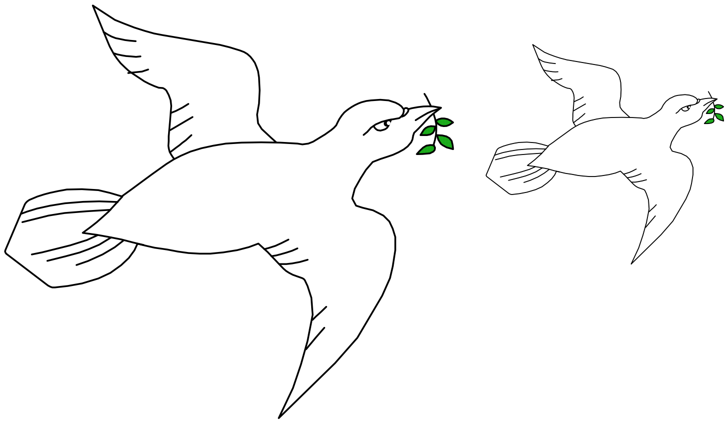
Kapitel 7: Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele



„Verkleinerungen“

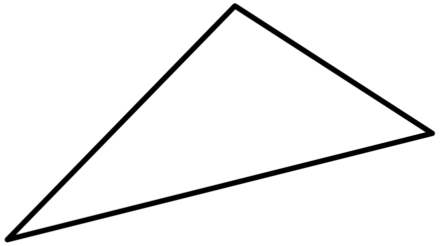
„Vergrößerungen“

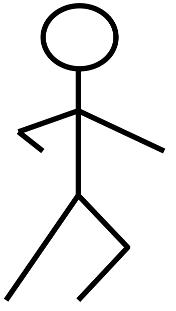
Bijektive, geradentreue und winkeltreue Abbildungen der Ebene heißen **Ähnlichkeitsabbildungen**.

Mathematische **Präzisierung,** aber auch **Verengung** der umgangssprachlichen Redeweise

