Nachklausur zur Einführung in die Geometrie im SS 2002
Lösung

Aufgabe 1

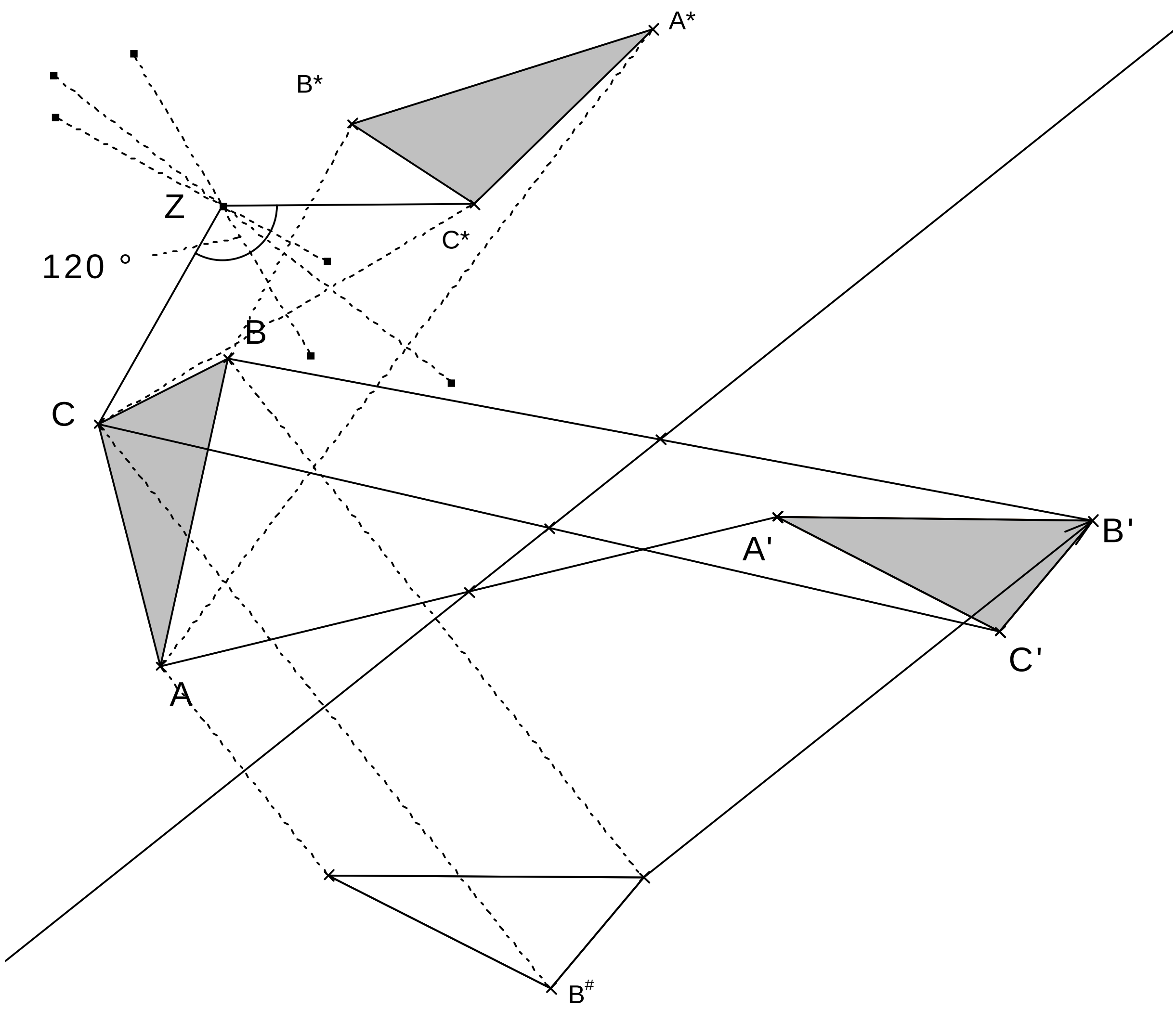
1.Weg (kurz und einfach):

ABC → A*B*C*

Umlaufsinn erhalten $\Rightarrow$ Verschiebung oder Drehung
Verbindungsgeraden AA*, BB*, CC* nicht parallel $\Rightarrow$ Drehung
Drehzentrum Z: Schnitt der Mittelsenkrechten von $\overline{AA^*}$, $\overline{BB^*}$, $\overline{CC^*}$.
Drehwinkel α: 120° (abgelesen)

ABC → A'B'C'

Umlaufsinn nicht erhalten $\Rightarrow$ Achsenspiegelung oder Schubspiegelung
Verbindungsgeraden AA', BB', CC' nicht parallel $\Rightarrow$ keine Achsenspiegelung
$\Rightarrow$ Schubspiegelung
Schubspiegelachse: Verbindung der Mittelpunkte der Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ (Mittelsenkrechten konstruieren)
Verschiebungsvektor: Einen Eckpunkt an der Schubspiegelachse spiegeln (z.B. B, Spiegelpunkt $B^{\#}$), Verschiebungsvektor ist der Vektor $\overrightarrow{BB^{\#}}$.



