Klausur zum Modul 2 im SS 2004 und
Klausur zur Einführung in die Geometrie im SS 2004

☐ **PO neu** ☐ **PO alt**

Name, Vorname .... Matr.Nr. ....

Semester-Anzahl im SS 2004: ....Studiengang G/H/R ...... Tutor/in: ....

Aufg.1	*Aufg,2*	*Aufg.3*	*Aufg.4*	*Aufg.5*	*Aufg.6*	*Punkte aus Übungen*	***Gesamt aus Einf. Geo***	***Didaktik (neue PO)***	***Gesamt-punkte***	***Note***
10 Punkte	*10 Punkte*	*10 Punkte*	*10 Punkte*	*10 Punkte*	*10 Punkte*	*6 Punkte*	***max.60 Punkte***	***20 Punkte***		

Hinweis für Studierende nach der **„alten" Prüfungsordnung** (ohne Didaktik-Aufgaben)

*Erreichbar sind **60 Punkte**. Jede Aufgabe aus der „Einführung in die Geometrie" zählt 10 Punkte.*
*Für das **Bestehen** der Klausur genügen (einschließlich der Punkte aus den Übungen) **30 Punkte**.*

Hinweis für Studierende nach der **„neuen" Prüfungsordnung** (mit Didaktik-Aufgaben)

Die **akademische Teilprüfung im Modul 2** besteht aus der „Einführung in die Geometrie" **und** aus Didaktik-Aufgaben!

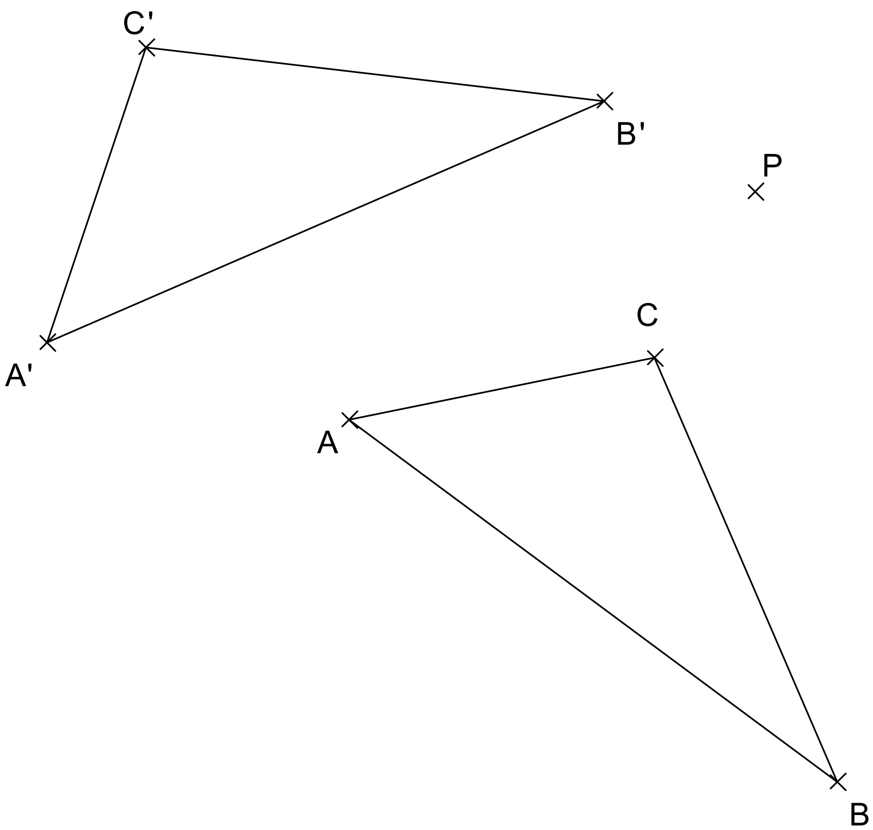
*In der Klausur „Einführung in die Geometrie" zählt jede Aufgabe 10 Punkte. Sie können einschließlich der Punkte aus den Übungen aber maximal nur **60 Punkte erreichen.***
*In den **Didaktik-Aufgaben** sind **20 Punkte** erreichbar.*
*Für das **Bestehen** der Klausur genügen insgesamt **40 Punkte** (Note „ausreichend").*

Notieren Sie bitte Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer auch auf den Seiten mit den Didaktikaufgaben.

