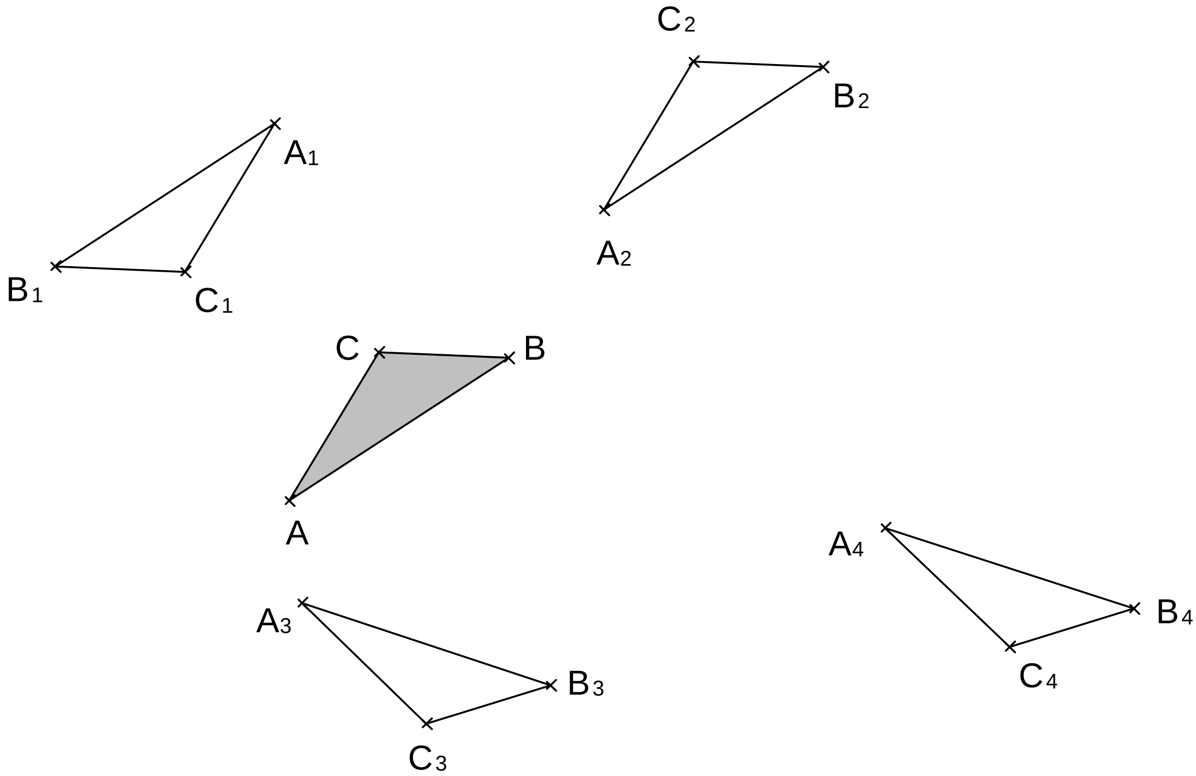
Klausur zur Einführung in die Geometrie im SS 2002

Name, Vorname .... Matr.Nr. ....
Semester-Anzahl im SS 2002: .... Studiengang GH/R/S Tutor/in:................

Aufg.1	*Aufg,2*	*Aufg.3*	*Aufg.4*	*Aufg.5*	*Aufg.6*	*Aufg.7*	*Aufg.8*	*Gesamt*	
Punkte	*Punkte*	*Punkte*	*Punkte*	*Punkte*	*Punkte*	*Punkte*	*Punkte*	*32 Punkte*	

*Erreichbar sind **32 Punkte**. **Jede Aufgabe zählt 4 Punkte**.*
*Für das **Bestehen** der Klausur genügen **50%**.*

1. Die gezeichneten Dreiecke sind alle zueinander kongruent.



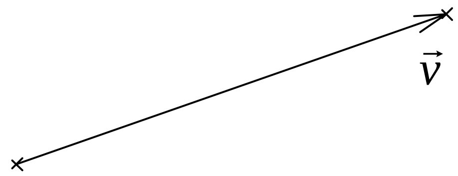
Durch welche Kongruenzabbildung wird das Dreieck ABC jeweils auf die anderen Dreiecke abgebildet? Füllen Sie die Tabelle aus. Tragen Sie die wichtigen Punkte, Geraden usw. in die Figur ein und beschriften sie (bei einer Drehung z.B. das Drehzentrum und den Drehwinkel).

Bilddreieck	Entsteht aus ABC durch (z.B.Drehung)	Genaue Daten für diese Abb. (z.B.Zentrum Z_{17} , Winkel α_{17})	Begründung
$A_1B_1C_1$			
$A_2B_2C_2$			
$A_3B_3C_3$			
$A_4B_4C_4$			

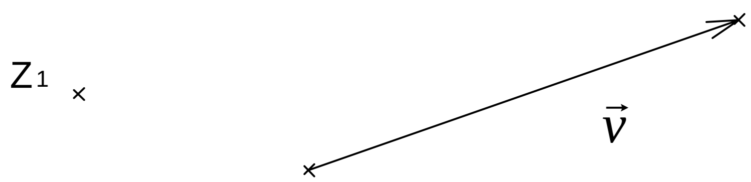
2. Eine Punktspiegelung am Punkt Z_1 wird gefolgt von einer Drehung um das Zentrum Z_2 mit dem Drehwinkel von 90° .
   Welche Abbildung ergibt sich als Verkettung der beiden Abbildungen?
   Konstruieren Sie die Daten dieser Abbildung und begründen Sie Ihr Vorgehen kurz.