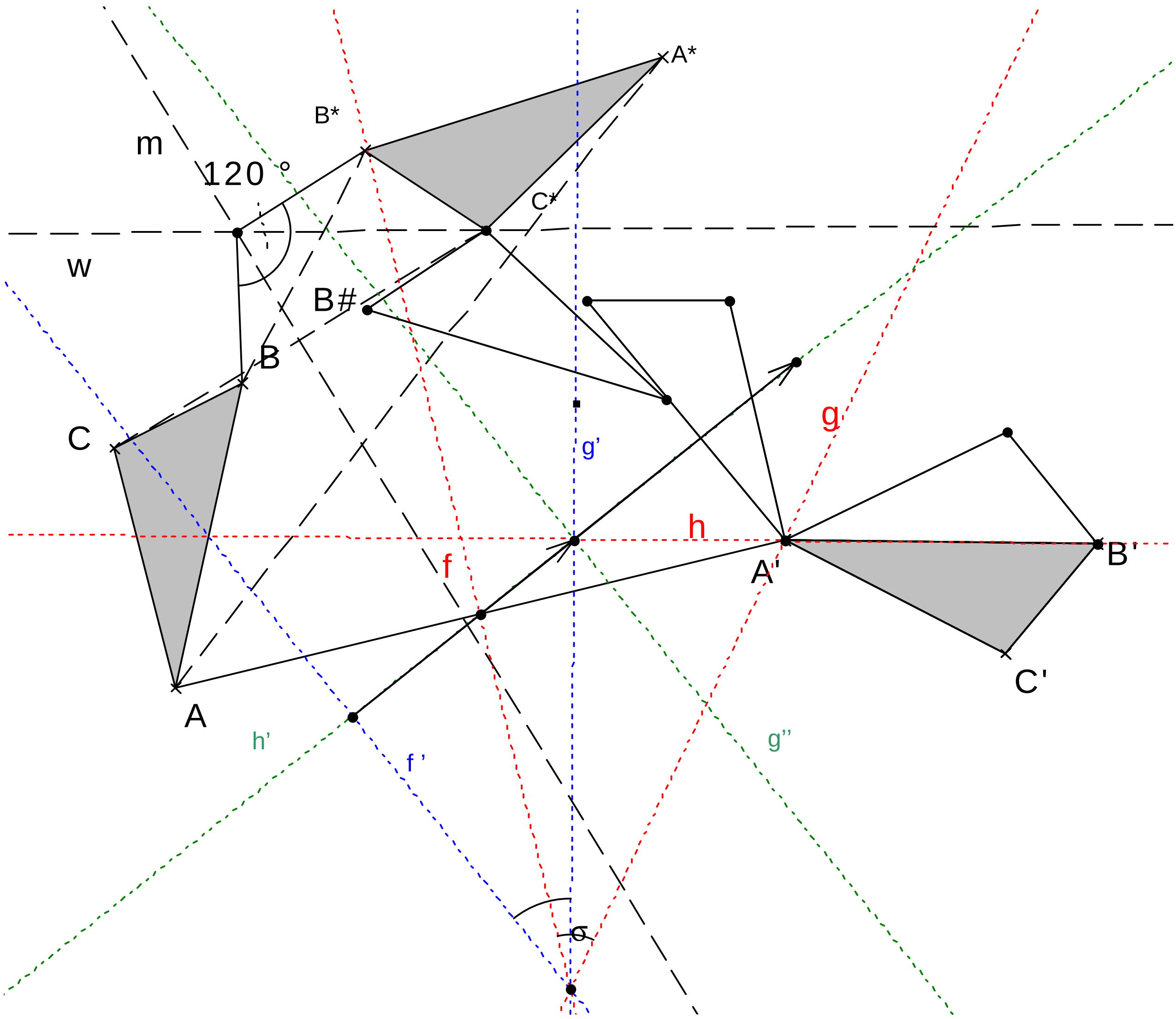
2.Weg (lang, viel komplizierter):

ABC → A*B*C*

Umlaufsinn erhalten $\Rightarrow$ Verschiebung oder Drehung
Verbindungsgeraden AA*, BB*, CC* nicht parallel $\Rightarrow$ Drehung
Abbildung des Dreiecks ABC auf A*B*C* durch zwei Achsenspiegelungen, z.B.
1. Achse: Mittelsenkrechte m von CC* $\Rightarrow$ C auf C*, B auf $B^{\#}$
2.Achse: Winkelhalbierende w von $\angle B^*C^*B^{\#}$
Drehwinkel α: 120° (direkt abgelesen oder das Doppelte des Winkels zwischen den Achsen m und w)

ABC → A'B'C'