Aufgabe 1

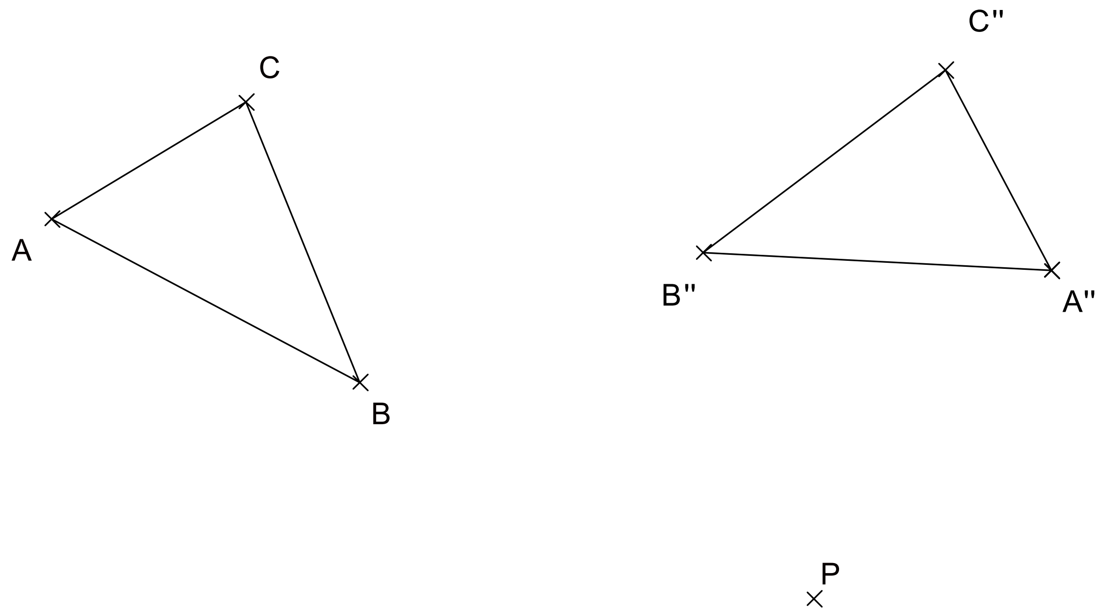
a) Durch eine Kongruenzabbildung f wurde Δ ABC auf Δ A'B'C' abgebildet.

Um welche Art der Kongruenzabbildung handelt es sich? Begründung.
Ermitteln Sie aus der Zeichnung die charakteristischen Daten von f.
Konstruieren Sie f(P) = P'



b) Eine andere Kongruenzabbildung g bildet Δ ABC auf Δ A''B''C'' ab.
Um welche Art der Kongruenzabbildung handelt es sich? Begründung.

Konstruieren Sie g(P) = P''.



Aufgabe 2

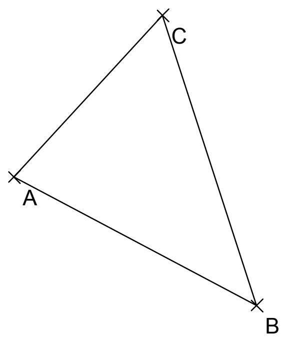
Nach einer Drehung D_1 um das Zentrum Z_1 um den Winkel 90^0 wird eine Drehung D_2 um das Zentrum Z_2 um den Winkel 60^0 ausgeführt.
Welche Abbildung ergibt sich durch die Verkettung $D_1 \circ D_2$?
Die charakteristischen Daten der Abbildung können einer geeigneten Zeichnung entnommen oder dort markiert werden (d.h. auf eine Berechnung wird verzichtet.)

Aufgabe 3

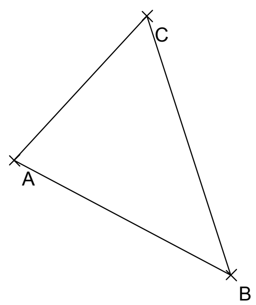
Das Dreieck ABC soll zu einem Dreieck ABC’ verändert werden. Dabei soll stets die Seite AB festgehalten werden; C kann eine andere Lage einnehmen und geht in C’ über.
Bestimmen Sie die Orte, an denen C’ liegen kann, wenn folgende Bedingungen zusätzlich gelten:

(Sie sollen stets alle möglichen Lagen von C’ angeben; die Lösung muss in Stichworten kurz begründet werden)

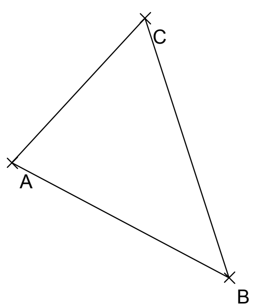
a) Dreieck ABC und Dreieck ABC’ haben denselben Flächeninhalt.



b) Dreieck ABC’ ist bezüglich des Flächeninhalts halb so groß wie Dreieck ABC.



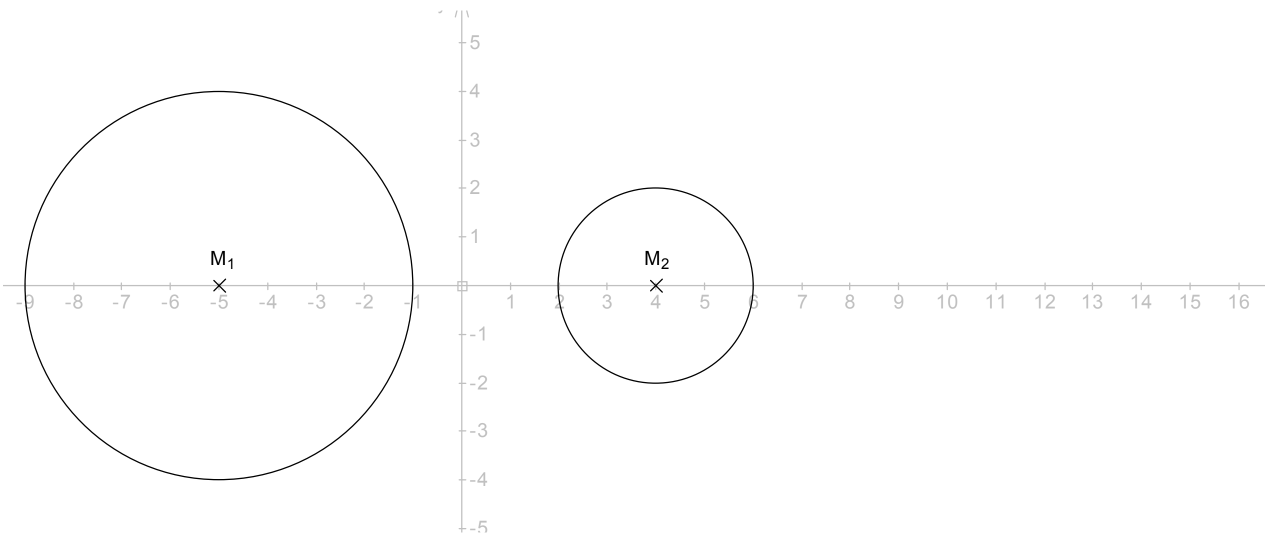
c) Von C’ aus erscheint die Seite AB unter demselben Winkel wie von C aus.



