Klausur zur Einführung in die Geometrie im SS 2001

Name, Vorname .... Matr.Nr. ....
Semester-Anzahl im SS 2001: .... Studiengang GH/R/S Tutor/in:................

Aufg.1	*Aufg,2*	*Aufg.3*	*Aufg.4*	*Aufg.5*	*Aufg.6*	*Aufg.7*	*Gesamt*	
5 Punkte	*5 Punkte*	*5 Punkte*	*3Punkte*	*4 Punkte*	*4 Punkte*	*4 Punkte*	*30 Punkte*	

Erreichbar sind 30 Punkte. Für das Bestehen der Klausur genügen 15 Punkte.

1. Die Dreiecke ABC, A'B'C', A'',B'',C'' sind zueinander kongruent.

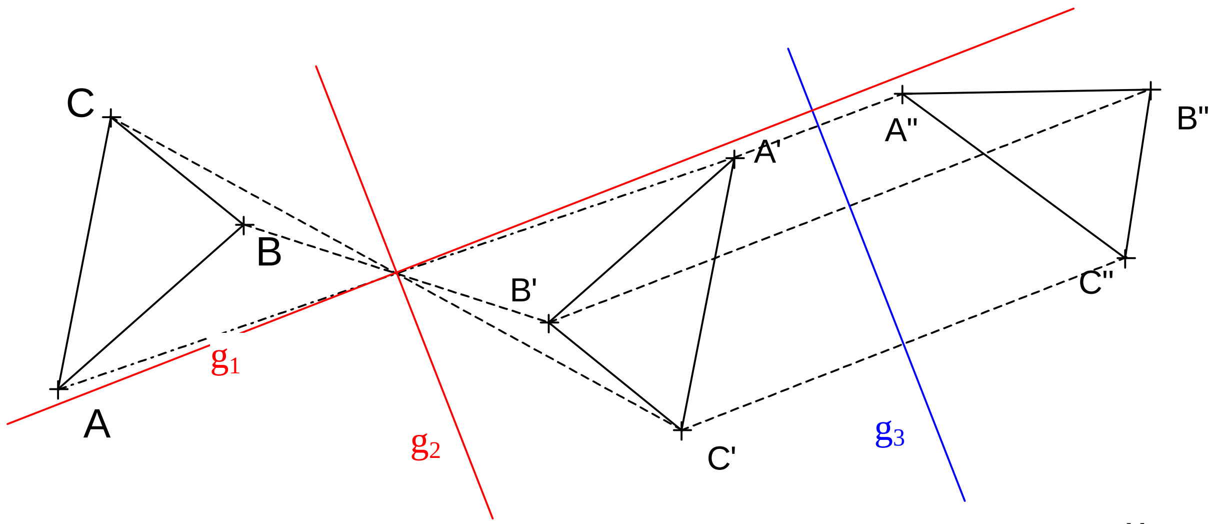


Abb.1

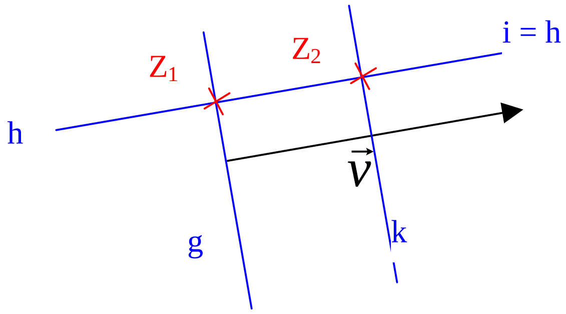
a) Durch welche Kongruenzabbildung werden die Dreiecke jeweils aufeinander abgebildet? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

- Δ ABC auf Δ A'B'C' durch . **eine Punktspiegelung**
  Begründung: **Umlaufsinn bleibt erhalten ⇒ Drehung oder Verschiebung**
  Die Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ schneiden sich in einem Punkt, der sie halbiert
- Δ A'B'C' auf Δ A''B''C'' durch **eine Achsenspiegelung**
  Begründung: **Umlaufsinn ändert sich ⇒ Achsen- oder Schubspiegelung.**
  Die Strecken $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$, $\overline{C'C''}$ sind parallel ⇒ Achsenspiegelung
- Δ ABC auf Δ A''B''C'' durch **..eine Schubspiegelung.**
  Begründung: **Umlaufsinn ändert sich ⇒ Achsen- oder Schubspiegelung.**.
  Die Strecken $\overline{A'A''}$, $\overline{B'B''}$, $\overline{C'C''}$ <u>nicht</u> parallel ⇒ Schubspiegelung