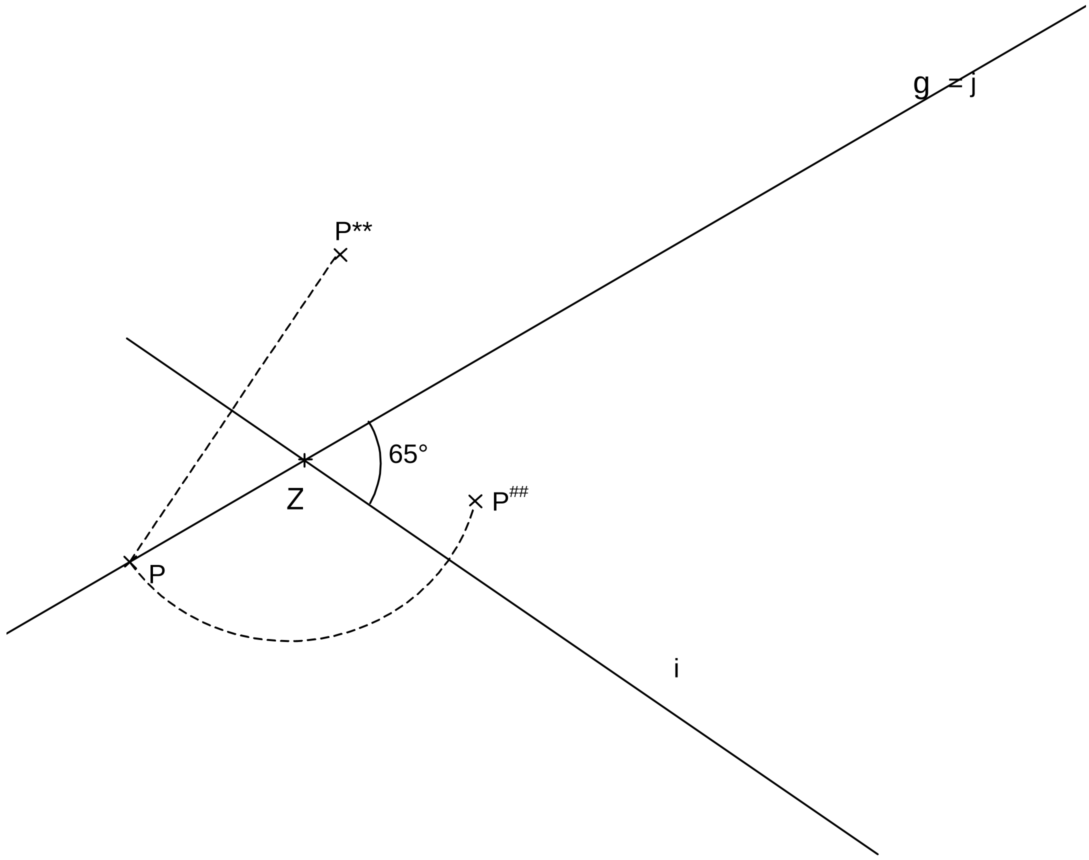
Umlaufsinn nicht erhalten $\Rightarrow$ Achsenspiegelung oder Schubspiegelung
Verbindungsgeraden AA', BB', CC' nicht parallel $\Rightarrow$ keine Achsenspiegelung
$\Rightarrow$ Schubspiegelung
Schubspiegelachse und Verschiebungsvektor:
Dreieck ABC durch drei Achsenspiegelungen an f, g, h auf Dreieck A'B'C' abbilden.
Dann nach dem bekannten Verfahren Achsen transformieren:
Paar (f,g) um deren Schnittpunkt drehen bei konstantem Schnittwinkel $\sigma \Rightarrow$ Achsenpaar (f',g') mit $g' \perp h$
Paar (g',h) um deren Schnittpunkt drehen bei konstantem Schnittwinkel (=90°) $\Rightarrow$ Achsenpaar (g'',h') mit $h' \perp f' \Rightarrow f' \| g''$, $h' \perp f' \Rightarrow S_{f'} o S_{g''}$ ist Verschiebung parallel zu h', die Schubspiegelung also $S_{f'} o S_{g''} o S_{h'}$.
Länge des Verschiebungsvektors: Doppelter Abstand von f', g'', Richtung parallel zu h'.



Aufgabe 2

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt $Z \in g$.
Eine Figur wird um den Punkt Z um $\beta=130°$ gedreht und anschließend an der Geraden g gespiegelt.

a) Ermitteln Sie die Ersatzabbildung $D_{Z,\beta} \circ S_g$. Kurze Erläuterung für Ihr Vorgehen ist erforderlich.
b) Darf hier die Reihenfolge „zuerst drehen, dann spiegeln" vertauscht werden? Begründen Sie Ihre Antwort.



a) $D_{Z,\beta} = S_i \circ S_j$ mit j=g , Winkel zwischen j und g ist $\beta/2 \Rightarrow$
$D_{Z,\beta} \circ S_g = (S_i \circ S_j) \circ S_g = S_i \circ (S_j \circ S_g) = S_i \circ (S_g \circ S_g) = S_i$ .Ersatzabbildung ist Achsenspiegelung an i.

b) Reihenfolge nicht vertauschbar: Ein Punkt P wird mit $D_{Z,\beta} \circ S_g$ und mit $S_g \circ D_{Z,\beta}$ abgebildet. Das Ergebnis ist nicht das selbe. Damit die Abbildung einfach wird wird $P \in g$ gewählt.
$D_{Z,\beta} \circ S_g (P) = P^{**}$, $S_g \circ D_{Z,\beta} (P) = P^{\#\#}$.

