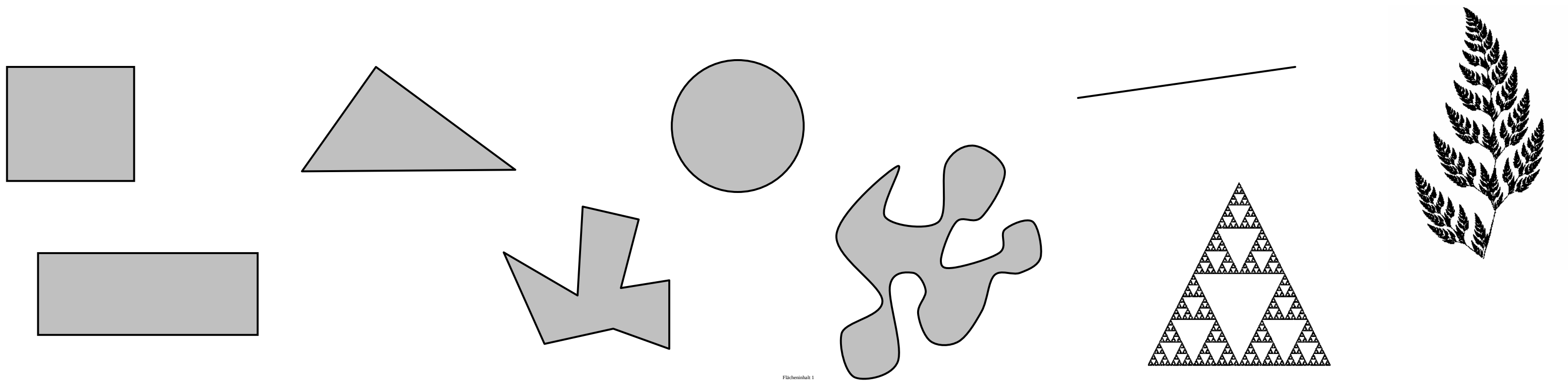
Kapitel 6: Der Flächeninhalt

- Flächeninhalt einer Figur soll etwas über deren Größe aussagen
- Flächeninhaltsbegriff intuitiv „irgendwie klar“,
- ab der Grundschule durch Auslegen von Figuren mit Plättchen vorbereitet .
- Abgrenzung gegenüber einem anderen Begriff von Größe, dem Umfang einer Figur.

Definitionen des Flächeninhaltsbegriffs werden immer mehr verfeinert, durch den Messprozess festgelegt.

Welchen Figuren sind Sie bereit, einen „Flächeninhalt“ zuzusprechen?
Wie sollte der definiert und gemessen werden?



„Flächeninhalt bestimmen“ bedeutet :
Möglichst vielen Figuren F (Maß-)Zahl A(F) zuordnen.

Eigenschaften dieser Zuordnung:

1. $A(F) \geq 0$ für alle Figuren F,
2. $A(F_1 \cup F_2) = A(F_1) + A(F_2)$ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$,
3. $A(F) = A(F')$ F’ kongruent zu F,
4. $A(Q_e) = 1$ Q_e beliebig gewähltes „Einheitsquadrat“

Theorie solcher Messprozesse in der Mathematik →
„Maßtheorie“, Teilgebiet der Analysis

Hier
- nur die in der Schulmathematik wichtigen Figuren behandelt,
- an einigen Beispielen angewandt ,
- statt den Flächeninhalt zu definieren beschreibt man den Messprozess.

6.1 Flächeninhalt als Größe

- Im Alltagsgebrauch keine Figuren mit Flächeninhalt 0 akzeptiert (z.B. einzelne Punkte, Strecken)
- Ohne diese Flächen bilden die Flächeninhalte einen so genannten „Größenbereich“
(→ Vorlesung über Größenbereiche).