3. Die Verschiebung um $\vec{v}$ soll jeweils durch zwei Drehungen $D_{Z1,\alpha}$ und $D_{Z2,\beta}$ ersetzt werden.

   a) Zuerst dürfen Sie frei über geeignete Z_1, Z_2, α, β bestimmen.
   Kurze Beschreibung des Vorgehens, α und β angeben.

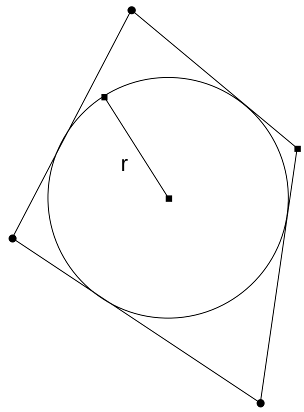


   b) Z_1 und $\alpha=50°$ sind vorgegeben. Konstruieren Sie Z_2 und geben Sie β an.

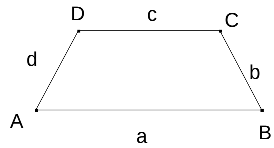


4. a) Es sei r der Inkreisradius eines Tangentenvierecks, U der Umfang.
Begründen Sie folgende Formel für den Flächeninhalt A dieses Tangentenvierecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot U$$



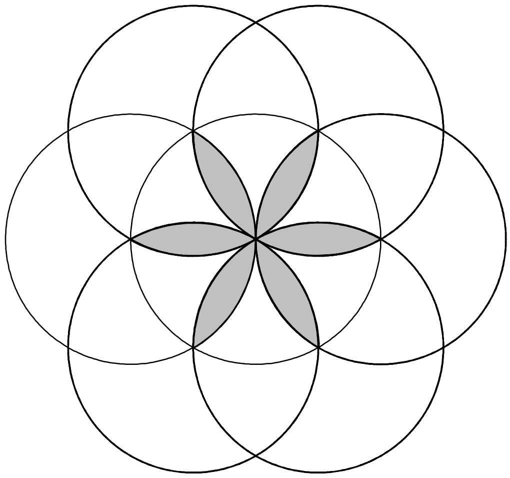
b) Konstruieren Sie ein symmetrisches Trapez, das einen Inkreis besitzt und dessen Seiten a = 10 cm, b = d = 7cm lang sind.
Hinweis: Das Berechnen anderer Längen im Trapez ist erlaubt!



Beachten Sie die Bezeichnung von Vierecken, die von der Konvention bei Dreiecken abweicht.
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion kurz.

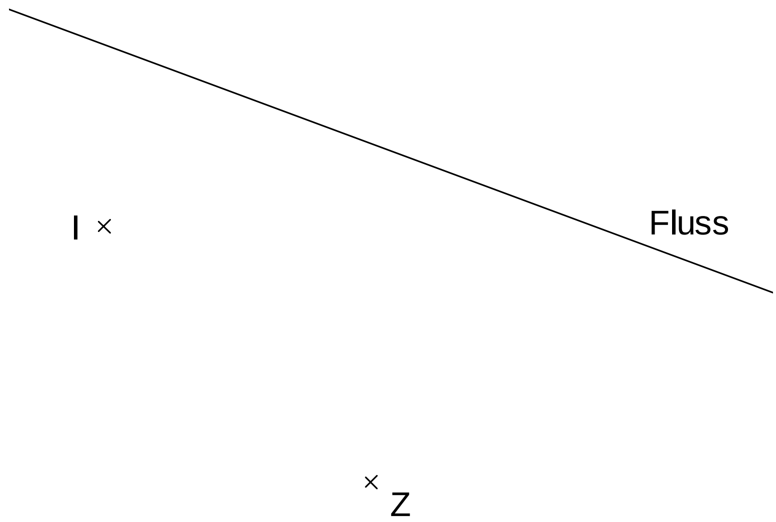
5. Zeigen Sie, dass alle spitzwinkligen Dreiecke ABC mit Seitenlänge $c = 8cm$ und dem Umkreisradius $r= 8cm$ den gleichen Winkel γ besitzen und berechnen Sie diesen Winkel.

6. Die unten stehende Figur wird nur aus Kreisen mit Radius r konstruiert. Berechnen Sie den Flächeninhalt der grau schraffierten Figur in Abhängigkeit von r.
   Berechnen Sie diesen Wert auch für r=6cm.

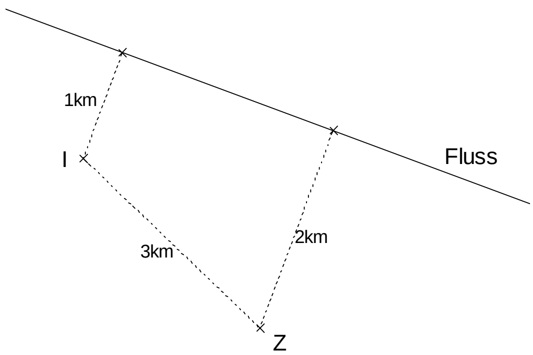


7 Ein Indianer I möchte mit seinem Pferd auf kürzestem Weg zu seinem Zelt reiten. Allerdings muss er einen Umweg zum Fluss machen, um sein Pferd zu tränken.