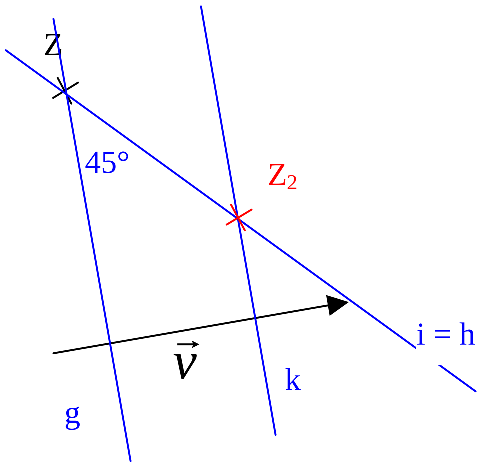
b) Δ ABC soll durch Hintereinanderausführen von Achsenspiegelungen auf Δ A''B''C'' abgebildet werden.
Tragen Sie in der Abb.1 geeignete Spiegelachsen ein. Beschriften Sie die Achsen. Geben Sie die Reihenfolge an, in der die Spiegelungen durchzuführen sind.
Spiegelung an g_1, dann an g_2 ($g_1 \perp g_2$, Punktspiegelung), dann an g_3.

2. Die Verschiebung $\vec{v}$ soll durch das Hintereinanderausführen geeigneter Drehungen ersetzt werden.
Konstruieren Sie solche Drehungen, wenn
   a) die Drehzentren und die Drehwinkel beliebig gewählt werden dürfen
   b) die erste der Drehungen $D_{Z,90°}$ sein muß
   c) die zweite der Drehungen $D_{Z,60°}$ sein muß

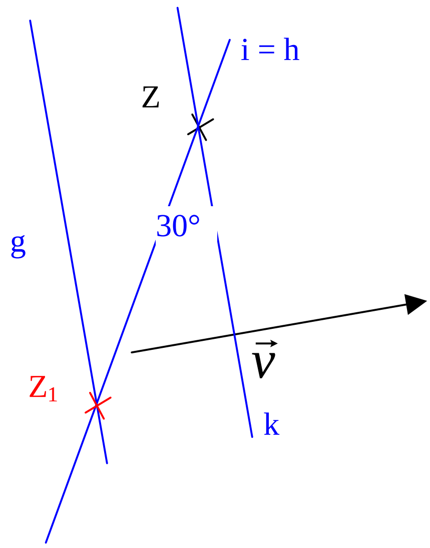
a) Hintereinanderausführen von zwei Drehungen ergibt eine Drehung oder Verschiebung.
Eine Verschiebung ergibt sich, wenn man die Drehungen durch Achsenspiegelungen darstellt, die Achsenzahl in der üblichen Weise reduziert und die übrig bleibenden Achsen parallel sind.
Hier geht man von den übrig bleibenden parallelen Achsen aus und konstruiert dazu die (zusammen fallenden) Achsen, die die Drehungen definieren. (Erklärung war nicht verlangt, nur Konstruktion)
Abstand von g, k halbe Länge von $\vec{v}$, senkrecht zu $\vec{v}$, Hilfsachsen i, h hier beliebig wählbar.



b)



c)