Aufgabe 4

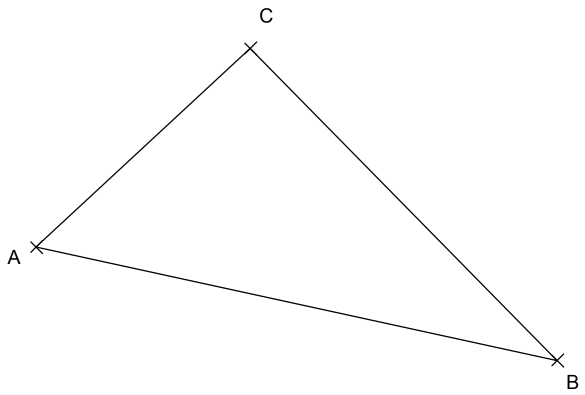
a) Konstruieren Sie die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise.
b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte der Tangenten mit der x-Achse.

Mittelpunkte der Kreise: $M_1(-5/0)$, $M_2(4/0)$
Radien der Kreise: $r_1=4$ LE, $r_2=2$ LE.



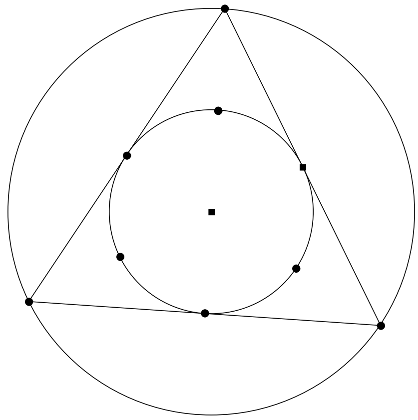
Aufgabe 5

Verwandeln Sie – ohne zu messen oder zu rechnen – das gezeichnete Dreieck in ein dazu flächeninhaltsgleiches Quadrat.
Welche Sätze verwenden Sie bei Ihrem Vorgehen?



Aufgabe 6

Inkreis und Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks



a) Zeigen Sie: Beim gleichseitigen Dreieck ist der Umkreisradius doppelt so groß wie der Inkreisradius.

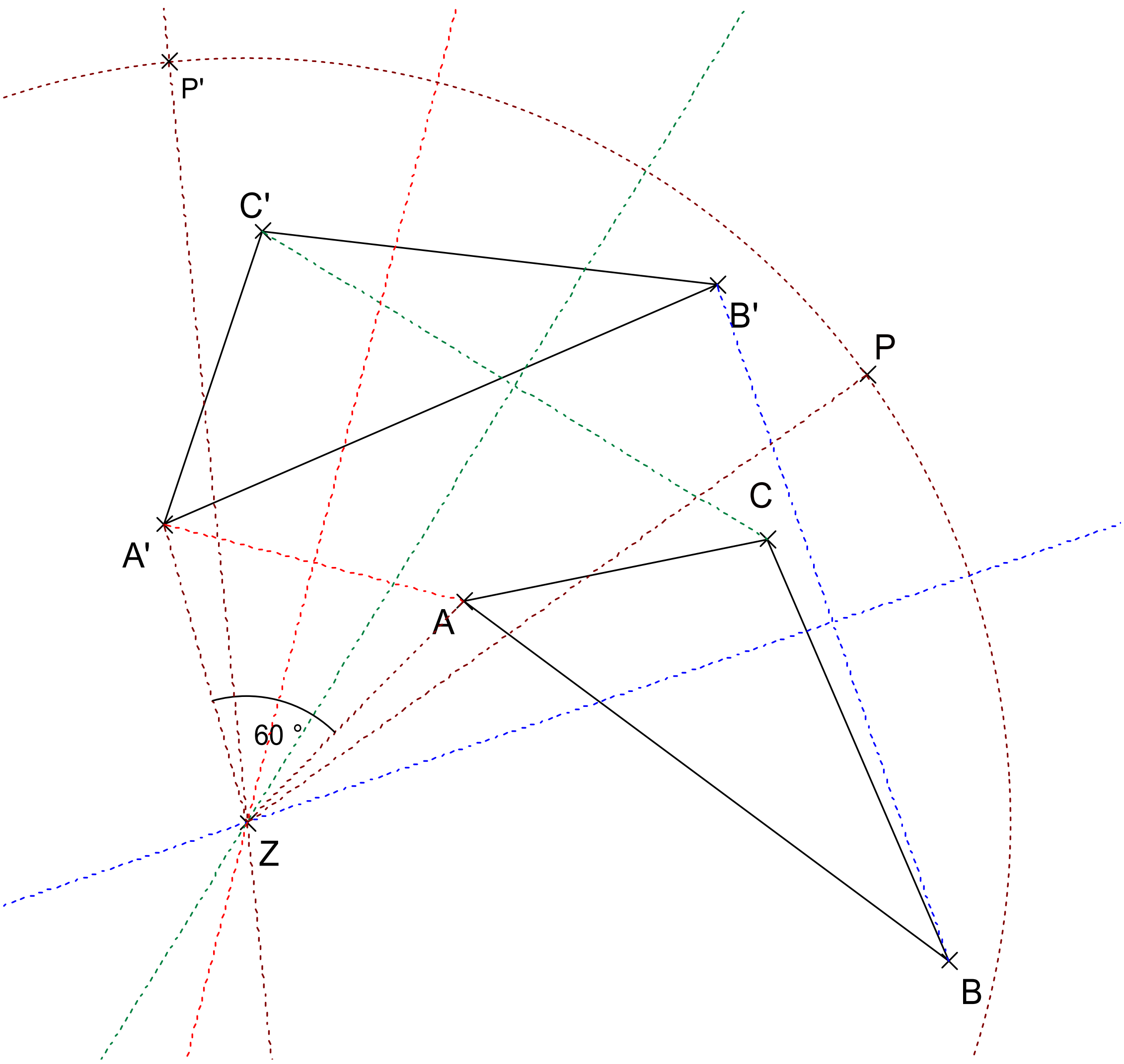
b) Vergleichen Sie den **Umfang** des Umkreises und des Inkreises eines gleichseitigen Dreiecks. (Ihr Ergebnis ist stichwortartig zu begründen.)