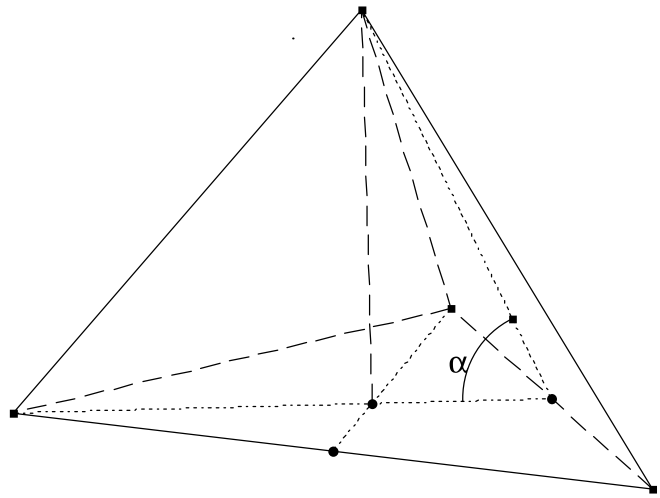
a) Konstruieren Sie diesen kürzesten Weg. Begründen Sie, warum jeder andere Weg länger wäre.



b) Wie lang ist dieser kürzeste Weg?
I ist 1 km vom Fluss entfernt, Z ist 2 km vom Fluss entfernt; die Entfernung von I und Z (natürlich ohne den Umweg über den Fluss) beträgt 3 km.
Rechnen – nicht messen!



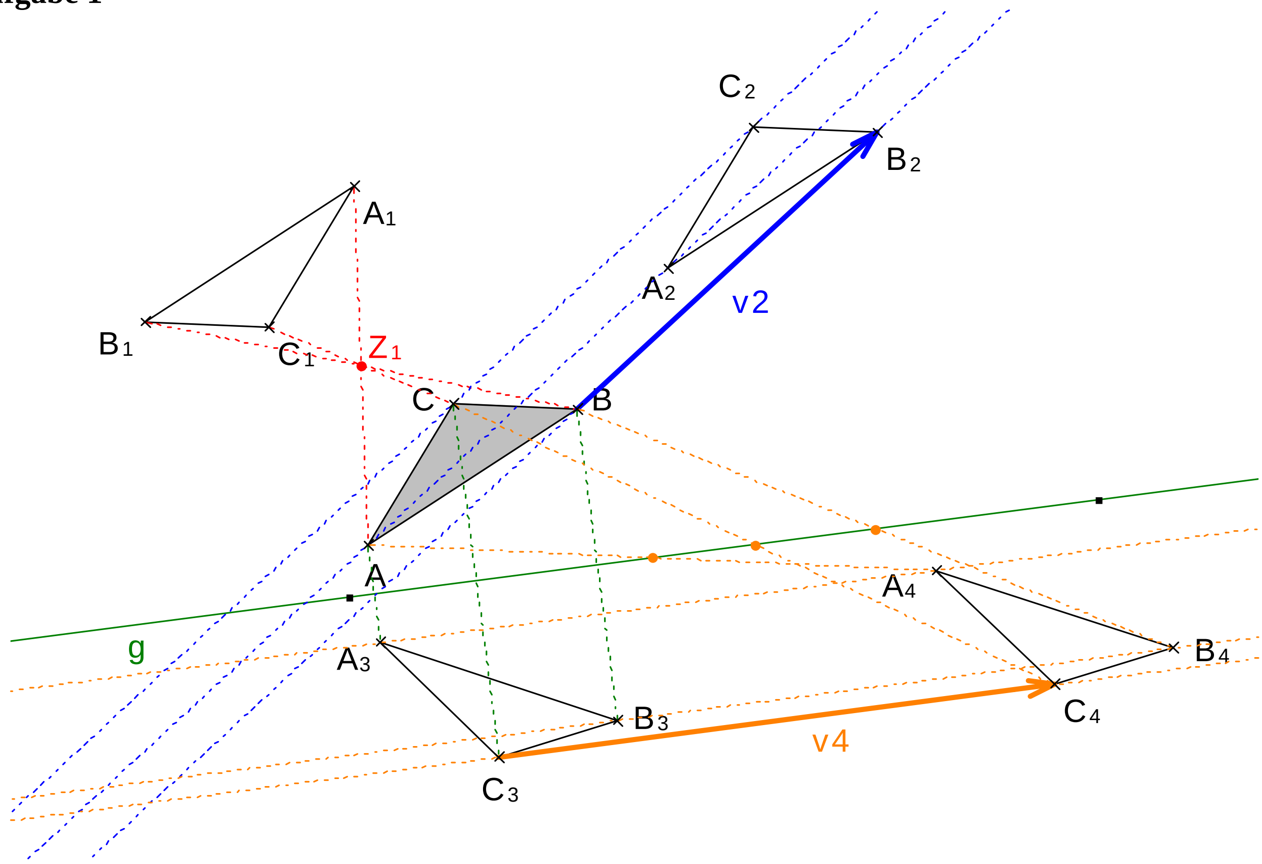
8. Ein Tetraeder ist ein regelmäßiger Körper, dessen vier Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.
   Unter welchem Winkel α schneiden sich die Seitenflächen eines Tetraeders?
   Kurze Begründung!