In einem Größenbereich G sind Addition **+** und Kleiner-Relation **<** erklärt:

1.	$a + b = b + a$	Kommutativgesetz
2.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz
3.	entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$	Trichotomie
4.	$a < b \Leftrightarrow$ es gibt ein $c \in G$ mit $a + c = b$	eingeschränktes Lösbarkeitsgesetz

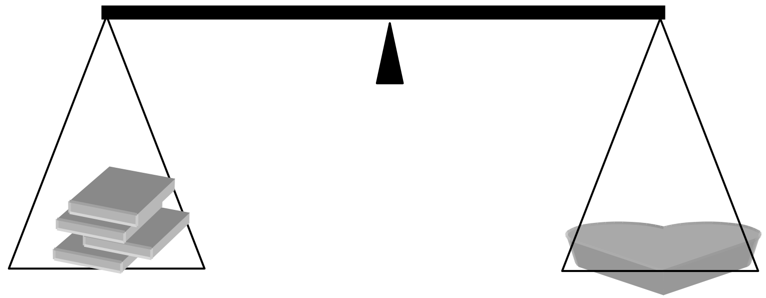
6.2 Der Messprozess

Physikalisches Modell:

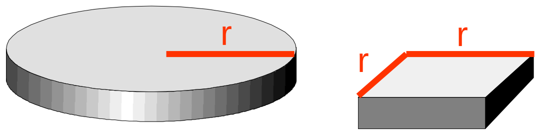
- „Figuren“ sind aus homogenem Material gleicher Dicke ausgeschnitten.
- Figuren haben gleichen Flächeninhalt wenn sie gleiches Gewicht haben.

Flächeninhalt von Figuren experimentell vergleichen:

- Figuren aus geeignetem Material herstellen und Gewicht vergleichen.
- Flächenmaßzahlen zuordnen durch Vergleichen mit dem Gewicht von Einheitsquadraten oder einem anderen passenden Quadrat.



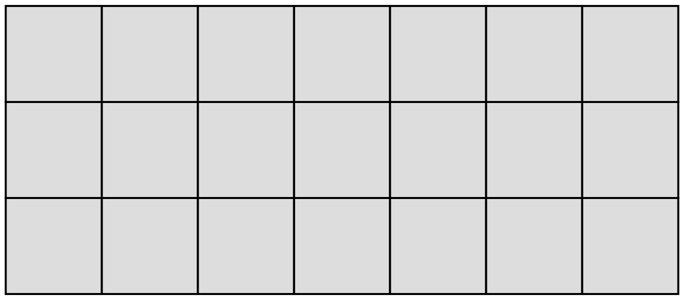
- Für die Schule eventuell:
  Flächeninhalt der Kreisfläche mit einem „Radiusquadrat“ vergleichen. Wie viel mal so schwer ist die Kreisfläche?



Mathematische Flächeninhaltsbegriffe

- **Auslegen** einer Fläche mit zueinander deckungsgleichen Figuren und Anzahlbestimmung
  ($\Rightarrow$ z.B. Inhaltsformel für Rechtecke, für die Schule geeignet und gebräuchlich).