c) Vergleichen Sie den **Flächeninhalt** des Umkreises und des Inkreises eines gleichseitigen Dreiecks. (Ihr Ergebnis ist stichwortartig zu begründen.)

Lösungen
Aufgabe 1

a) Durch eine Kongruenzabbildung f wurde Δ ABC auf Δ A'B'C' abgebildet.

Um welche Art der Kongruenzabbildung handelt es sich? Begründung.
Ermitteln Sie aus der Zeichnung die charakteristischen Daten von f.
Konstruieren Sie f(P) = P'



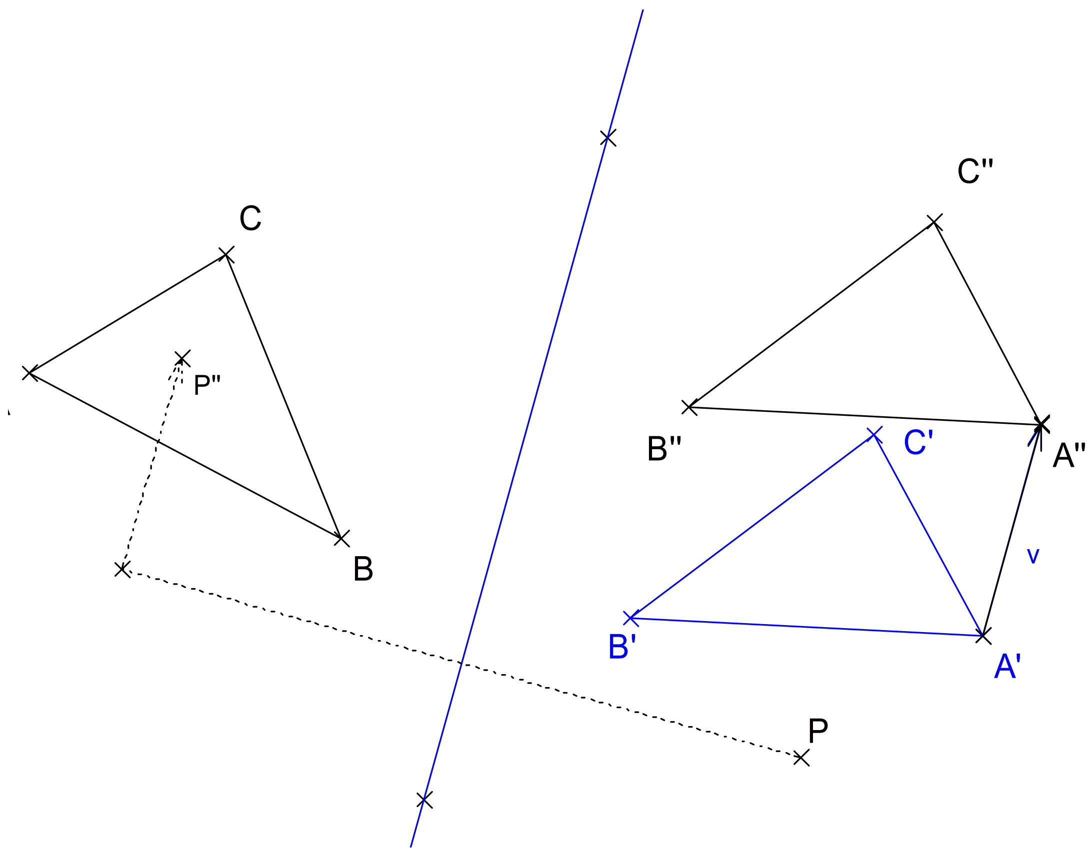
Umlaufsinn bleibt erhalten ⇒ f ist Verschiebung oder Drehung

Die Mittelsenkrechten von $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ schneiden sich in genau einem Punkt ⇒ f kann nur Drehung sein

Drehzentrum Z: Schnitt der Mittelsenkrechten von $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$
Drehwinkel α: Winkel AZA' ≈ 60°
Punkt P um Z mit Drehwinkel 60° drehen ergibt P'

b) Eine andere Kongruenzabbildung g bildet Δ ABC auf Δ A''B''C'' ab.
Um welche Art der Kongruenzabbildung handelt es sich? Begründung.