Klausur zur Einführung in die Geometrie im SS 2002

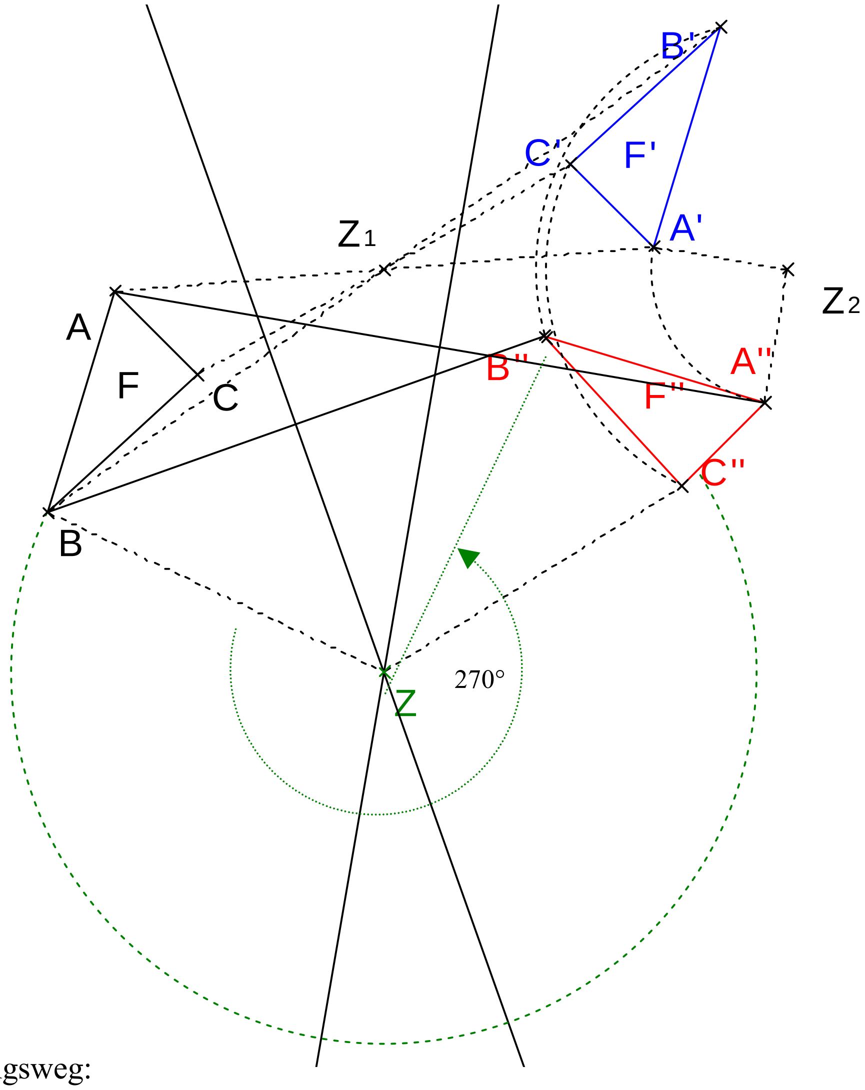
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1



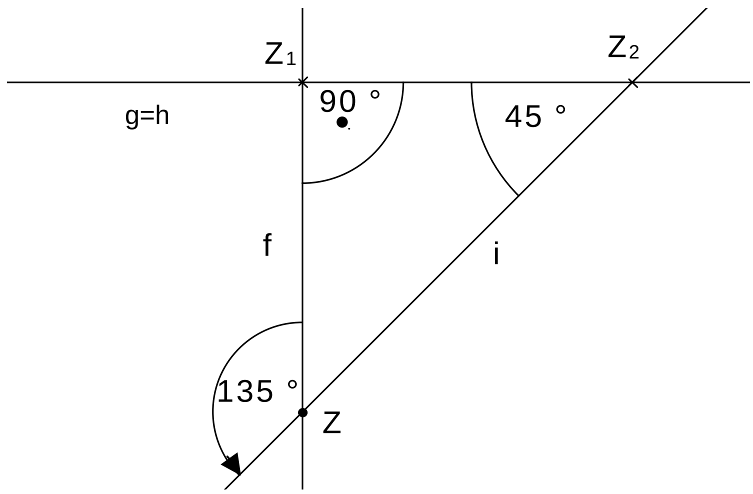
Bilddreieck	Entsteht aus ABC durch (z.B.Drehung)	Genaue Daten für diese Abb. (z.B.Zentrum Z_{17} , Winkel α_{17})	Begründung
$A_1B_1C_1$	Punktspiegelung (Drehung um 180°)	Spiegelzentrum Z_1	Umlaufsinn bleibt erhalten $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ gehen alle durch einen Punkt Z_1, der diese Strecken halbiert.
$A_2B_2C_2$	Verschiebung	Verschiebungsvektor $\vec{v}_2$	Umlaufsinn bleibt erhalten $\overline{AA_2}$, $\overline{BB_2}$, $\overline{CC_2}$ alle parallel (und gleich lang) .
$A_3B_3C_3$	Achsenspiegelung	Spiegelachse g	Umlaufsinn nicht erhalten $\overline{AA_3}$, $\overline{BB_3}$, $\overline{CC_3}$ alle parallel, senkrecht zu g, g Mittelsenkrechte dieser Strecken.
$A_4B_4C_4$	Schubspiegelung	Spiegelachse g und Verschiebungsvektor $\vec{v}_4$ parallel zu g	Umlaufsinn nicht erhalten; außerdem 1. Begründung: $\overline{AA_4}$, $\overline{BB_4}$, $\overline{CC_4}$ nicht parallel, also keine Achsenspiegelung. Die Mittelpunkte von $\overline{AA_4}$, $\overline{BB_4}$, $\overline{CC_4}$ liegen auf einer Geraden g: Spiegelachse g. ABC spiegeln an g. Vektor $\vec{v}_4$ Verbindung von C_3 und C_4. 2. Begründung: $A_4B_4C_4$ entsteht durch Verschiebung mit Vektor $\vec{v}_4$ aus $A_3B_3C_3$ (Begründung wie bei 2), $A_3B_3C_3$ entsteht durch Achsenspiegelung an g aus ABC, g ist parallel $\vec{v}_4$. 3. Begründung: Konstruktion mit 3 Achsenspiegelungen (komplizierter)