„Die zwei sehen ganz ähnlich aus“

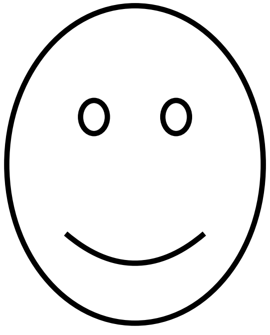
Zeichnen Sie ein doppelt so großes Bild





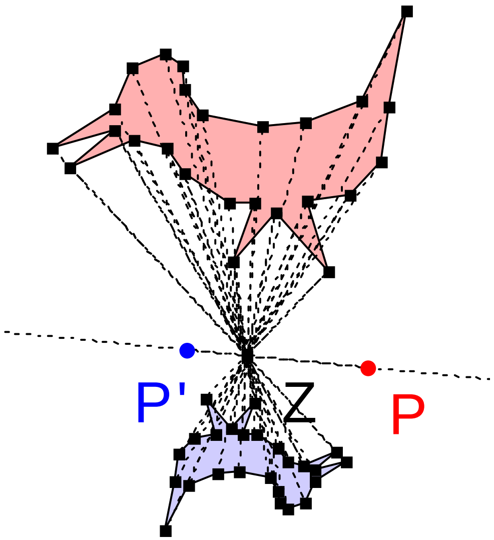
Beschreiben Sie Ihr Verfahren

Zeichnen Sie ein doppelt so großes Bild

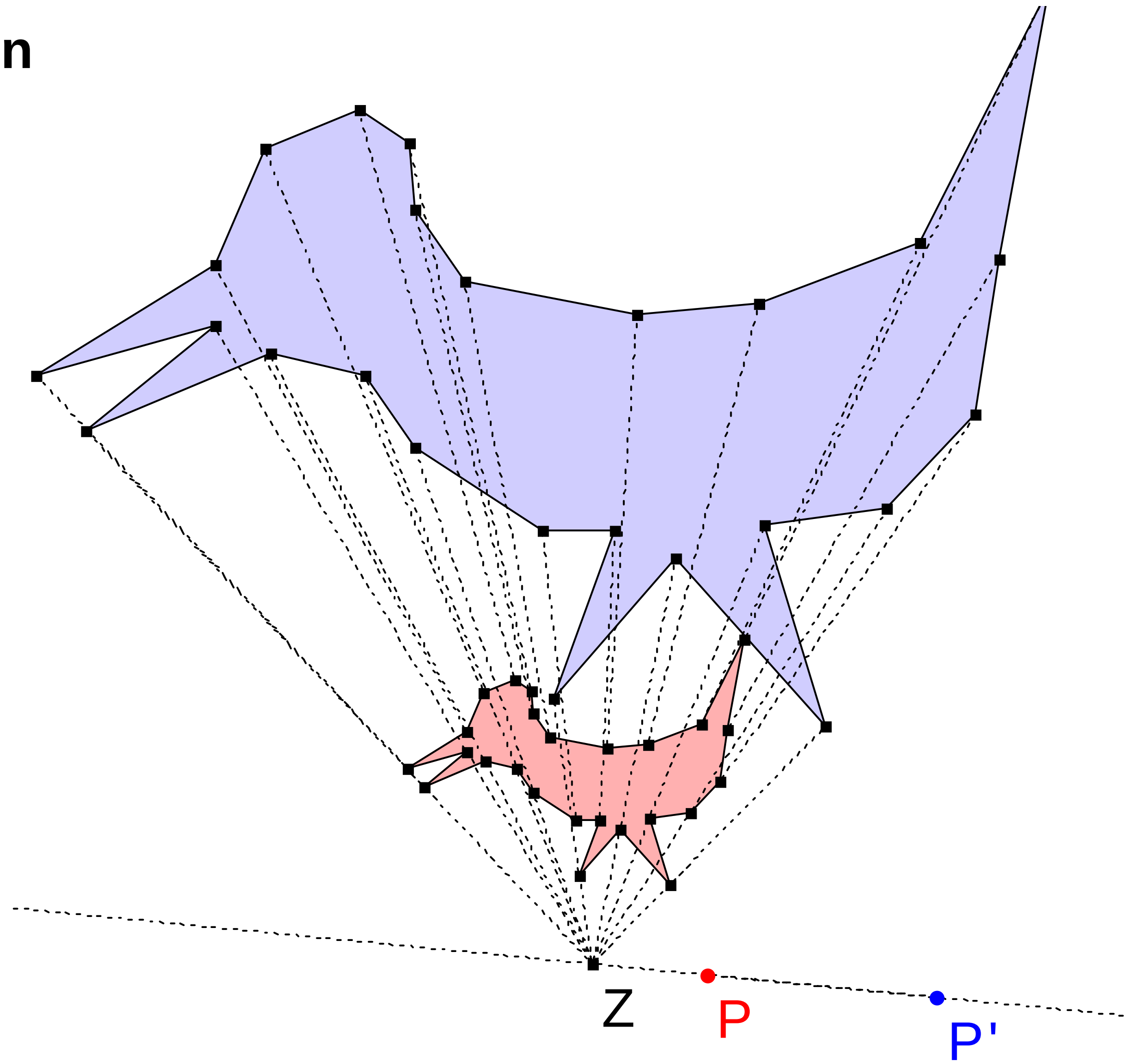


Beschreiben Sie Ihr Verfahren

7.1 Zentrische Streckungen



k = -0,5



k = +3

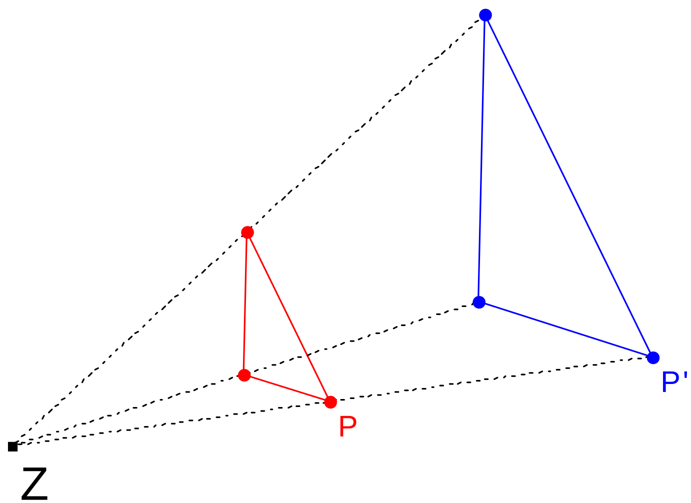
Definition 7.1

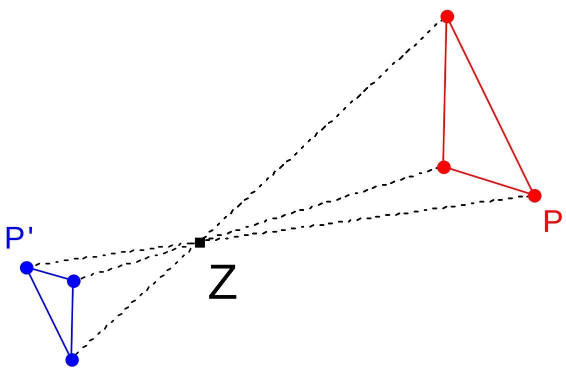
Es sei Z ein Punkt der Ebene E; k $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Eine Abbildung E$\to$E heißt zentrische Streckung mit (Streck-)Zentrum Z und Streckfaktor k

$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P‘ gilt: $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiel: Strecken von Dreiecken





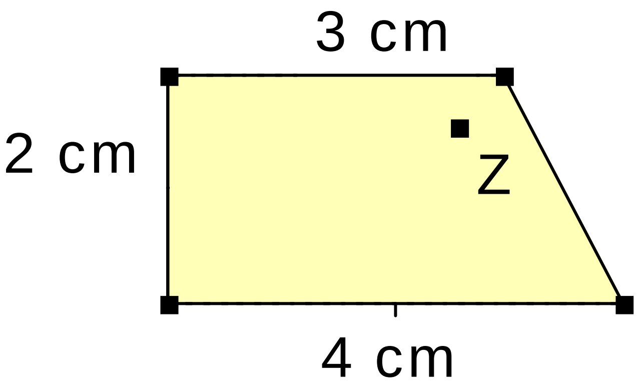
k = +2 $\overline{ZP'} = 2 \cdot \overline{ZP}$

k = -0,5 $\overline{ZP'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ZP}$

Aufgabe

Führen Sie mit dem Viereck je eine zentrische Streckung durch mit

a) $k = 2$ b) $k = -3$ c) $k = -1$



Was bedeutet Streckung mit k=-1 ?