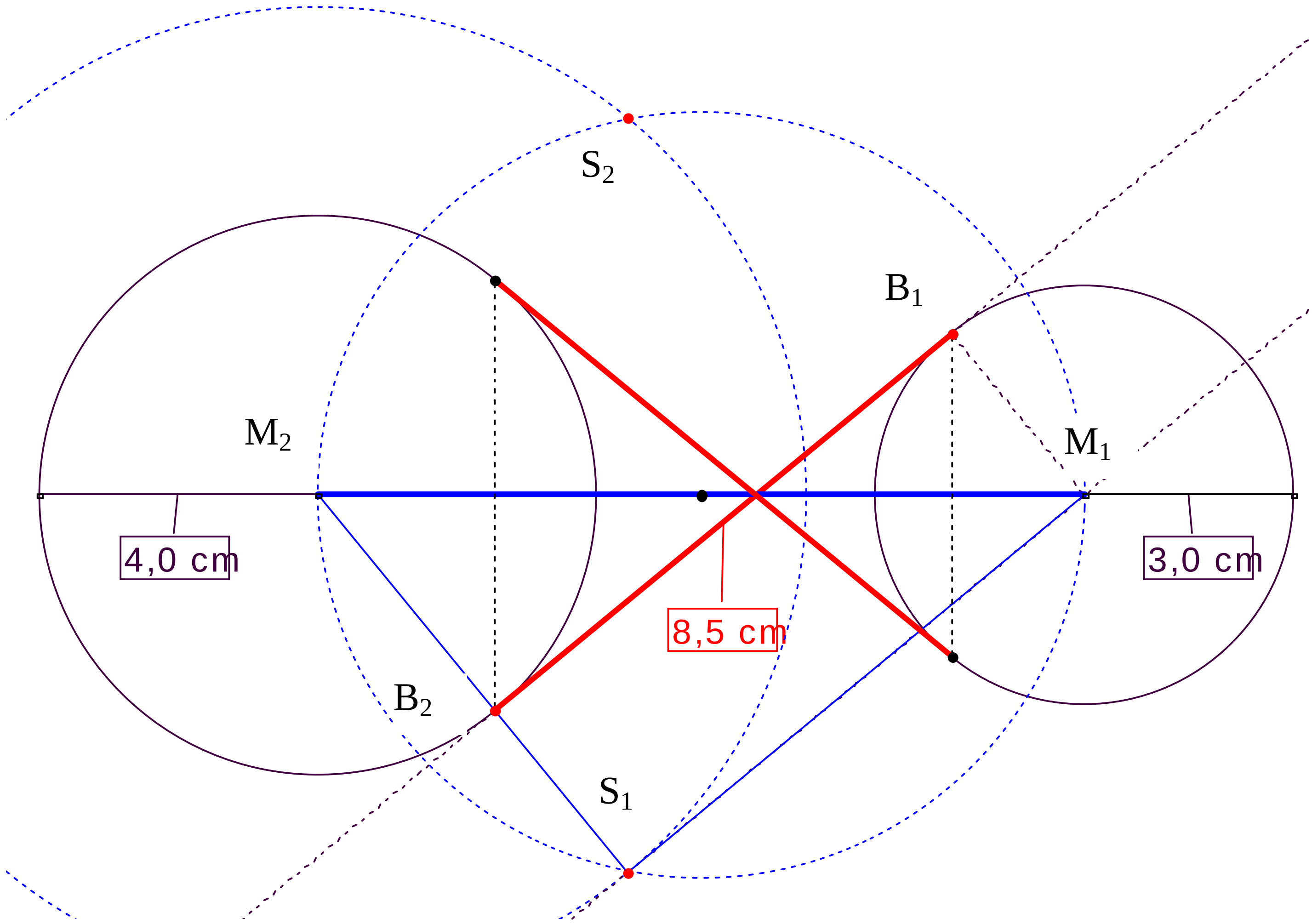


3. Gegeben sind zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 3$ cm und $r_2 = 4$ cm, deren Mittelpunkte 11 cm weit auseinander liegen.

a) Konstruieren Sie die gemeinsamen Tangenten, die zwischen den beiden Kreisen verlaufen (innere Tangenten).
Geben Sie eine kurze Konstruktionsbeschreibung.

b) Berechnen Sie die Länge der Tangentenabschnitte zwischen den Berührpunkten.