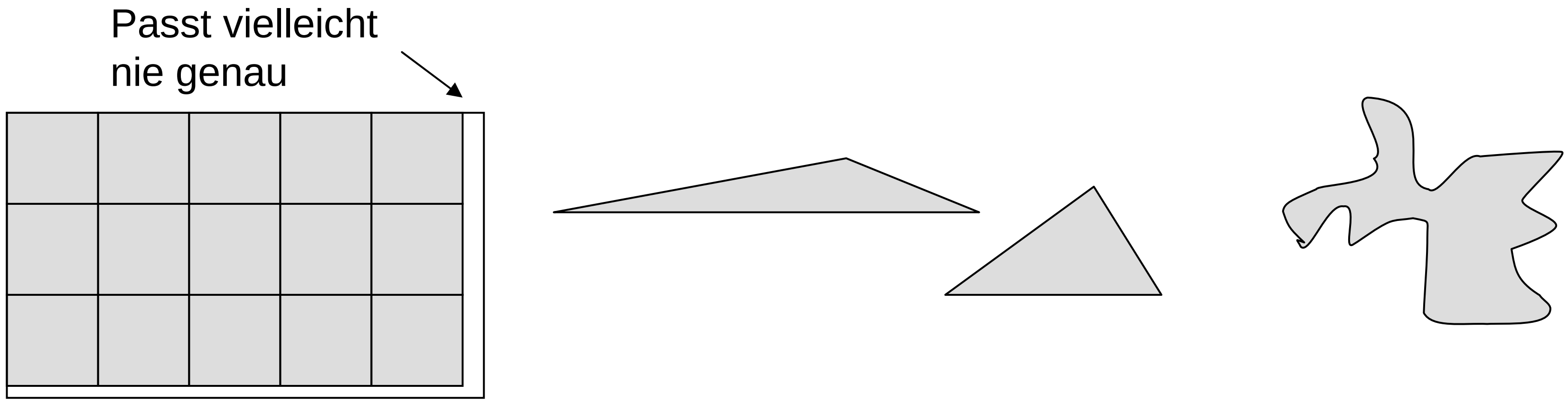
7 Quadrate im Streifen



3 Streifen

$3 \cdot 7$ Einheitsquadrate

- Grenzen des Messprozesses durch Auslegen:
  - Theoretisch problematisch bei Rechtecken mit Seiten, die zu denen des Einheitsquadrates inkommensurabel sind,
  - Vergleich beliebiger Dreiecke,
  - krummlinig begrenzte Figuren.



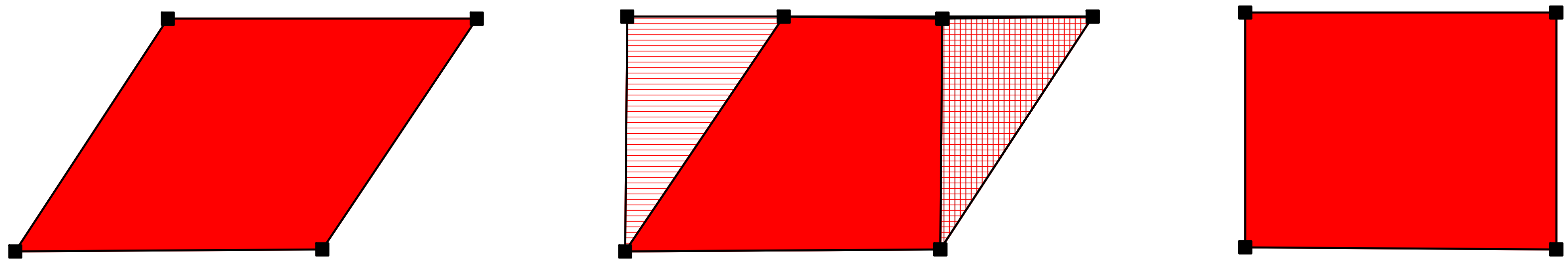
Begriffe **„Zerlegungsgleichheit“** und “ **Ergänzungsgleichheit**“ von Figuren.
Grenzprozesse durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere ($\Rightarrow$ z.B. Kreisfläche).

6.2.1 Zerlegungsgleich - ergänzungsgleich

Definition
Zwei Figuren sind **zerlegungsgleich** wenn sie sich in paarweise kongruente Figuren zerlegen lassen.