Wie lässt sich die Streckung mit k=-3 deuten?

Was würde eine Streckung mit Faktor k=0 bedeuten?

Eigenschaften einer zentrischen Streckung

- Umkehrabbildung ist die zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckfaktor 1/k.
- Fixelemente einer zentrischen Streckung:
  - Fixpunkt: Z
  - Fixgeraden: alle Geraden durch Z

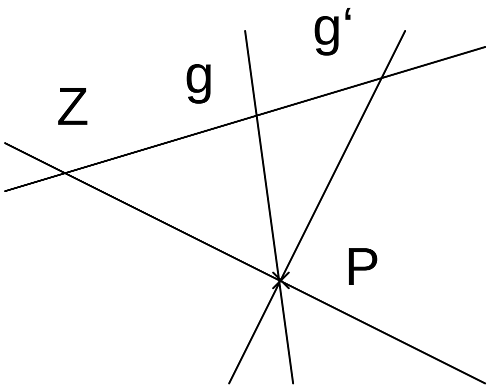
Invarianten einer zentrischen Streckung

- Geradentreu (Beweis ausgelassen)
- Bildgerade || Originalgerade
- parallelentreu
- winkelmaßtreu
- umlaufsinntreu
- teilverhältnistreu
- längenverhältnistreu
- Im allgemeinen ***nicht flächeninhaltstreu***

Einige Beweise

Bildgerade || Originalgerade:

$Z \in g$: $\Rightarrow$ g'=g und g' || g.



$Z \notin g$ aber $g' \cap g = \{P\}$: $\Rightarrow$ P Fixpunkt $\neq Z$.

Also auch hier g' || g.

Parallelentreue, Winkelmaßtreue:

Folgen aus der vorangehenden Eigenschaft.

Umlaufsinntreue: Offensichtlich

Teilverhältnistreue: Satz 4.3 oder Folgerung aus Satz 4.1.

Längenverhältnistreue: Folgerung aus Satz 4.1.

Was wir schon immer geglaubt haben:

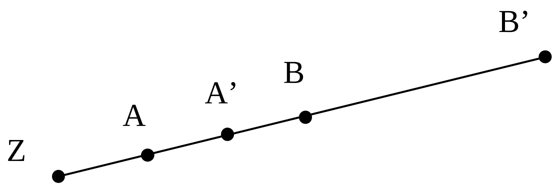
Ist das nicht genau die Definition einer zentrischen Streckung???

Satz 7.1

Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor k gilt für *jede* Strecke $\overline{AB}$:

$|\overline{A'B'}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$

Beweis

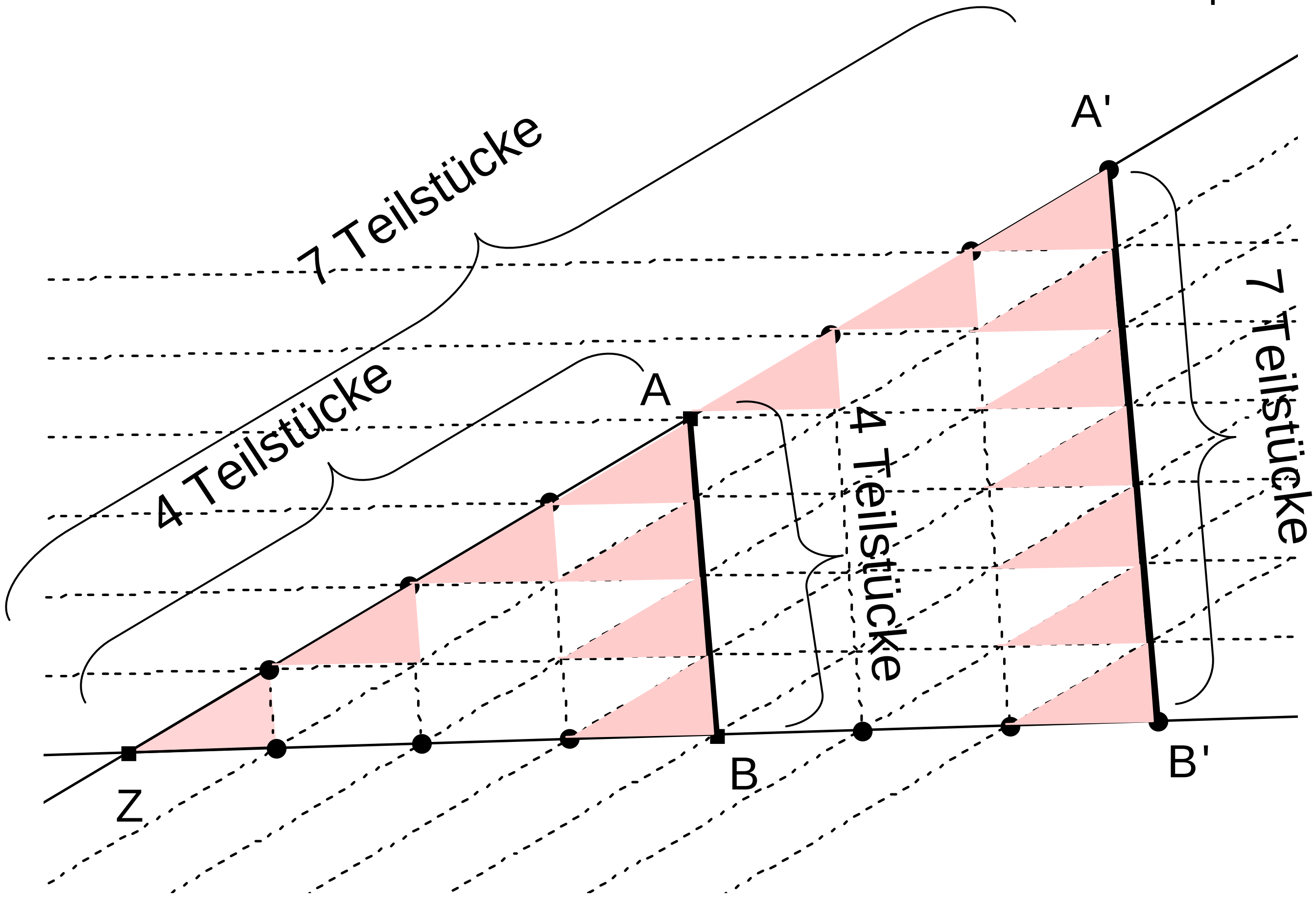


1.Fall: A,B liegen auf einer Geraden g durch Z

$$|\overline{A'B'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZA'}| = k\,|\overline{ZB}| - k\,|\overline{ZA}| = k(|\overline{ZB}| - |\overline{ZA}|) = k\,|\overline{AB}|$$

2.Fall:

A,B liegen nicht auf einer Geraden g durch Z. Hier sei k= $\frac{7}{4}$



Aufgabe

Eine **zentrische Streckung** wird festgelegt durch Angabe des **Streckzentrums Z** und des **Streckfaktors k**.

Kann eine zentrische Streckung auch auf andere Art eindeutig festgelegt werden?

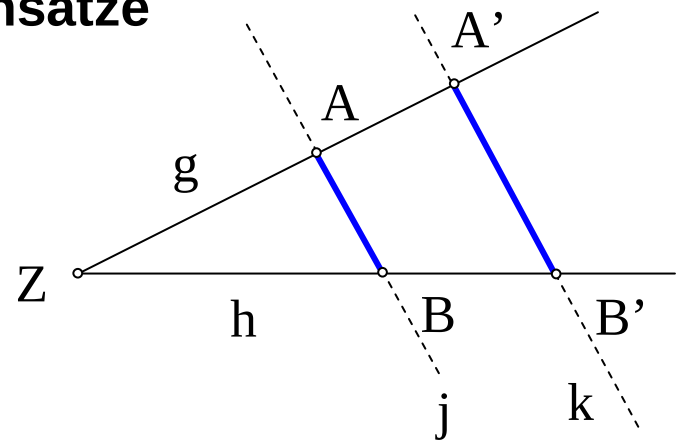
f sei eine zentrische Streckung .

Prüfen Sie, was zutrifft und begründen oder widerlegen Sie.

f wird eindeutig festgelegt durch

- Ein Punktepaar (P,P‘), $P \neq P'$,
- Zentrum Z und ein Punktepaar (P,P‘), $P \neq P'$,
- zwei Punktepaare (P,P‘) , (Q,Q‘) , $P \neq Q$,
- drei Punktepaare (P,P‘) , (Q,Q‘) , (R,R‘), P, Q, R nicht auf einer Geraden.

7.2 Strahlensätze



$g \cap h = \{Z\}$
$g \cap j = \{A\}$; $g \cap k = \{A'\}$;
$h \cap j = \{B\}$, $h \cap k = \{B'\}$

Satz 4.2

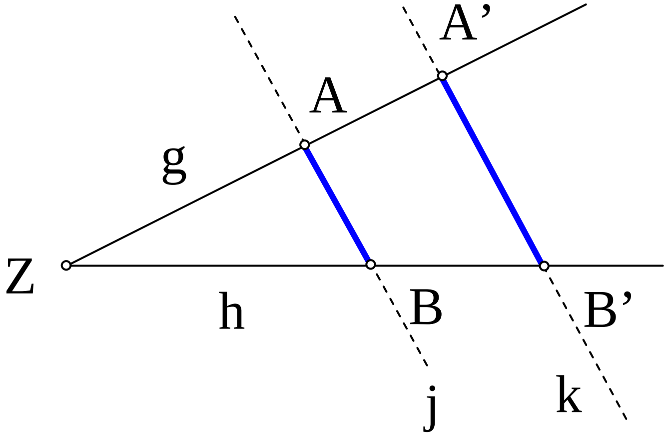
1.Strahlensatz:

Ist j || k, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ und $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ oder $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$, so ist j || k .

Beweis Strahlensatz



Durch $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ wird eine zentrische Streckung definiert.

Das Bild von B unter dieser Streckung sei B~.
Dann ist A‘B~ || AB.