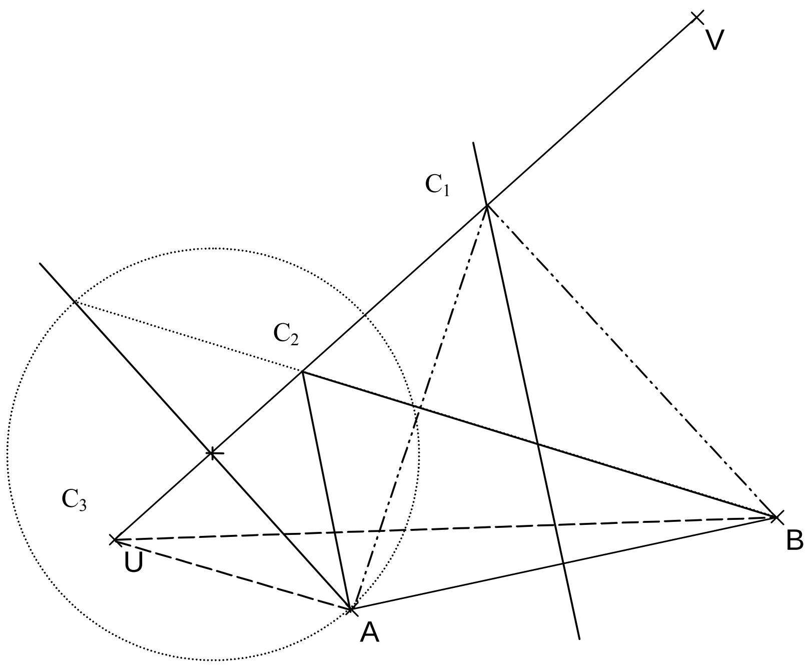
Aufgabe 3

Von einem Dreieck sind zwei Eckpunkte A und B gegeben, der dritte Eckpunkt soll auf der Strecke UV liegen.

Konstruieren Sie den dritten Eckpunkt C_1 (bzw. C_2 , C_3) so,

a) dass das Dreieck ABC_1 gleichschenklig ist, wobei AB die Basis sein soll.
b) dass das Dreieck ABC_2 einen möglichst kleinen Umfang besitzt,
c) dass das Dreieck ABC_3 einen möglichst kleinen Flächeninhalt besitzt,

Kurze Begründung ist jeweils erforderlich!