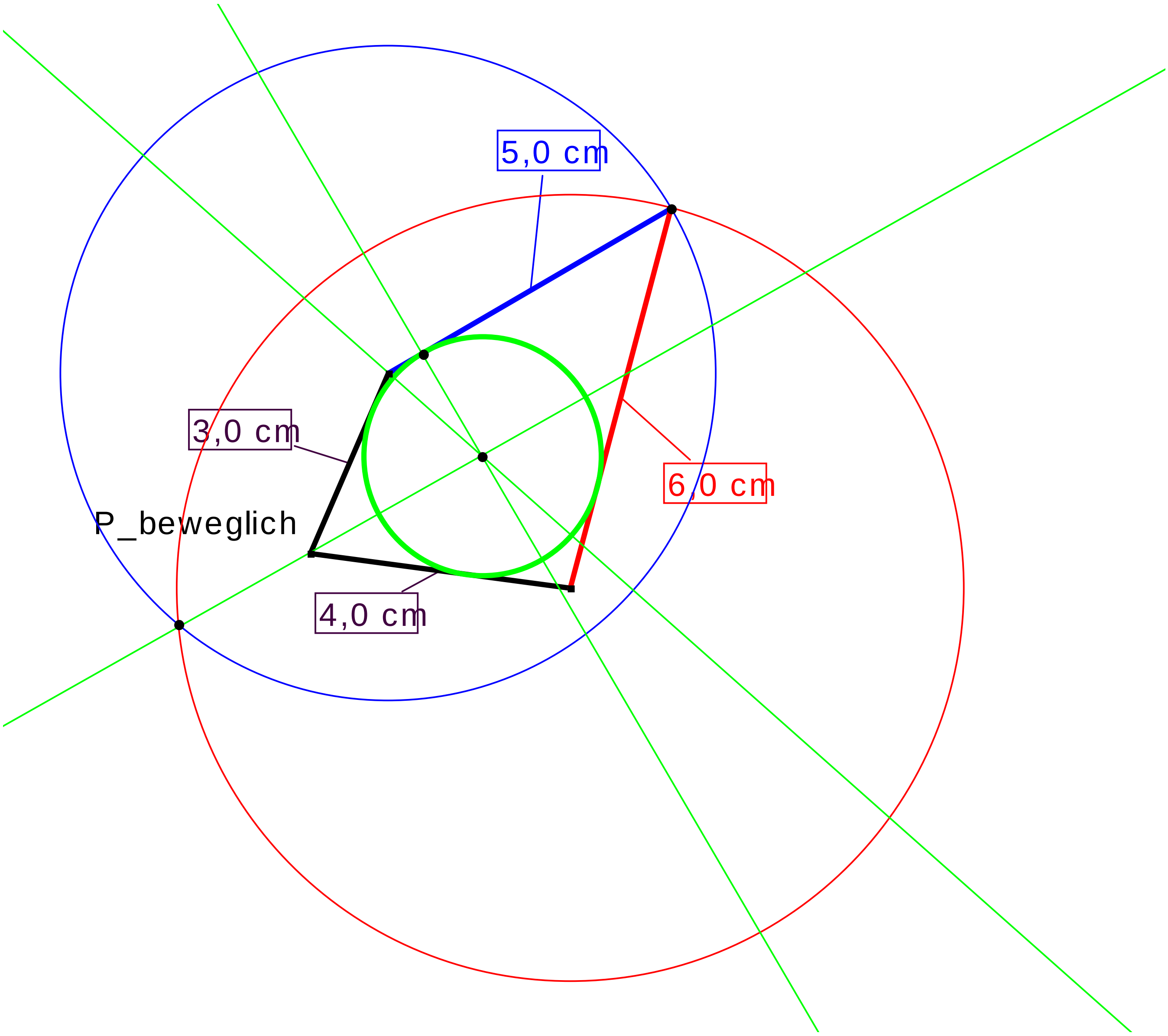
a) Zeichne Kreis K_3 um M_2 mit Radius 7 cm ($= r_1 + r_2$). Zeichne Thaleskreis über der Strecke M_1M_2 , S_1 ist einer der Schnittpunkte mit K_3. Verbinde S_1 mit M_2 , Schnittpunkt mit Kreis K_2 ist B_2 . Parallele zu M_2B_2 durch M_1 geschnitten mit Kreis K_1 ist B_1. Verbindungsgerade B_1B_2 ist eine der gesuchten Tangenten, deren Spiegelung an M_1M_2 die zweite.



b) Der Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck $M_1 M_2 S$ liefert: Länge des Tangentenabschnitts in cm $\sqrt{11^2 - 7^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}485$