Konstruieren Sie g(P) = P''.

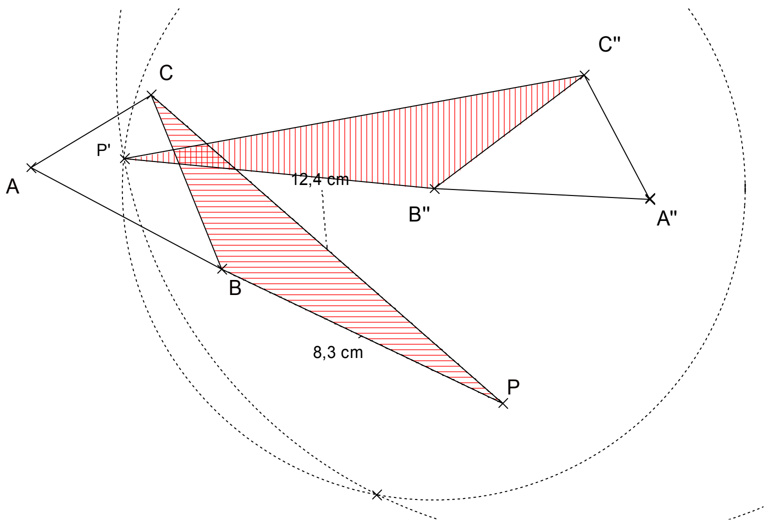


Umlaufsinn bleibt nicht erhalten ⇒ f ist Achsenspiegelung oder Schubspiegelung.
Verbindungsstrecken $\overline{AA'}$ $\overline{BB'}$ nicht parallel ⇒ f kann nur Schubspiegelung sein.

Schubspiegelachse: Verbindungsgerade g der Mittelpunkte von $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ ist die Schubspiegelachse.
Verschiebungsvektor: Spiegeln von Punkt A ergibt A', Verbindungsvektor A'A'' ist der Verschiebungsvektor v.
Spiegeln von P an g und Verschieben mit Vektor v ergibt P''. (Daten der Abbildung waren nicht unbedingt verlangt)

Alternativ:

Bilde Δ BPC auf ein deckungsgleiches Δ B''P''C'' mit umgekehrtem Umlaufsinn ab. Zur Konstruktion wird der Kongruenzsatz „SSS" verwandt sowie die Tatsache, dass eine Kongruenzabbildung eindeutig durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig bestimmt ist..



Aufgabe 2

Nach einer Drehung D_1 um das Zentrum Z_1 um den Winkel 90^0 wird eine Drehung D_2 um das Zentrum Z_2 um den Winkel 60^0 ausgeführt.
Welche Abbildung ergibt sich durch die Verkettung $D_1 \circ D_2$?
Die charakteristischen Daten der Abbildung können einer geeigneten Zeichnung entnommen oder dort markiert werden (d.h. auf eine Berechnung wird verzichtet.)