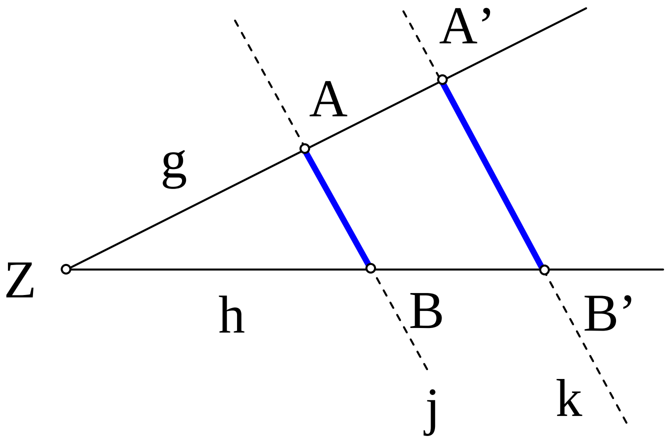
Aus A‘B‘ || AB folgt A‘B‘ || A‘B~ , also B‘=B~ und damit auch $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

Beweis Umkehrung

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = k$$

$\Rightarrow$ A und B werden durch zentrische Streckung mit Faktor k auf A‘ und B‘ abgebildet.

$\Rightarrow$ AB || A‘B‘.



$g \cap h = \{Z\}$

$g \cap j = \{A\}$; $g \cap k = \{A'\}$;

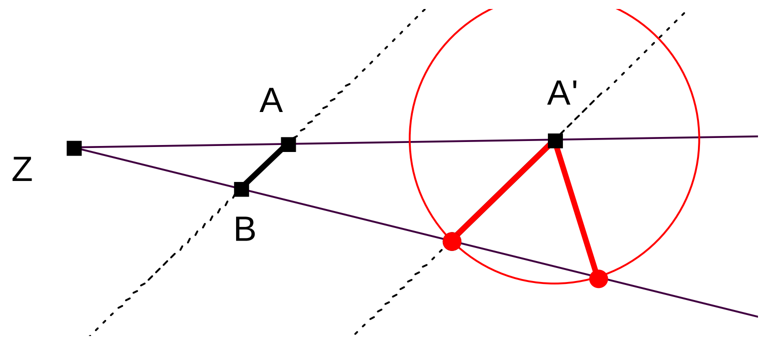
$h \cap j = \{B\}$, $h \cap k = \{B'\}$

Satz 7.2

2.Strahlensatz:

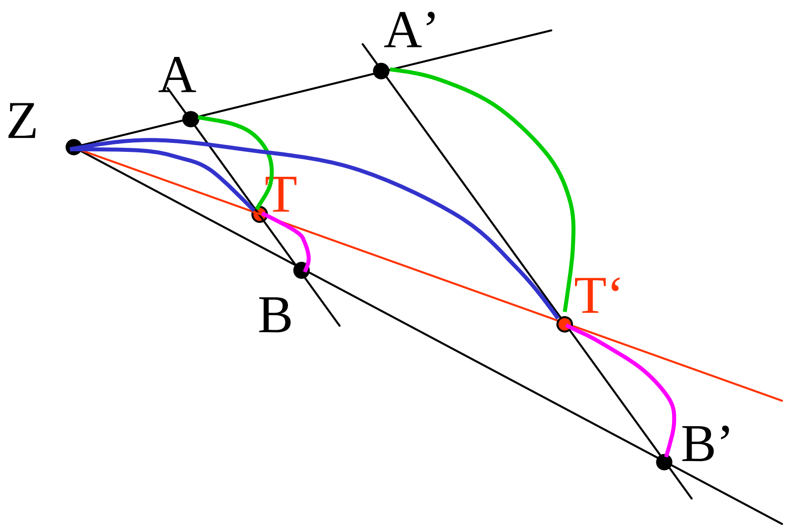
Ist j || k, so ist $\dfrac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \dfrac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$.

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar!



Teilverhältnistreue

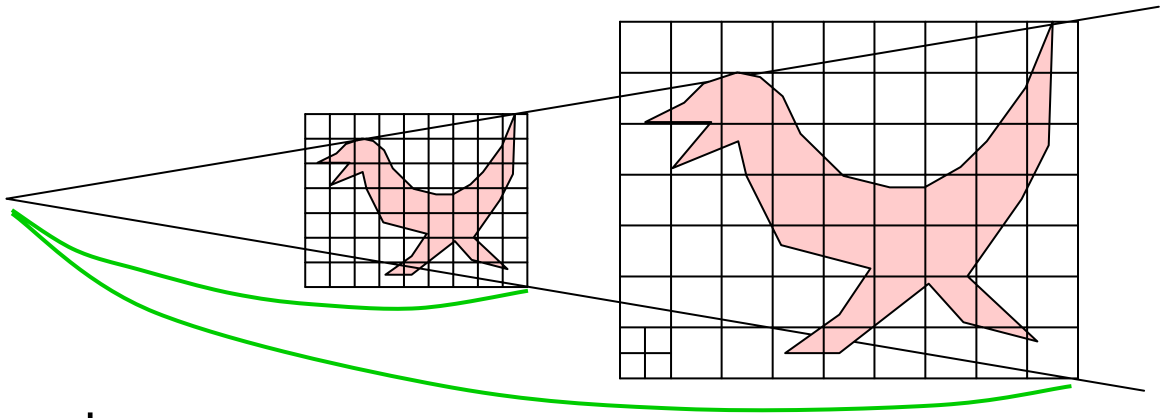
Satz 7.3
Drei Punkte A,B,T einer Geraden g werden durch zentrische Streckung auf die Punkte A',B',T' der Geraden g' abgebildet. Dann gilt:
Ist $|\overline{AT}| =$ r·$|\overline{TB}|$, so ist auch $|\overline{A'T'}| =$ r·$|\overline{T'B'}|$.