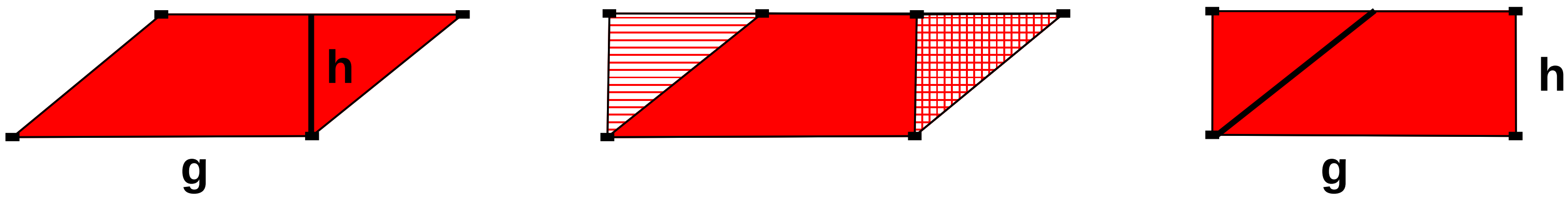
- **Zerlegungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

Beispiel: Flächeninhalt des Parallelogramms



Das Parallelogramm und das Rechteck sind zerlegungsgleich.

Flächeninhalt des Parallelogramms

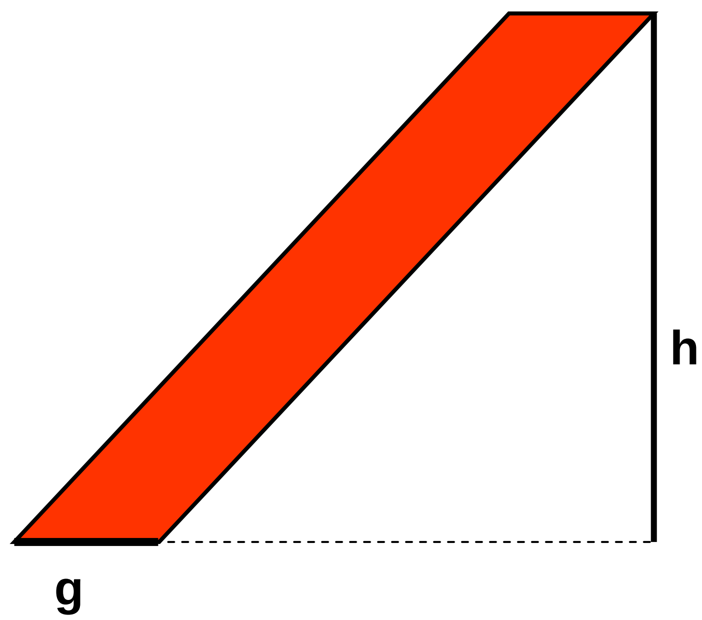


Diese Zerlegung zeigt: Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist das Produkt aus der Grundseite g und der Höhe h : $A = g \cdot h$.

Aufgabe

Gilt dies auch für das nebenstehende Parallelogramm?

Ist dieses auch zerlegungsgleich zu einem Rechteck mit den Seiten g und h?

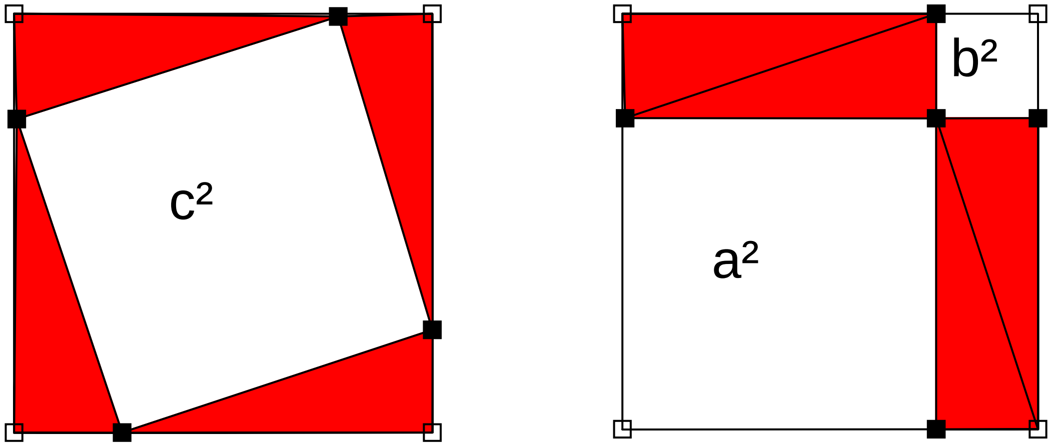


Definition

Zwei Figuren sind **ergänzungsgleich** wenn sie durch Ergänzung mit kongruenten Figuren zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden können.