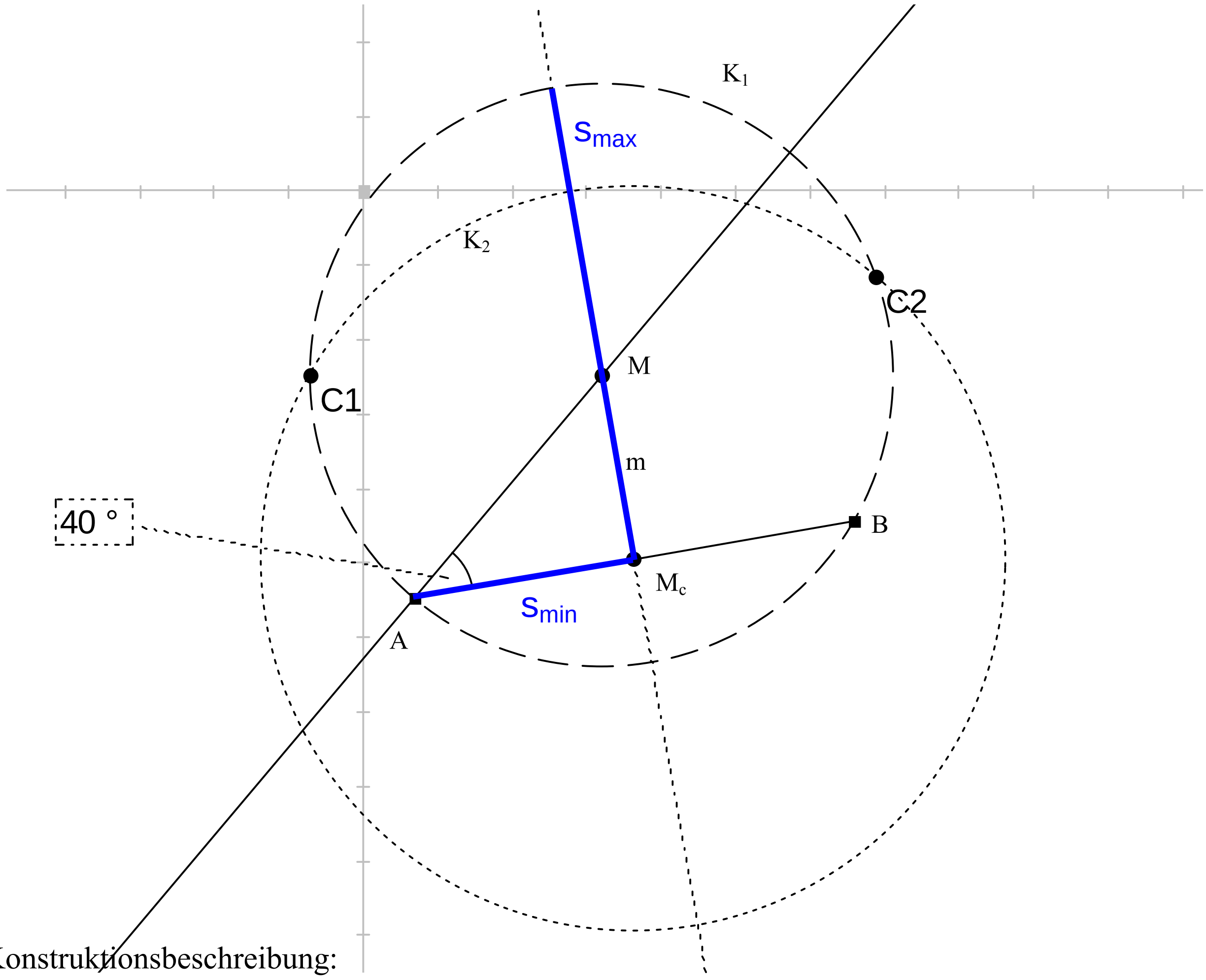


a) C_1 muss auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ liegen, da dies die Ortslinie aller Punkte ist, die von A und B die gleiche Entfernung haben. C_1 ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit $\overline{UV}$
b) Da die $\overline{AB}$ fest ist, wird der Umfang des Dreiecks minimal, wenn der Streckenzug von A über einen Punkt C_2 auf $\overline{UV}$ nach B minimal ist. Man erhält diesen Punkt C_2 indem man A an $\overline{UV}$ spiegelt (Punkt A'), diesen Punkt A' mit B verbindet. C_2 ist der Schittpunkt dieser Verbindung mit $\overline{UV}$.
c) C_3 muss so auf $\overline{UV}$ liegen, dass die Höhe h_c minimal wird, da $A_{\text{Dreieck}}=\frac{1}{2}\ \overline{AB}\ h_c$ ist und $\overline{AB}$ fest ist. Dies ist nur für den Endpunkt U von $\overline{UV}$ der Fall: $C_3 = U$.

Aufgabe 4

Konstruieren Sie ein Dreieck mit c=6 cm, γ=50°, s_c=5 cm (s_c ist die Seitenhalbierende der Seite c). Außer der Zeichnung ist eine kurze Beschreibung Ihrer Konstruktion ist erforderlich.

Für welche Längen von s_c ist bei c = 6 cm und γ = 50° eine Lösung möglich?
Sie dürfen die möglichen Werte für s_c aus Ihrer Zeichnung ablesen.



Konstruktionsbeschreibung:

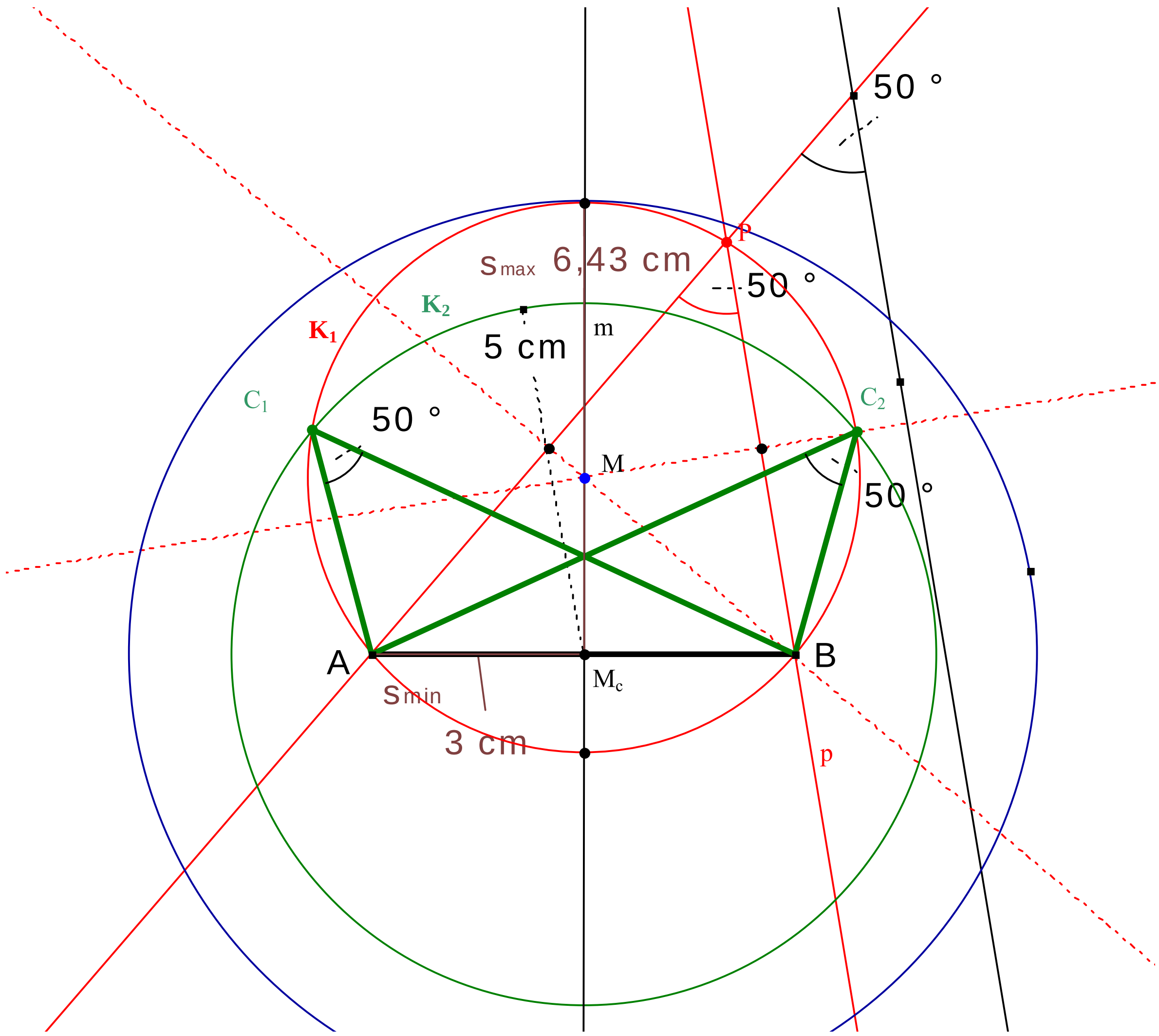
1. Seite $\overline{AB}$ = c =6 cm

Kreis K_1 durch A und B, auf dessen Umfang alle Winkel von γ=50° über $\overline{AB}$ liegen (Umfangswinkelsatz):

2. Mittelsenkrechte m von $\overline{AB}$, M_c Mittelpunkt von $\overline{AB}$
3. Winkel α=40° in A antragen, Schnittpunkt mit m ist der Mittelpunkt M von K_1 (Mittelpunktswinkel 2·50°=100°, also Basiswinkel (180°-100°)/2=40°)
   oder
   Winkel γ=50° irgendwo auf einer Geraden g durch A antragen, Parallele p zum freien Schenkel durch B zeichnen, Schnittpunkt P von g mit p ist Punkt auf dem gesuchten Kreis. Mittelpunkt M ist Schnittpunkt von m mit Mittelsenkrechte von $\overline{BP}$.
4. Kreis K_1 um M durch A
5. Kreis K_2 um M_c mit Radius s_c=5 cm
6. Schnittpunkte C_1 und C_2 von K_1 und K_2 sind die gesuchten Punkte.

Minimale Länge von s_c = 3 cm , wenn C mit A oder B zusammenfällt
Maximale Länge von $s_c \approx$ 6,43 cm, wenn der Kreis K_2 um M_c mit Radius s_c den Kreis K_1 gerade noch berührt. C ist dann Schnittpunkt von m mit K_1.

andere Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

1. Seite $\overline{AB} = c = 6$ cm

Kreis K_1 durch A und B, auf dessen Umfang alle Winkel von γ=50° über $\overline{AB}$ liegen (Umfangswinkelsatz):

2. Mittelsenkrechte m von $\overline{AB}$, M_c Mittelpunkt von $\overline{AB}$
3. Winkel α=40° in A antragen, Schnittpunkt mit m ist der Mittelpunkt M von K_1 (Mittelpunktswinkel $2\cdot 50°=100°$, also Basiswinkel $(180°-100°)/2=40°$)
   oder
   Winkel γ=50° irgendwo auf einer Geraden g durch A antragen, Parallele p zum freien Schenkel durch B zeichnen, Schnittpunkt P von g mit p ist Punkt auf dem gesuchten Kreis. Mittelpunkt M ist Schnittpunkt von m mit Mittelsenkrechte von $\overline{BP}$.
4. Kreis K_1 um M durch A
5. Kreis K_2 um M_c mit Radius s_c=5 cm
6. Schnittpunkte C_1 und C_2 von K_1 und K_2 sind die gesuchten Punkte.

Minimale Länge von s_c = 3 cm , wenn C mit A oder B zusammenfällt
Maximale Länge von $s_c \approx 6{,}43$ cm, wenn der Kreis K_2 um M_c mit Radius s_c den Kreis K_1 gerade noch berührt. C ist dann Schnittpunkt von m mit K_1.

Aufgabe 5

Im rechtwinkligen Dreieck ABC in Abb. 1 teilt der Höhenfußpunkt F die Hypotenuse in die Abschnitte AF und FB.