Aufgabe 2, Erster Lösungsweg (etwas umständlich):
Da man weiß, dass entweder eine Verschiebung oder Drehung entsteht (durch gerade Zahl von Achsenspiegelungen darstellbar) kann man ein Dreieck abbilden und das Drehzentrum konstruieren, indem man die Mittelsenkrechten von zwei Punkt-Bildpunkt-Paaren konstruiert. Deren Schnittpunkt ist das Drehzentrum. Den Drehwinkel kann man bei Z ablesen (Umlaufsinnsinn beachten).
Tatsächlich weiß man, dass die Verkettung von zwei Drehungen um 180° und 90° eine Drehung um 270° ergibt.



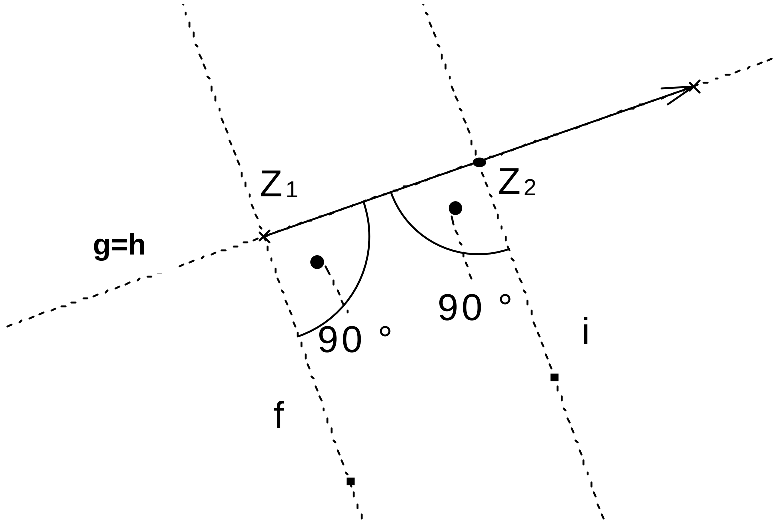
Aufgabe 2, zweiter Lösungsweg:

Punktspiegelung durch Spiegelung an 2 orthogonalen Geraden f, g durch Z_1 darstellen wobei g durch Z2 geht. Die Drehung um Z_2 durch Spiegelung an h und i darstellen wobei h=g und $\angle$ h,i=45° beträgt. Z ist Schnitt von f und i.
Es ist $S_f \circ S_g \circ S_h \circ S_i =$
$S_f \circ id \circ S_i = S_f \circ S_i =$
D



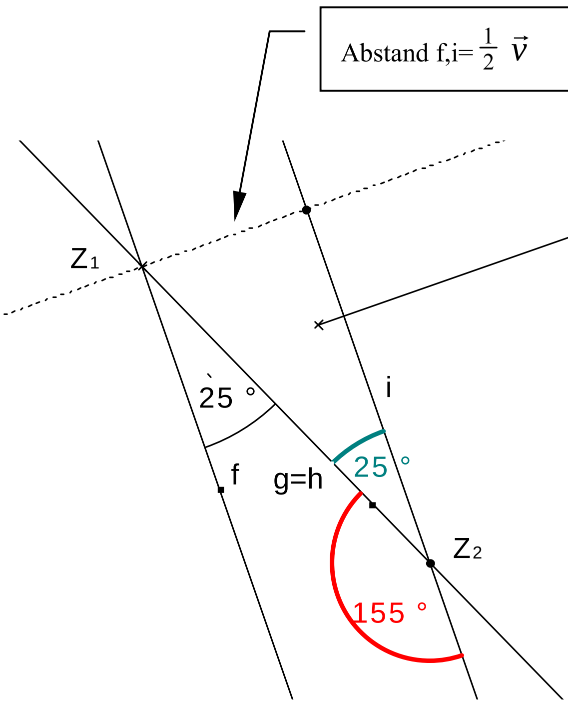
Drehung um Z mit Drehwinkel 270°, da $\angle$f,i = 135° ist.

Aufgabe 3a



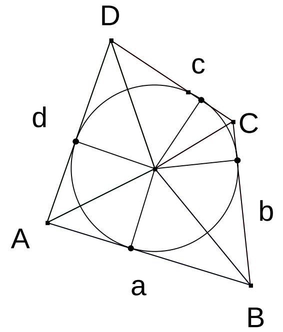
Konstruktion:
f ist Senkrechte zum Pfeil $\vec{v}$ durch den Anfangspunkt Z_1 von $\vec{v}$, Z_2 „Mittelpunkt von $\vec{v}$ “, g=h Gerade Z_1Z_2, i Senkrechte zu $\vec{v}$ durch Z_2.
$(S_f \circ S_g)\circ(S_h \circ S_i) = S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_i = S_f \circ id \circ S_i = S_f \circ S_i = V_v$. $\alpha=\beta=180°$.

