglichen Rechteck ähnliche Rechtecke.
- $\text{DIN } A(n+1)$  ist das aus  $\text{DIN } A_n$  durch Halbieren entstehende Format.
- $\text{DIN } A_0$  hat den Flächeninhalt  $1 \text{ m}^2$ .

### Aufgabe

- Berechnen Sie das Seitenverhältnis von Rechtecken der DIN A Reihe.
- Bestimmen Sie die Seitenlängen von  $\text{DIN } A_0$ .
- Stellen Sie die Tabelle der Seitenlängen von  $\text{DIN } A_0$  bis  $\text{DIN } A_4$  auf.
- Begründen Sie nochmals, mit welchem prozentualen Verkleinerungsfaktor zwei  $\text{DIN } A_4$  Seiten auf ein  $\text{DIN } A_0$  Blatt kopiert werden können und erläutern Sie, weshalb diese Eigenschaft charakteristisch für das DIN A Format ist.

Anhang

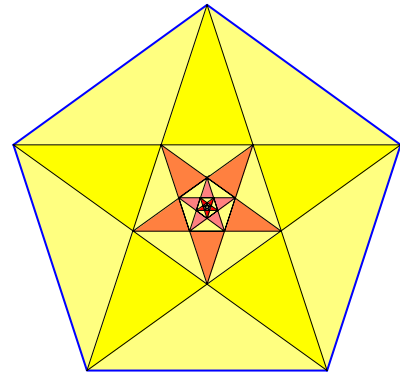
## Pentagramm im „Faust“

MEPHISTO:

*Gesteh' ich's nur! Dass ich hinausspaziere,  
Verbietet mir ein kleine Hindernis:  
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle ---*

FAUST:

*Das Pentagramma macht dir Pein?  
Ei, sage mir du Sohn der Hölle:  
Wenn dich das bannt, wie kamst du den herein?*



....

Faust erkennt die Chance, Mephisto festzuhalten, dem der Rückzug aus dem Zimmer durch ein sich dort befindliches Pentagramm verwehrt bleibt. Doch Mephisto geht (noch) keinen Pakt mit Faust ein, wie es dieser vorschlägt. Durch Geistergesang wird Faust in tiefen Schlaf versetzt, so dass Mephisto mit Hilfe einer Ratte, die den Drudenfuss benagt, fliehen kann.



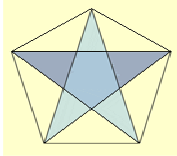
## Magische Pentagramme



### Das Zeichen der Pythagoreer

Der Bund der Pythagoreer hatte auch sein geheimes Zeichen. Das war der (regelmäßige) fünfzackige Stern, das „**Pentagramm**“, das im Mittelalter als Amulett verwendet wurde. (Auch GOETHEs Faust zeichnet eine solche Figur, „Drudenfuß“ genannt, auf seine Schwelle, um den Teufel fernzuhalten.)  
*Es begab sich, dass einst ein alter, gebrechlicher und kranker Wanderer an einem Haus anklopfte und um etwas zu essen und zu trinken bat. Der Wirt des Hauses war ein gutherziger Mann, gab dem Wanderer Nahrung und ein Nachtlager und versorgte ihn auch weiterhin, da der alte Mann sterbenskrank war. Als es mit ihm zu Ende ging, bat er seinen Wirt um eine Tafel und ein Stück Kreide, malte ein Pentagramm darauf und forderte den Wirt auf, die Tafel in das Fenster zu stellen, denn er habe sonst nichts, womit er die Güte, die er erfahren hatte, vergelten könne. Dann starb er. Einige Zeit später kam ein vornehmer Reisender an dem Haus vorbei, sah die Tafel und fragte den Wirt, welche Bewandnis es damit habe. Als der Wirt den Hergang erzählte, wurde er von dem Reisenden mit einem Beutel Geldes entlohnt.*