$$\frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{AT}|} = \frac{|\overline{ZT'}|}{|\overline{ZT}|} = \frac{|\overline{T'B'}|}{|\overline{TB}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{T'B'}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = r$$

7.3 Flächeninhalt und Volumen bei zentrischer Streckung

Satz 7.4
Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k wird
- jede Fläche auf eine Fläche mit k^2 fachem Inhalt abgebildet,
- jeder Körper auf einen Körper mit k^3 fachem Volumen abgebildet.



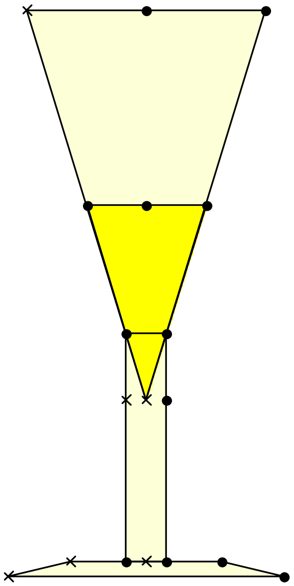
$k \approx 2$

Anwendung
Massiver Körper auf das k-fache vergrößert:
Volumen und Gewicht nehmen auf das k^3-fache zu.

Bei massiver Gipsfigur Höhe verdoppelt „ohne die Form zu ändern“ :
Gewicht nimmt auf das 8-fache zu.

Aufgabe

Ein Sektkelch (exakte Kegelform) ist bis zur halben Höhe gefüllt. Wie viel könnte man noch nachgießen bis er randvoll wäre?

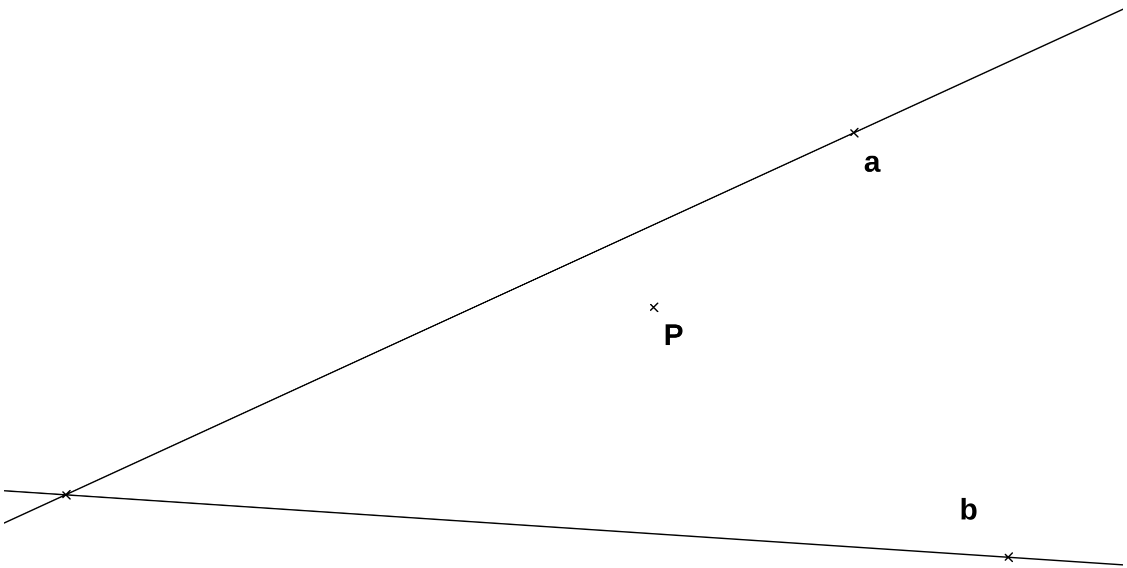


Bis zu welcher Höhe muss man das Glas füllen, wenn man nur doppelt so viel wie zuvor im Glas haben will?

Aufgabe

Im Winkelfeld zweier Geraden a und b liegt ein Punkt P. Man konstruiere Geraden g durch P, die a in A und b in B schneiden und für die gilt: AP : PB = 2 : 3.