Aufgabe 3b



$\beta=310°$
Konstruktion:
f ist Senkrechte zu $\vec{v}$ durch Z_1, g=h Gerade durch Z_1 mit Winkel 25° zu f. i ist Parallele zu f im Abstand $\frac{1}{2}$ $\vec{v}$, Z_2 Schnittpunkt von h und i.
$(S_f \circ S_g)\circ(S_h \circ S_i) = S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_i = S_f \circ id \circ S_i = S_f \circ S_i = V_v$.
$\beta=310°$, da $\angle i,h = 25°$ und $\angle h,i = 180° - \angle i,h = 155°$ und $S_h \circ S_i = D_{Z2,\beta}$.

Aufgabe 4a



Das Lot vom Inkreismittelpunkt auf eine Seite ist stets der Radius r. Durch Verbinden das Inkreismittelpunktes mit den Eckpunkten wird das Viereck in Dreiecke zerlegt.

Es ist

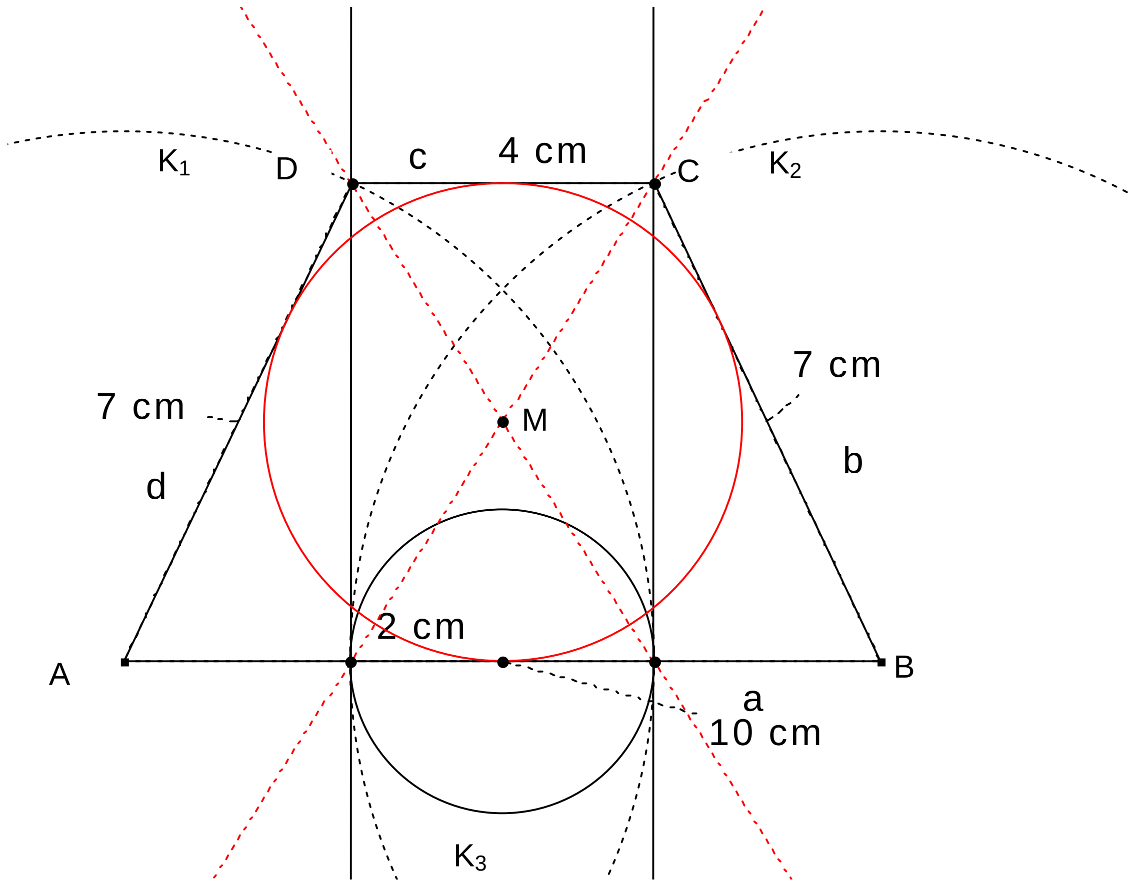
$A_{\text{Viereck}} = \frac{1}{2}\, r \cdot a + \frac{1}{2}\, r \cdot b + \frac{1}{2}\, r \cdot c + \frac{1}{2}\, r \cdot d = \frac{1}{2}\, r \cdot (a+b+c+d) = \frac{1}{2}\, r \cdot U$