Doch ausgerechnet die Figur des Pentagramms brachte die Philosophie der Pythagoreer ins Wanken, denn die Länge des Umkreises und die Seitenlänge des Fünfecks lassen sich nicht in einem Verhältnis natürlicher Zahlen ausdrücken. Auf solches Problem war man schon bei der Basis und den Schenkeln eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks gestoßen. Heute wissen wir, dass dies zu irrationalen Zahlen führt. Als einer der Pythagoreer, ein gewisser HIPPOSOS, solches auszusprechen wagte, war das wie eine Gotteslästerung, und die Götter sollen ihn bei einem Schiffbruch umkommen lassen haben. Immerhin begegneten die Pythagoreer dabei dem Problem des „**Goldenen Schnitts**“.  
Die Geheimniskrämerei der Pythagoreer und ihre ungewöhnliche Lebensweise erregten den Unmut der Bevölkerung. So wurden sie zunächst aus Kroton, dann auch aus Megapontum, wohin sie sich geflüchtet hatten, vertrieben. Möglicherweise kam PYTHAGORAS bei einem solchen Pogrom ums Leben.

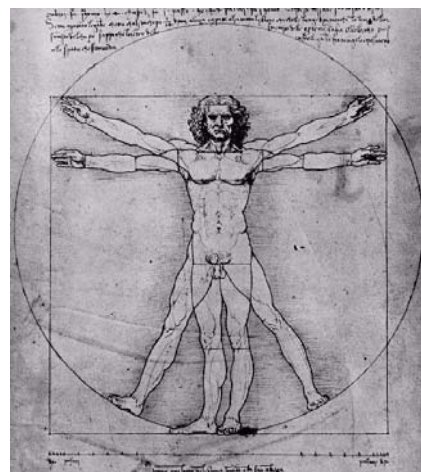


## Vitruv – Leonardo da Vinci

### Vitruv

Eine zentrale Passage in Vitruvs Abhandlung stellt die Theorie des wohlgeformten Menschen (*homo bene figuratus*) vor. Anhand geometrischer Formen werden die Proportionen des Menschen zueinander beschrieben. Dies inspirierte mehrere Künstler der Renaissance zu Skizzen, unter anderem auch Albrecht Dürer. Die berühmteste Illustration stammt von Leonardo da Vinci und erlangte unter dem Namen "Der vitruvianische Mensch" Berühmtheit.

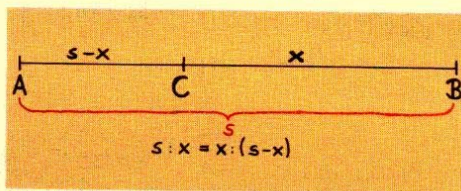
*Proportionsschema der menschlichen Gestalt nach Vitruv – Skizze von Leonardo da Vinci, 1485/90, Venedig, Galleria dell' Accademia*



## Der goldene Schnitt im Schulbuch: Schnittpunkt 10 (alt) Klett

Bereits im antiken Griechenland wurden beim Erschaffen von Kunstwerken und Gebäuden Gesetzmäßigkeiten angewandt, die das Gefühl von Schönheit und Harmonie vermitteln sollten. Auch Dürer und andere Künstler der Renaissance beschäftigten sich mit der „Göttlichen Proportion“, bei der Teilstrecken einer Figur in einem bestimmten Verhältnis stehen.

Eine Strecke ist im Goldenen Schnitt geteilt, wenn das Verhältnis der Gesamtstrecke  $s$  zum größeren Teil gleich dem Verhältnis des größeren Teils zum kleineren ist.



## DER GOLDENE SCHNITT

3

Im **Liber abacci** des **Leonardo von Pisa** (ca. 1170–1250) findet man die nach ihm benannte Fibonacci-Zahlenfolge  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

a) Nach welcher Gesetzmäßigkeit entstehen die Glieder der Zahlenfolge?

b) Wie lautet die 11., wie die 12. Zahl?