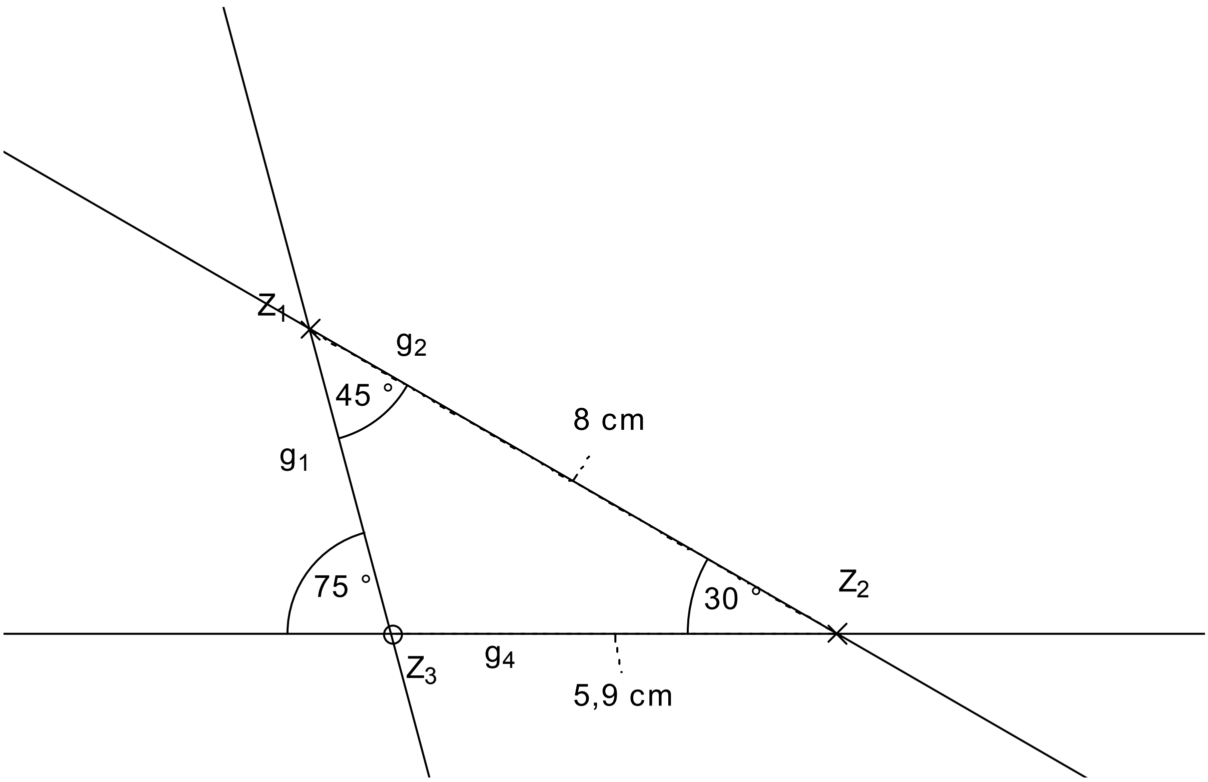


Abbildung D_1 wird durch Doppelspiegelung an Achsen g_1 und g_2 durch Z_1 mit Winkel 45° dargestellt.
Abbildung D_2 wird durch Doppelspiegelung an Achsen g_3 und g_4 durch Z_2 mit Winkel 30° dargestellt, wobei $g_2=g_3$ ist; daher muss g_2 die Verbindungsgerade von Z_1 und Z_2 sein.

Z_3 ist der Schnittpunkt von g_1 und g_4. Es ergibt sich für $D_1 \circ D_2$ eine Drehung um Z_3 um den Winkel 60°+90°=150°.

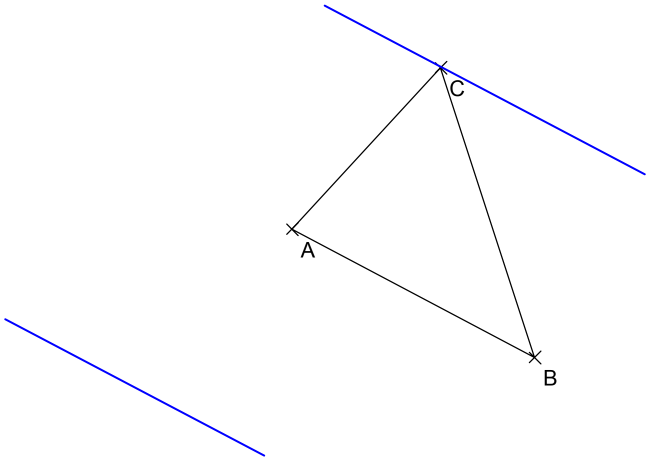
Oder: der Winkel zwischen g_1 und g_4 beträgt 75°, $D_1 \circ D_2$ ist also eine Drehung um Z_3 um 150°.

Aufgabe 3

Das Dreieck ABC soll zu einem Dreieck ABC’ verändert werden. Dabei soll stets die Seite AB festgehalten werden; C kann eine andere Lage einnehmen und geht in C’ über.
Bestimmen Sie die Orte, an denen C’ liegen kann, wenn folgende Bedingungen zusätzlich gelten:

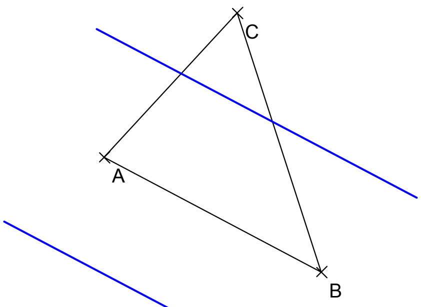
(Sie sollen stets alle möglichen Lagen von C’ angeben; die Lösung muss in Stichworten kurz begründet werden)

a) Dreieck ABC und Dreieck ABC’ haben denselben Flächeninhalt.



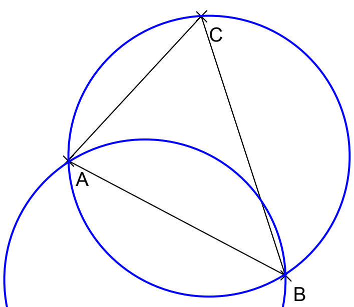
C’ liegt auf zwei Parallelen zu AB, die den gleichen Abstand zu AB haben wie C , da der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks bei fester Seite $\overline{AB}$ gleich $\overline{AB}$ ·halbe Höhe h_c ist.

b) Dreieck ABC’ ist bezüglich des Flächeninhalts halb so groß wie Dreieck ABC.



C’ liegt auf zwei Parallelen zu AB, die den halben Abstand zu AB haben wie C , da der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks bei fester Seite $\overline{AB}$ gleich $\overline{AB}$ ·halbe Höhe h_c ist.

c) Von C’ aus erscheint die Seite AB unter demselben Winkel wie von C aus.