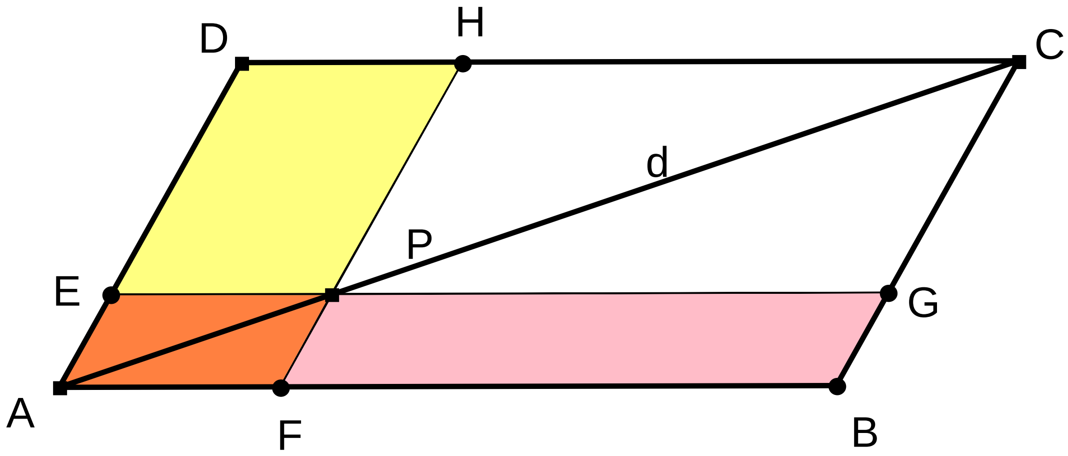
- **Ergänzungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

Beispiel: Pythagoras-Legebeweis



Die weißen Flächen sind ergänzungsgleich, denn sie können durch Ergänzung mit den vier paarweise kongruenten Dreiecken zu kongruenten Figuren (hier den Quadraten) ergänzt werden.

Satz vom Ergänzungsparallelogramm



Der Satz

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD und ein Punkt P auf der Diagonalen d=AC.

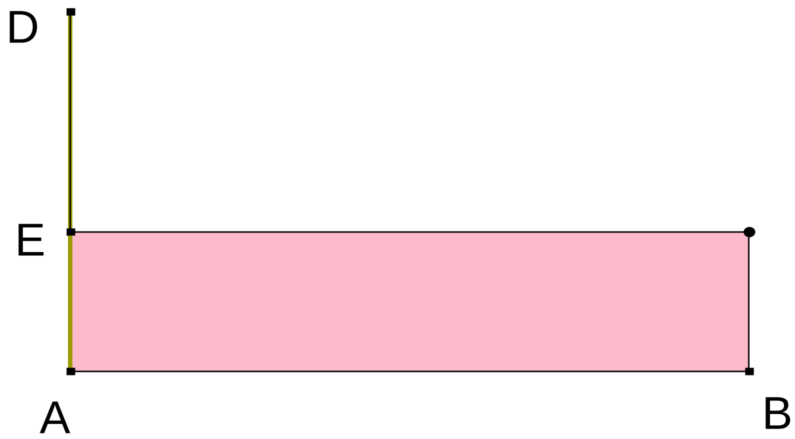
Durch P sind Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezeichnet. Dadurch entstehen zwei Parallelogramme EPHD (gelb) und FBGP (hellrot).