Aufgabe 4b

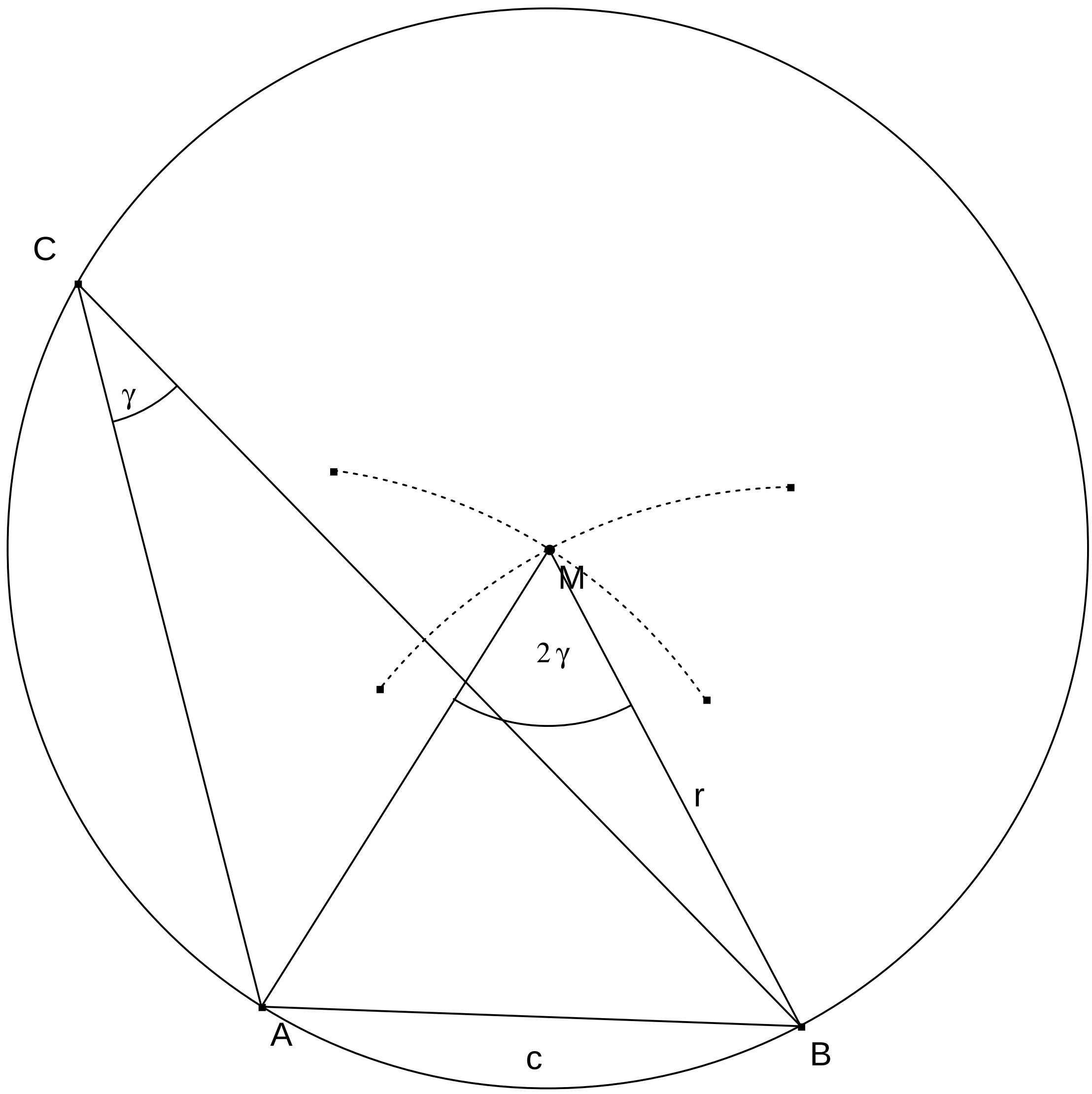
Trapez mit Inkreis: Die Summe gegenüber liegender Seiten ist gleich.
$a+c=b+d=14$ cm $\Rightarrow c=4$ cm.

Konstruktion des Trapezes:

Zeichne a= 10 cm mit Endpunkten A, B. Kreise K_1 und K_2 um A und B mit Radius 7 cm. Mittelpunkt M von a. Kreis K_3 mit Radius 2 cm um M, in den Schnittpunkten von K_3 mit a Senkrechte errichten. Deren Schnittpunkte mit K_1 und K_2 sind die Punkte C und D.



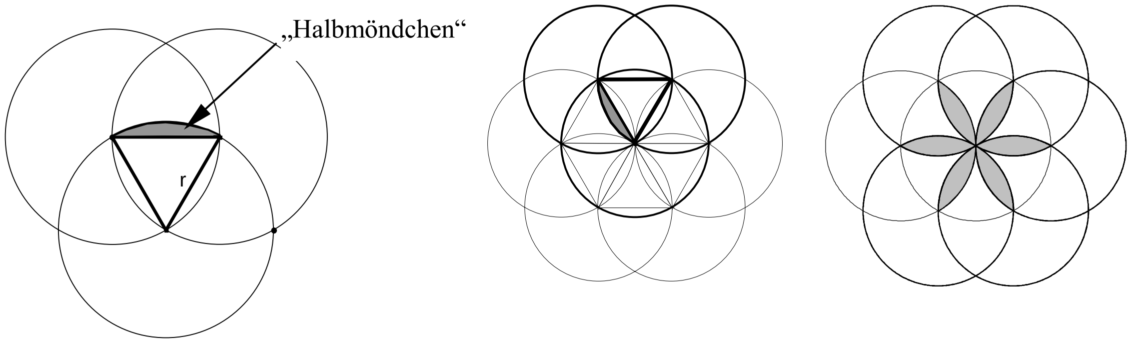
Aufgabe 5



Zeichnung (nicht verlangt, Skizze genügte).