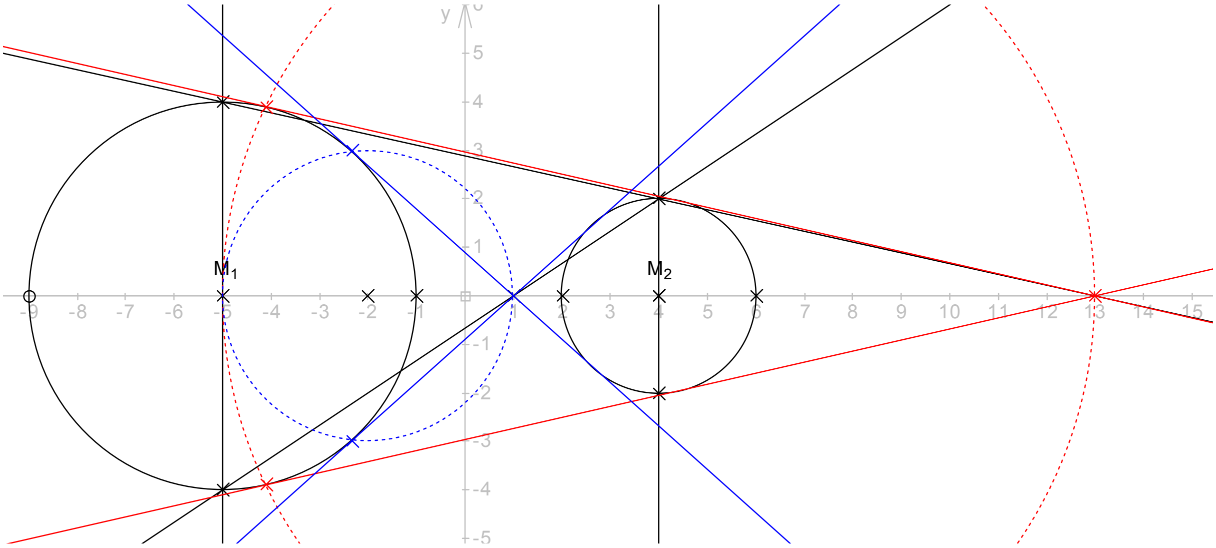
C’ liegt auf zwei Kreisen durch AB, die durch C und den an AB gespiegelten Punkt C gehen (Umfangswinkelsatz)

Aufgabe 4

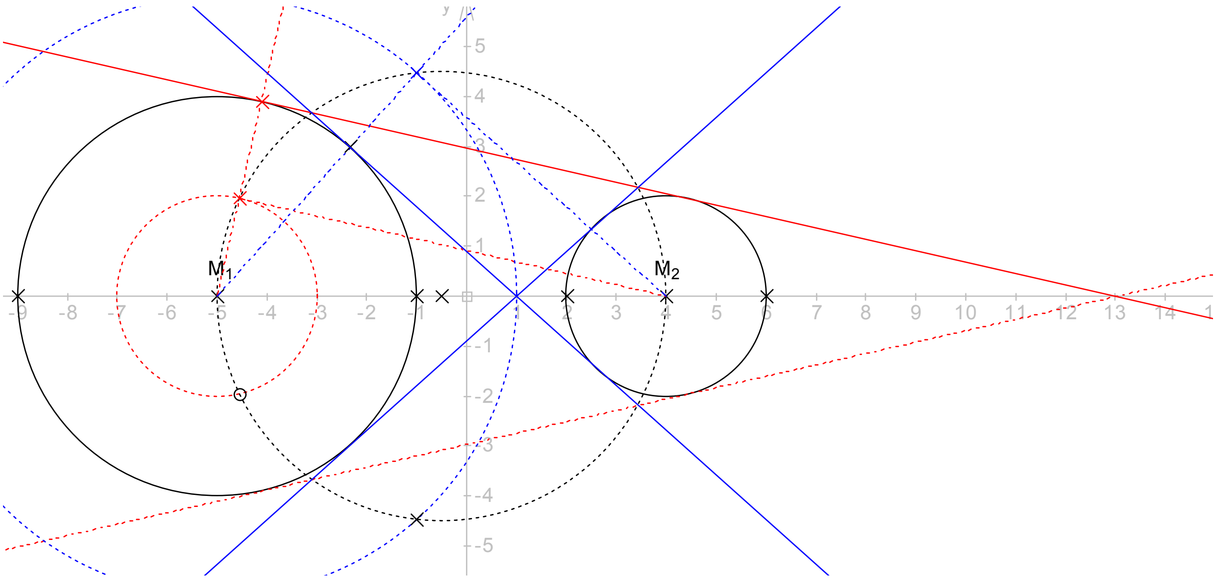
a) Konstruieren Sie die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise.
b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte der Tangenten mit der x-Achse.

Mittelpunkte der Kreise: $M_1(-5/0)$, $M_2(4/0)$
Radien der Kreise: $r_1=4$ LE, $r_2=2$ LE.

Konstruktion 1



oder Konstruktion 2



Berechnung: Strahlensätze
„Äußeres" Zentrum Z: (Rechnung ohne Einheiten)