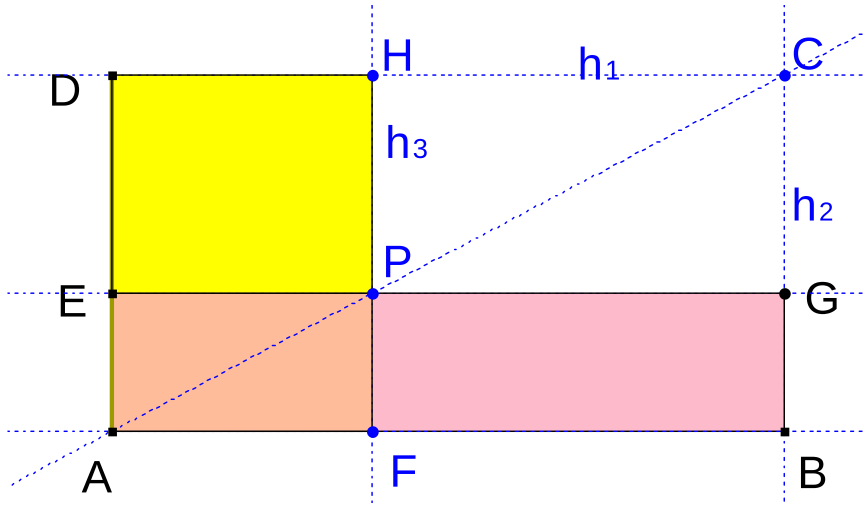
- Zeigen Sie, dass diese Parallelogramme den gleichen Flächeninhalt besitzen.
- Zeigen Sie, dass auch die Parallelogramme AFHD und ABGE den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Anwendung

Gegeben ist ein Rechteck ABGE (hellrot).

Es soll ein dazu flächengleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seite konstruiert werden.