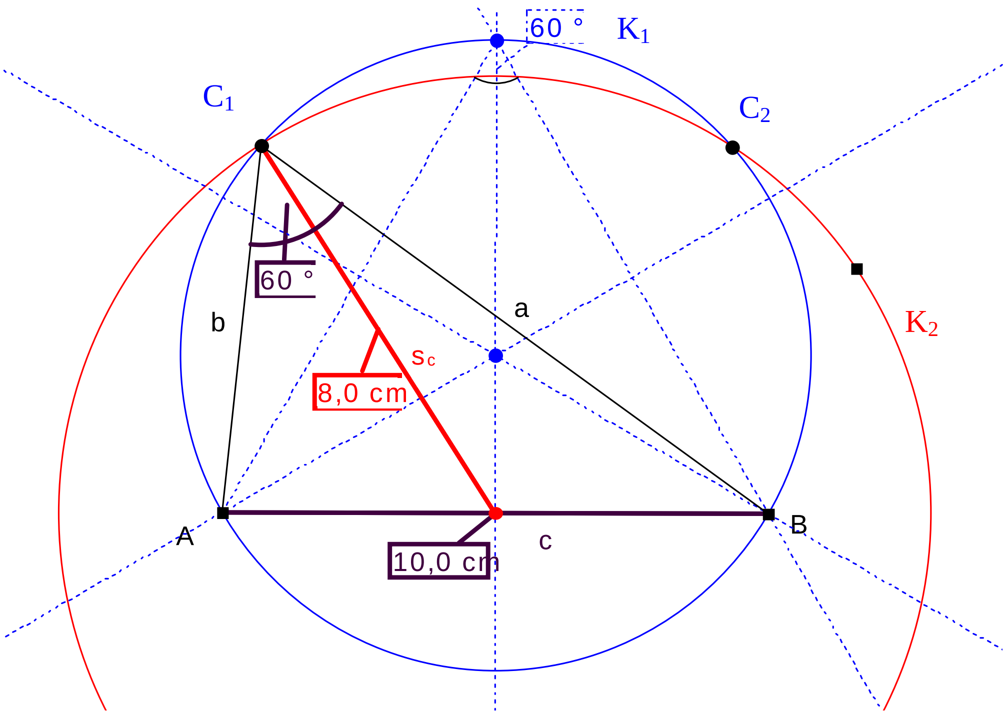
4. Konstruieren Sie ein Viereck mit den Seitenlängen 3 cm, 4 cm, 5 cm und 6 cm.
Das Viereck soll einen Inkreis besitzen.

Die Summe der Längen gegenüber liegender Seiten muss gleich sein. Daraus ergibt sich die Lage der Seiten (s.Konstruktion unten.).
Konstruktion: Zwei Seiten der Länge 3 cm und 4 cm werden in beliebigem Winkel gezeichnet. Kreise um die freien Endpunkte dieser Strecken mit den Radien 5 cm und 6 cm liefern in ihrem Schnittpunkt den fehlenden Eckpunkt des Vierecks.



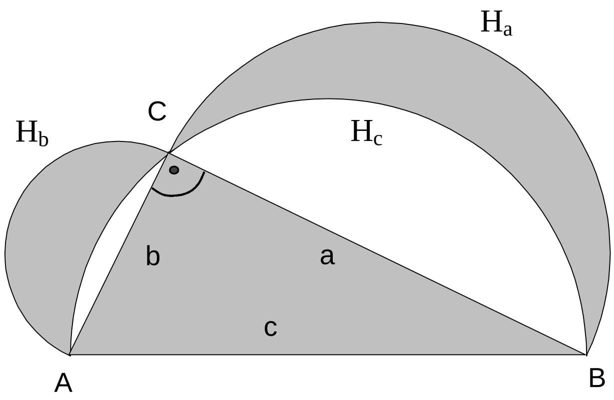
5 Konstruieren Sie (mit Zirkel und Lineal) alle Dreiecke mit $c = 10$ cm , $\gamma = 60°$, $s_c = 8$ cm (s_c ist die Seitenhalbierende zur Seite c).

Geben Sie eine kurze Beschreibung Ihrer Konstruktion.



Konstruiere über c=10 cm ein gleichseitiges Dreieck. Konstruiere dessen Umkreis K_1. Alle Scheitel von Dreiecken über c mit Winkel $\gamma = 60°$ liegen auf K_1. Zeichne einen Kreis K_2 mit Mittelpunkt M_c (Mittelpunkt der Seite c) mit Radius $s_c = 8$ cm. Die Schnittpunkte C_1 und C_2 der Kreise K_1 und K_2 sind die gesuchten Eckpunkte des Dreiecks. Die beiden Dreiecke sind kongruent..

6. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Über a ist der Halbkreis H_a, über b der Halbkreis H_b und über c der Halbkreis H_c gezeichnet (siehe Figur unten). Beweisen Sie, dass die Summe der Flächeninhalte beiden grauen Möndchen gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist.