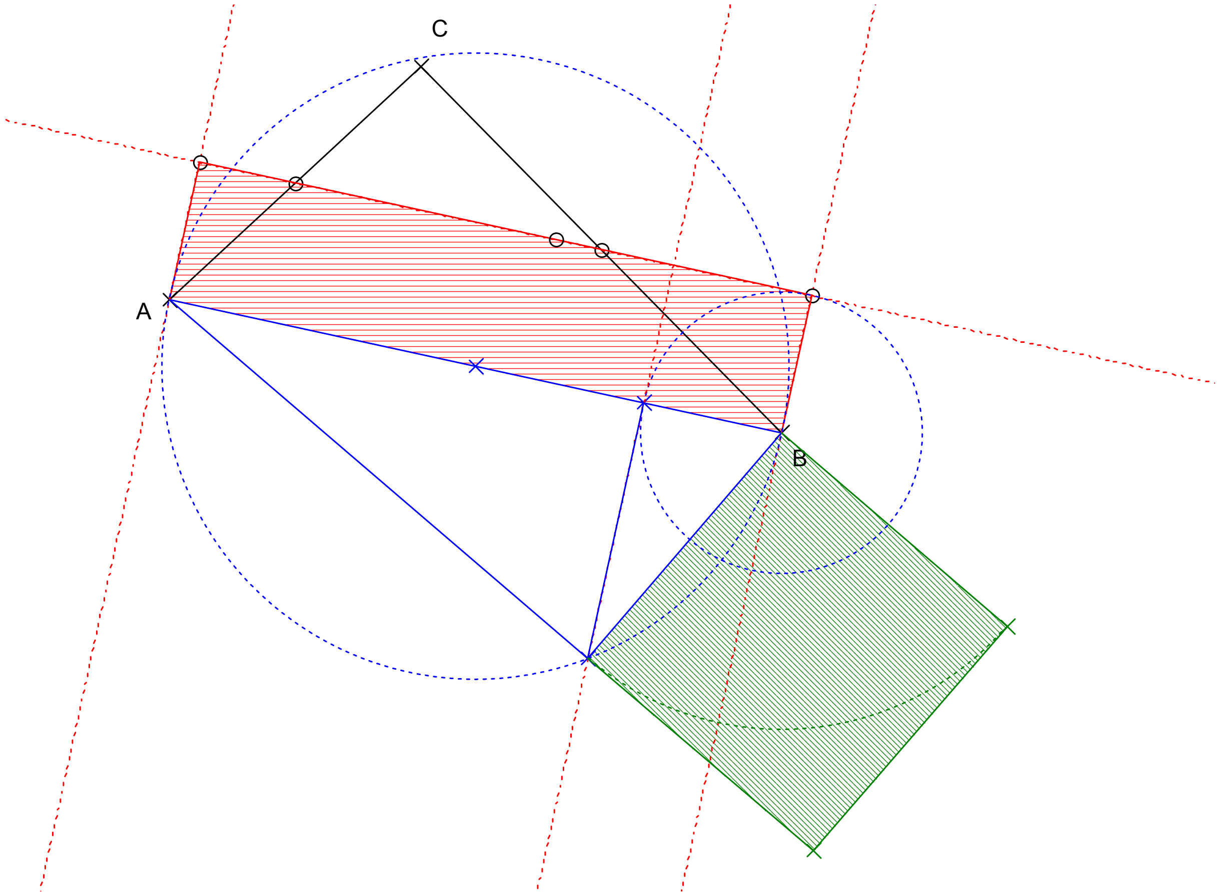
$$\frac{r_1}{\overline{M_1Z}}=\frac{r_2}{\overline{M_2Z}},\quad \overline{M_1M_2}=9,\quad \overline{M_1Z}=\overline{M_1M_2}+\overline{M_2Z}\quad \Rightarrow \frac{4}{9+\overline{M_2Z}}=\frac{2}{\overline{M_2Z}},\quad \Rightarrow \overline{M_2Z}=9 \Rightarrow Z(13/0)$$

„Inneres" Zentrum Z analog.

$$\frac{r_1}{\overline{M_1Z}}=\frac{r_2}{\overline{M_2Z}},\quad \overline{M_1M_2}=9,\quad \overline{M_1Z}=\overline{M_1M_2}-\overline{M_2Z}\quad \Rightarrow \frac{4}{9-\overline{M_2Z}}=\frac{2}{\overline{M_2Z}},\quad \Rightarrow \overline{M_2Z}=3 \Rightarrow Z(1/0)$$

Aufgabe 5

Verwandeln Sie – ohne zu messen oder zu rechnen – das gezeichnete Dreieck in ein dazu flächeninhaltsgleiches Quadrat.
Welche Sätze verwenden Sie bei Ihrem Vorgehen?

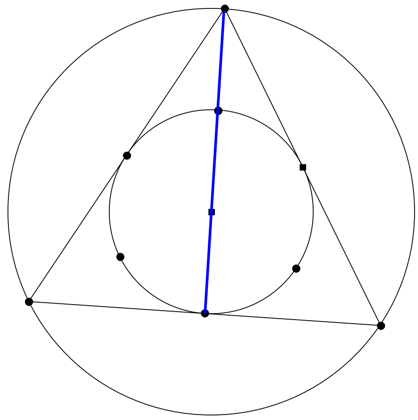


Verwandte Sätze:

- Dreieck in Rechteck verwandeln: gleiche Grundseite, halbe Höhe (Zerlegungsgleichheit von Dreieck und Rechteck gleicher Seite AB und mit halber Dreieckshöhe als weiterer Seite)
- Satz des Thales zur Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks dessen Hypotenusenabschnitte die Rechtecksseiten sind,
- Höhensatz

Aufgabe 6

Inkreis und Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks



a) Zeigen Sie: Beim gleichseitigen Dreieck ist der Umkreisradius doppelt so groß wie der Inkreisradius.

b) Vergleichen Sie den Umfang des Umkreises und des Inkreises eines gleichseitigen Dreiecks. (Ihr Ergebnis ist stichwortartig zu begründen.)

c) Vergleichen Sie den Flächeninhalt des Umkreises und des Inkreises eines gleichseitigen Dreiecks. (Ihr Ergebnis ist stichwortartig zu begründen.)

a) Alle „speziellen Linien“ im gleichseitigen Dreieck fallen zusammen. Der Inkreisradius ist ein Drittel der Seitenhalbierenden, der Umkreisradius zwei Drittel der Seitenhalbierenden.

b) Alle Kreise sind ähnlich zueinander. Damit gehört zum doppelten Radius auch der **doppelte Umfang**, da das Verhältnis aller Längen bei ähnlichen Figuren gleich bleibt (Umfang/Radius ist konstant).

c) Wird der Radius verdoppelt (Kreis zentrisch gestreckt mit Faktor 2), dann **vervierfacht** sich der **Flächeninhalt**.