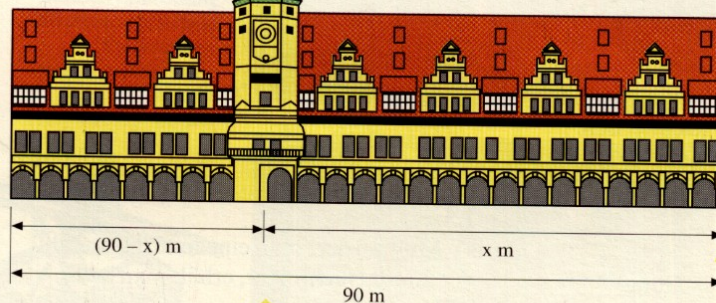
c) Mit den Gliedern der Fibonacci-Folge lassen sich Quotienten auf folgende Weise bilden:  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$

Setze die Folge der Quotienten um 5 weitere Glieder fort und berechne jeweils deren Dezimalwert auf 6 Nachkommastellen genau. Was fällt dir auf?

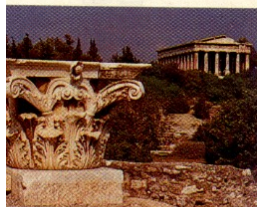
d) Bestimme mit einer Tabellenkalkulation die ersten 30 Fibonacci-Zahlen und die zugehörigen Quotienten. Vergleiche die Quotienten mit  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

1

Das 1556 in der Renaissancezeit erbaute Alte Rathaus in Leipzig wird durch seinen Turm im Goldenen Schnitt geteilt. In welcher Entfernung vom rechten Rand des Gebäudes befindet sich der Turm?



2



Die Strecke  $\overline{AB}$  ist im Goldenen Schnitt geteilt. Bestimme die zugehörige Verhältnissgleichung und zeige, daß  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$  eine Lösung ist. Gib die Lösung auch als Näherungswert an.

### 3

Im **Liber abacci** des **Leonardo von Pisa** (ca. 1170–1250) findet man die nach ihm benannte **Fibonacci-Zahlenfolge**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

a) Nach welcher Gesetzmäßigkeit entstehen die Glieder der Zahlenfolge?

b) Wie lautet die 11., wie die 12. Zahl?

c) Mit den Gliedern der Fibonacci-Folge lassen sich Quotienten auf folgende Weise bilden:  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$

Setze die Folge der Quotienten um 5 weitere Glieder fort und berechne jeweils deren Dezimalwert auf 6 Nachkommastellen genau.

Was fällt dir auf?

d) Bestimme mit einer Tabellenkalkulation die ersten 30 Fibonacci-Zahlen und die zugehörigen Quotienten. Vergleiche die Quotienten mit  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

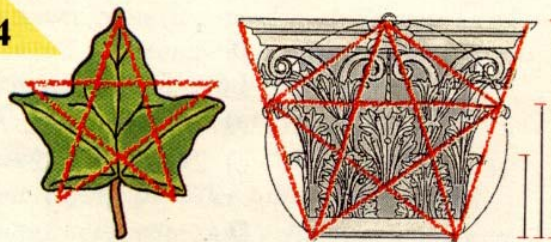
Die Fibonacci-Zahlen ...

S 1	S 2
Zahlen	Quotient
1	–
1	1
2	2
3	1,5
5	1,6666 ...

... und die zugehörigen Formeln

...	...
$Z(-1)S + Z(-2)S$	$ZS(-1) / Z(-1)S(-1)$
$Z(-1)S + Z(-2)S$	$ZS(-1) / Z(-1)S(-1)$
...	...

### 4



Bei Pflanzen, aber auch in der Architektur, sind regelmäßige Fünfecke zu erkennen. Die Diagonalen schneiden sich im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck und prüfe die Aussage durch Messen von geeigneten Teilstrecken nach.



Schreiben Sie die Werte für das Teilverhältnis  $\lambda = TV(A,B;T)$  unter die Skizze  
z.B.  $\lambda \approx 0$ , positiv oder  $\lambda \approx -2$