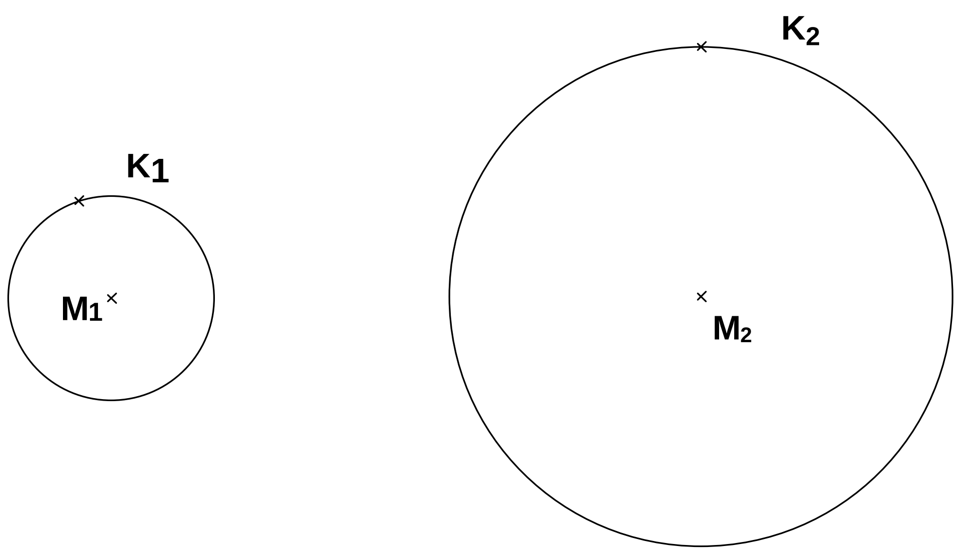
Hinweis: Lösen Sie zuerst die Aufgabe so, dass P die Strecke AB halbiert.



Aufgabe

Zeige, dass je zwei Kreise mit verschiedenen Radien durch zentrische Streckungen aufeinander abgebildet werden können.

Gilt das auch für je zwei Quadrate oder zwei gleichseitige Dreiecke?



7.6 Die Gruppe (Ä, ∘) aller Ähnlichkeitsabbildungen der Ebene

Ä = Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen $E \to E$;
∘ = „Hintereinanderausführung“

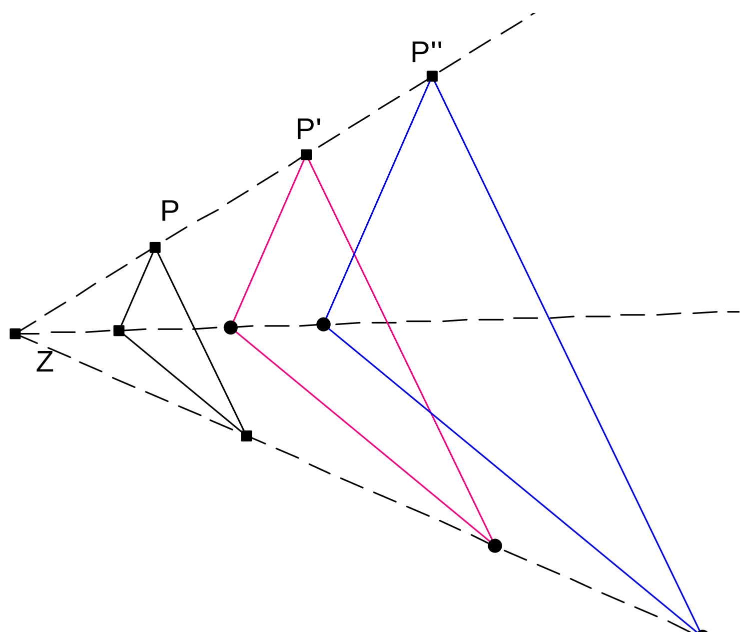
Satz 7.7
(Ä, ∘) ist eine (unendliche) Gruppe.
(K, ∘) ist eine Untergruppe von (Ä, ∘).

Beweis
- **Ä** ist **abgeschlossen** unter **o**
- **Assoziativgesetz** gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- „id“ (die identische Abbildung) ist **neutrales** Element; id ∈ **Ä**
- mit jedem f ∈ **Ä** ist auch das **inverse** Element f^{-1} ∈ **Ä**