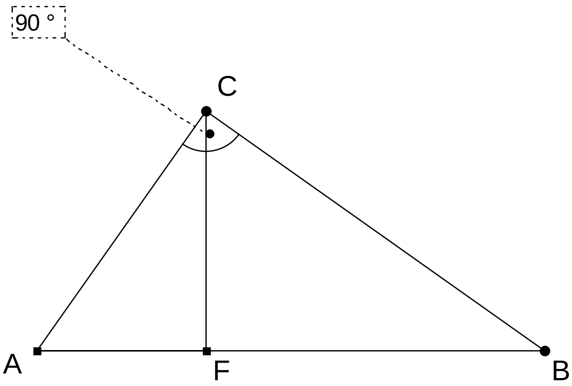
a) Begründen Sie, dass die Dreiecke ABC, ACF und CBF zueinander ähnlich sind.

Nehmen Sie ab jetzt an, dass FB doppelt so lang wie AB ist.

b) Geben Sie eine Ähnlichkeitsabbildung an, die Dreieck ACF auf Dreieck CBF abbildet. (Dabei sind die charakteristischen Daten der Abbildung anzugeben, z.B. der Streckfaktor)

c) Wie viel % des Dreiecks ABC bedeckt das Dreieck ACF?

Abb.1



a) Dreiecke stimmen in den drei Winkeln überein: $\angle ACF = \angle CBF \quad \angle CAF = \angle FCB$
(Schenkel paarweise orthogonal)

b) Streckung mit Zentrum F mit Faktor $k = \sqrt{2}$, dann Drehung um F um Winkel 270° (-90°).
Zum Streckfaktor: $k = \dfrac{\overline{FB}}{\overline{FC}}$ (offensichtlich), $\overline{FB} = 2\overline{FA}$.
Aus dem Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke erhält man $\overline{FC}^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FB} = 2\overline{FA}^2$,
also $k = \dfrac{\overline{FB}}{\sqrt{2} \cdot \overline{FA}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

c) Aus b) ergibt sich, dass der Flächeninhalt von Dreieck CFB doppelt so groß ist wie der von Dreieck AFC (Streckfaktor $k^2=2$), damit ist der Flächeninhalt von ABC das Dreifache von dem von Dreieck AFC. Dreieck AFC bedeckt also ca. 33,33% der Fläche von Dreiecks ABC.
Andere Lösung (benötigt b) nicht):
$A_{AFC} = \frac{1}{2}\overline{AF} \cdot \overline{FC}$, $A_{CFB} = \frac{1}{2}\overline{BF} \cdot \overline{FC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{FC} = 2A_{AFC}$

Aufgabe 6

Regelmäßiges Achteck

a) Einem Kreis mit Radius r=5 cm ist ein regelmäßiges Achteck einzubeschreiben. Zeichnen Sie ein solches regelmäßiges Achteck.

b) Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt eines regelmäßigen Achtecks mit Umkreisradius r. (Sie dürfen trigonometrische Funktionen und Sätze aus der „Pythagoras-Satzgruppe“ verwenden)

c) Welche Näherungswerte für π ergeben sich aus den Berechnungen in Teil b)?

d) Welchen prozentualen Fehler begeht man jeweils, wenn man mit diesen Näherungswerten statt mit π rechnet?

#1: $\alpha := 22.5 \cdot °$

Umfang:

#2: $U := 16 \cdot r \cdot \text{SIN}(\alpha)$

Für r=5 cm ergibt sich für U

#3: $16 \cdot 5 \cdot \text{SIN}(\alpha)$

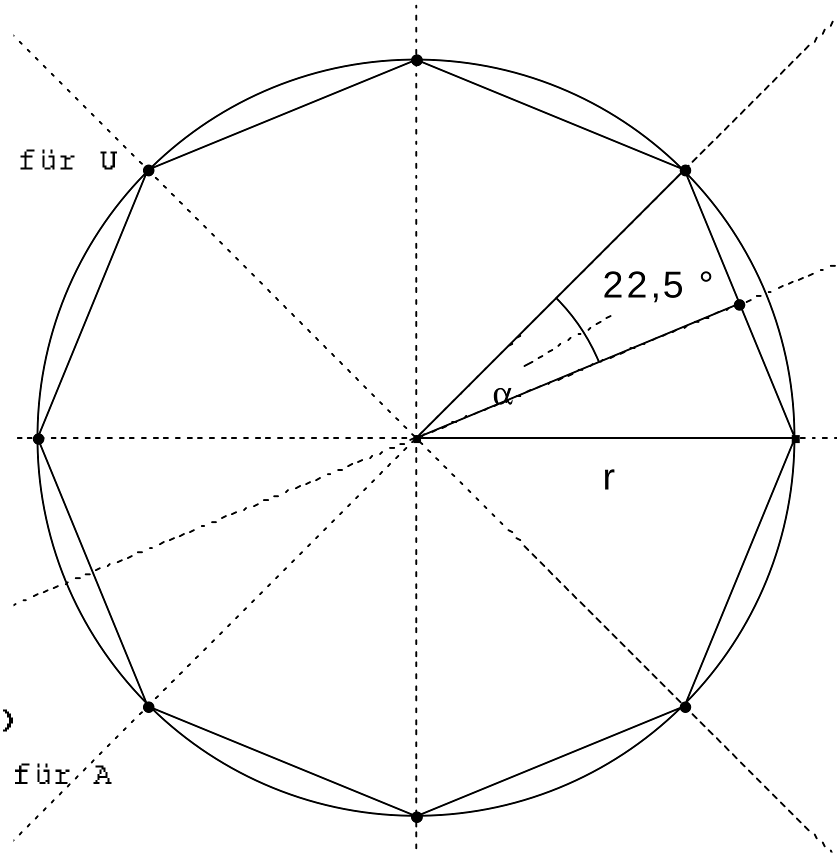
#4: 30.6

#5: $\dfrac{U}{2 \cdot r}$

#6: 3.06

#7: $\dfrac{\pi - 3.06}{\pi} \cdot 100$

#8: 2.59



Flächeninhalt:

#9: $A := 8 \cdot r^2 \cdot \text{SIN}(\alpha) \cdot \text{COS}(\alpha)$

Für r=5 cm ergibt sich für A

#10: $8 \cdot 5^2 \cdot \text{SIN}(\alpha) \cdot \text{COS}(\alpha)$

#11: 70.7

#12: $\dfrac{A}{r^2}$

#13: $2 \cdot \sqrt{2}$

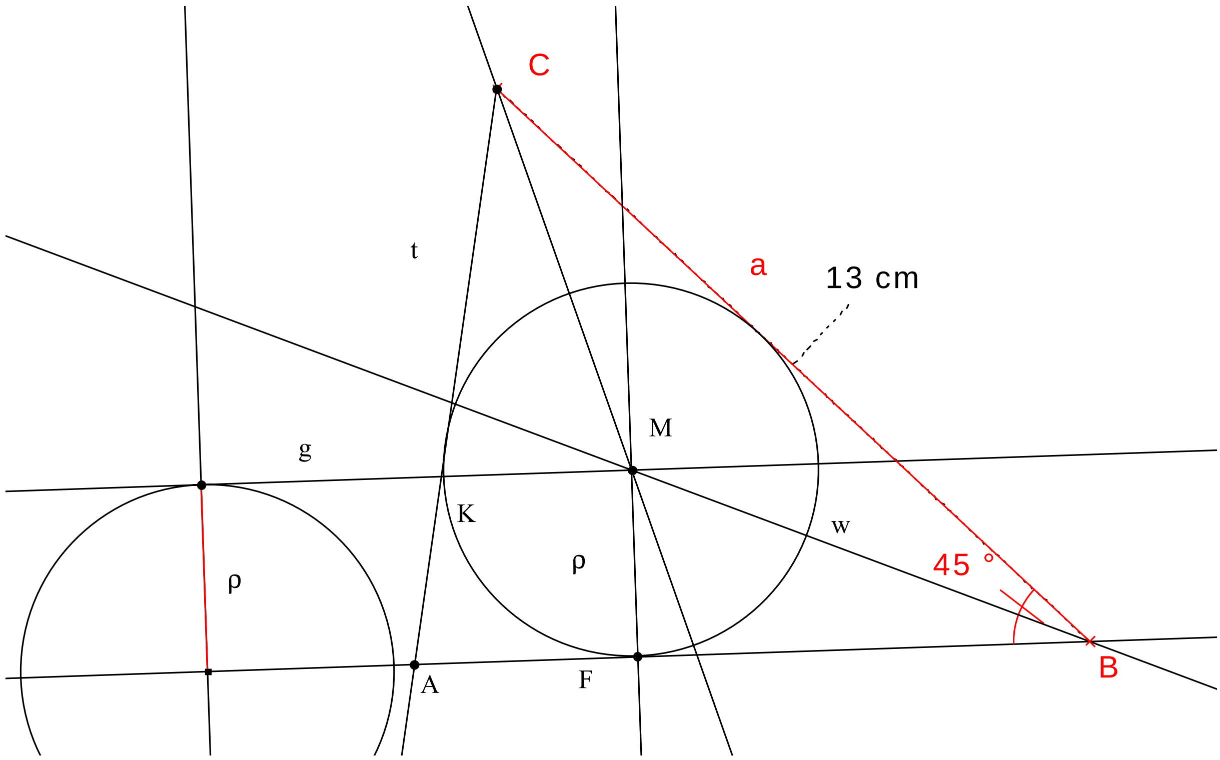
#14: 2.82

#15: $\dfrac{\pi - 2.82}{\pi} \cdot 100$

#16: 10.2

Aufgabe 7

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit der Seite a=13 cm, Winkel β=45° und Inkreisradius ρ=3 cm.
Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung an.



Konstruktionsbeschreibung:

1. Seite $\overline{BC}$ der Länge a = 13 cm
2. Winkel β = 45° in B, freier Schenkel BA
3. Parallele g zu BA mit Abstand ρ = 3 cm (auf der Seite von C)
4. Winkelhalbierende w von β durch B
5. Schnittpunkt M von g und w : Mittelpunkt M des Inkreises
6. Lot von M auf AB, Lotfußpunkt F liegt auf dem Inkreis
7. Inkreis K mit Mittelpunkt M durch F
8. Tangente t von C an K (mit Thaleskreis über $\overline{MC}$)
9. A ist Schnittpunkt von t und AB

Alternative zu 6.-8. :

6*.Spiegle B an CM → t ist CB’