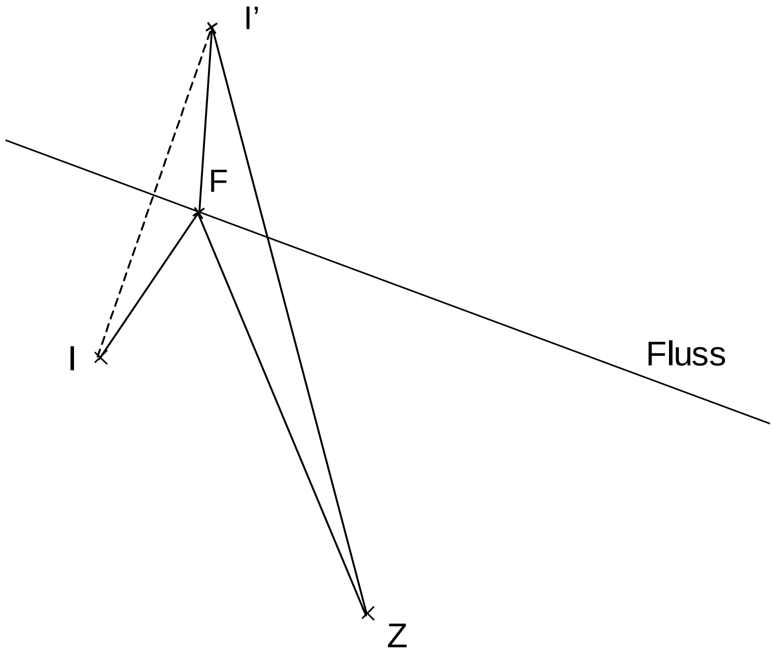
M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Da $c = r = 8$ cm ist das Dreieck ABM gleichseitig, alle Winkel betragen 60°. Der Winkel $\angle AMB$ ist Mittelpunktswinkel zum Winkel γ des Dreiecks, da C auf dem Umkreis liegt. Daher folgt aus dem Peripheriewinkelsatz $\gamma=30°$ (für alle Lagen von C auf der selben Seite von AB wie M).

Aufgabe 6



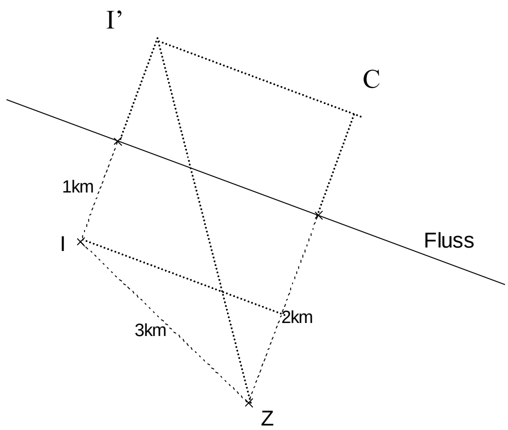
Graue Blumenfläche	A_{gesamt}	$=$	$12 \cdot A_{Halbmöndchen}$
Halbmöndchen	$A_{Halbmöndchen}$	$=$	$A_{Sechstelkreis} - A_{Dreieck}$
Sechstelkreis	$A_{Sechstelkreis}$	$=$	$\frac{1}{6}\pi r^2$
Gleichseitiges Dreieck	Höhe	$=$	$\frac{r}{2}\sqrt{3}$ (Pythagoras)
	$A_{Dreieck}$	$=$	$\frac{1}{2}\frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$
	$A_{Halbmöndchen}$	$=$	$\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = (\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4})r^2$
	A_{gesamt}	$=$	$12 \cdot A_{Halbmöndchen} = (2\pi - 3\sqrt{3})r^2$
		$\approx$	$39{,}13\ \text{cm}^2$ für r=6cm

Aufgabe 7a



I’ ist der Bildpunkt von I bei der Achsenspiegelung an der Geraden „Fluss“. F sei ein beliebiger Punkt auf der Geraden „Fluss“. Es ist daher $|\overline{IF}| = |\overline{I'F}|$.
$\Rightarrow$ Weglänge von I nach Z über F = $|\overline{IF}| + |\overline{FZ}| = |\overline{I'F}| + |\overline{FZ}|$.
Dieser Weg ist am kürzesten, wenn F auf der Geraden I’Z liegt, da im Dreieck IFZ die Summe der Seiten $\overline{I'F}$ und $\overline{FZ}$ länger als die dritte Seite $\overline{I'Z}$ ist.

Aufgabe 7b



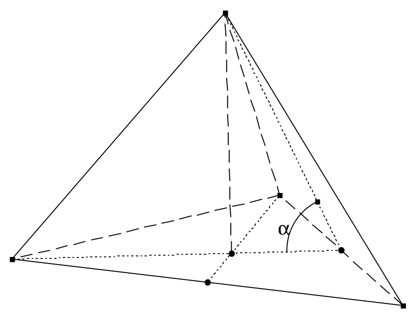
$\overline{I'C} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8}$, $\overline{CZ} = 3$

$\overline{I'Z} = \sqrt{8+9} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

Der kürzeste Weg ist ca. 4,12 km lang.

Aufgabe 8

Unter welchem Winkel α schneiden sich die Seitenflächen eines Tetraeders?



Fußpunkt der Körperhöhe des Tetraeders ist der Schwerpunkt S des gleichseitigen Dreiecks, er teilt die Seitenhalbierende des Dreiecks im Verhältnis 2:1. Die Seitenhöhe des Dreiecks ist ebenfalls die Seitenhalbierende des Dreiecks. Ist die Länge der Seitenhalbierende s, dann erhält man für α:

$\cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}s}{s} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 70{,}53°$