7.4 Hintereinanderausführen von zentrischen Streckungen

(a) Gleiches Streckzentrum

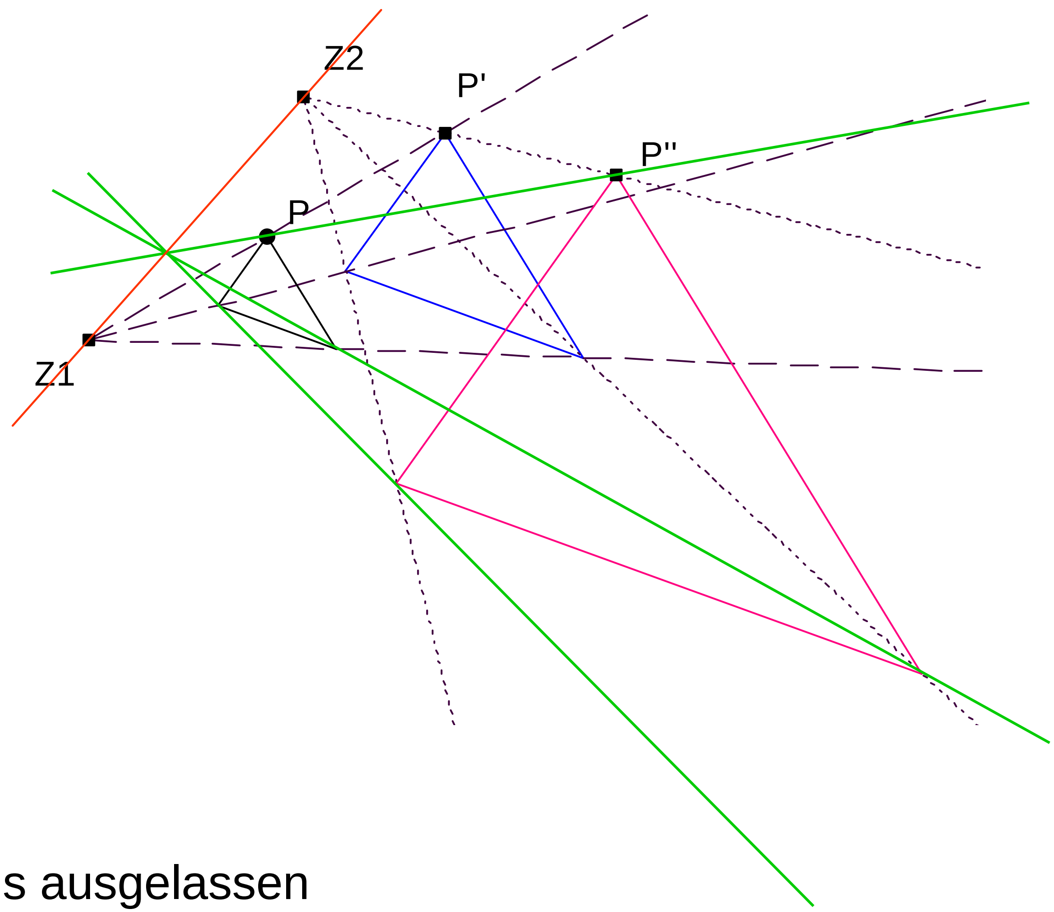
Satz 7.5 (a)
Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit gemeinsamem Streckzentrum Z und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z, Streckfaktor $k_1 \cdot k_2$.



Hintereinanderaus-führung 1

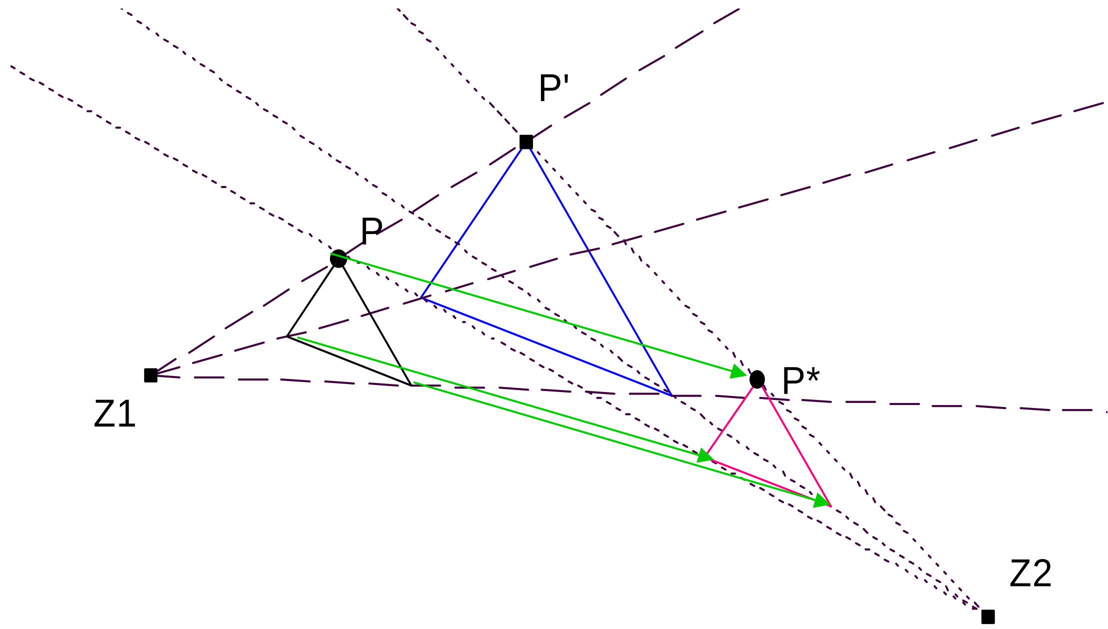
(b) Verschiedene Streckzentren

Fall 1: $k_1 \cdot k_2 \neq 1$



Exakter Beweis ausgelassen

Fall 2: $k_1 \cdot k_2 = 1$



Satz 7.5 (b)

Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit verschiedenen Streckzentren und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen

- durch eine **zentrische Streckung**, falls $\mathbf{k_1 \cdot k_2 \neq 1}$,(Zentrum auf Z_1Z_2)
- durch eine **Verschiebung**, falls $\mathbf{k_1 \cdot k_2 = 1}$ (Verschiebung || Z_1Z_2)

7.5 Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 7.2

Eine Abbildung f: E→E heißt Ähnlichkeitsabbildung
⇔ f ist bijektiv, geradentreu und winkeltreu

Wie kann man Ähnlichkeitsabbildungen charakterisieren?

Satz 7.6

Jede Ähnlichkeitsabbildung kann man als Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung darstellen.

Beweisidee:

Begründe zuerst wieder, dass bijektive, geradentreue und winkeltreue Abbildungen durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig festgelegt sind.