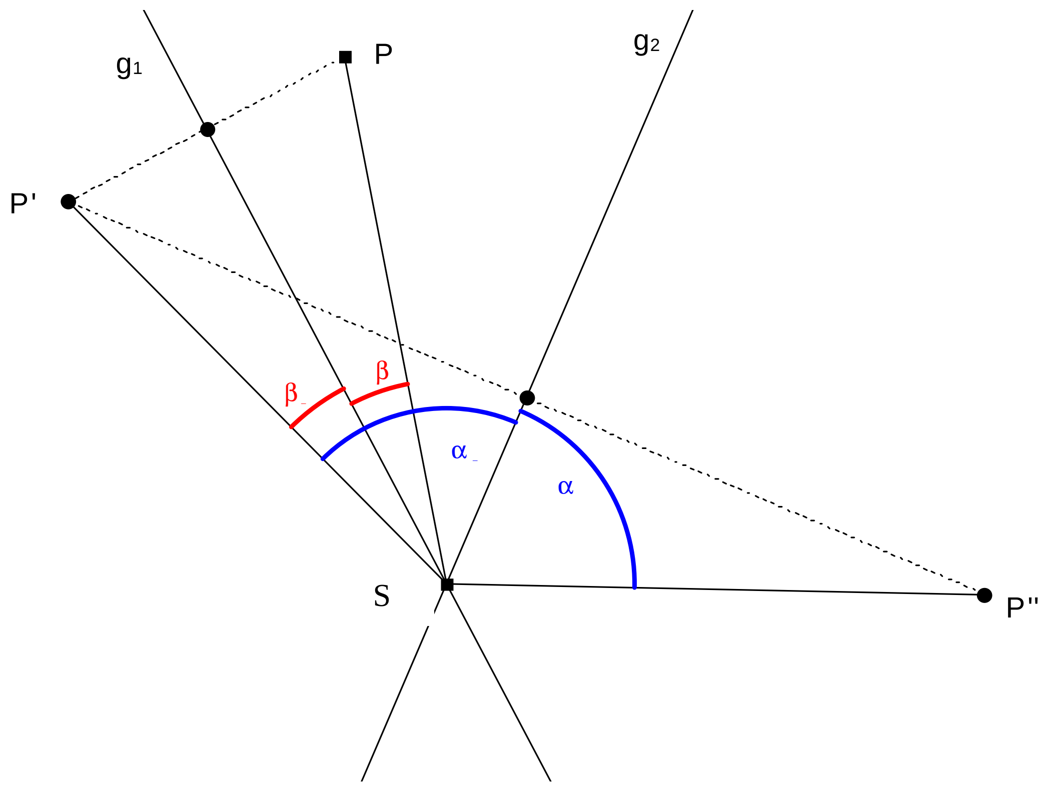


$$A_{\text{Möndchen}} = A_{\text{Dreieck}} + A_{H_a} + A_{H_b} - A_{H_c} = A_{\text{Dreieck}} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a}{2}\right)^2\pi + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b}{2}\right)^2\pi - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{c}{2}\right)^2\pi$$

$$= A_{\text{Dreieck}} + \tfrac{1}{8}\pi\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = A_{\text{Dreieck}}$$

da $a^2 + b^2 = c^2$ nach dem Satz des Pythagoras.

7. Beweisen Sie *für die angegebene Lage von P*, dass die Hintereinanderausführung einer Spiegelung S_1 an g_1 und einer Spiegelung S_2 an g_2 eine Drehung von P um S mit dem doppelten Winkel zwischen g_1 und g_2 bewirkt.



1) $|\overline{PS}| = |\overline{P'S}| = |\overline{P''S}|$ da bei den Achsenspiegelungen S Fixpunkt ist und die Längen erhalten bleiben. Daher liegen P und P'' auf einem Kreisbogen um S.

2) Winkel zwischen PS und g_1 = Winkel zwischen P'S und g_1 = β,
Winkel zwischen P'S und g_2 = Winkel zwischen P''S und g_2 = α,
da die Achsenspiegelungen winkeltreu sind.

Winkel zwischen g_1 und g_2 = $\alpha - \beta$
Winkel zwischen PS und P''S = $2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta)$ = $2\cdot$(Winkel zwischen g_1 und g_2)