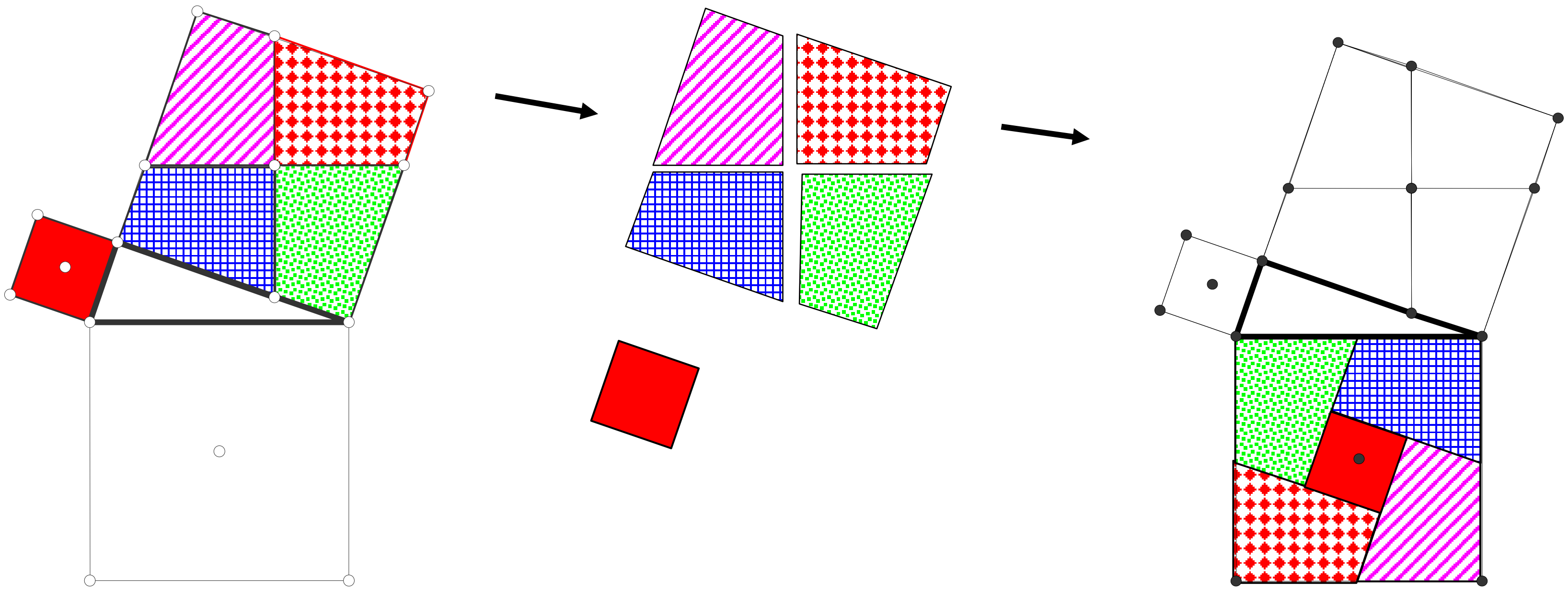


Konstruktion:

h_1 Parallele durch zu AB durch D,
C Schnittpunkt von h_1 und h_2,
h_3 Parallele zu AD durch P,
F Schnittpunkt von h_3 mit AB.

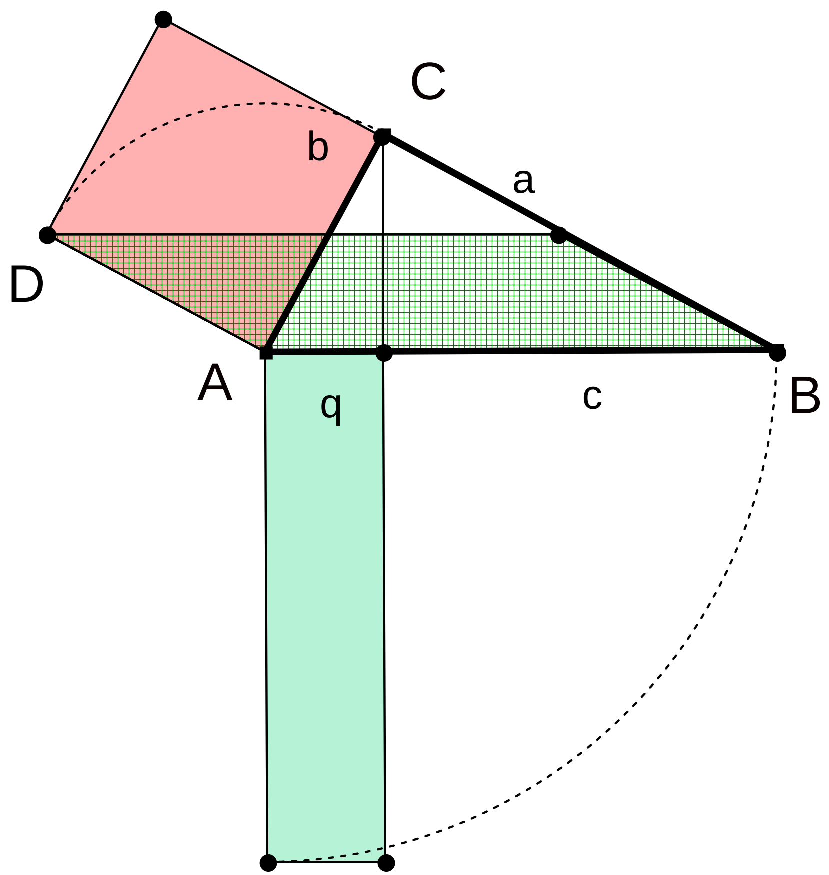
h_2 Parallele durch zu AD durch B,
P Schnittpunkt von AC mit GE,
H Schnittpunkt von h_3 mit DC.
AFHD ist das gesuchte Rechteck.

Pythagoras-Zerlegungsbeweis



Für die Schule als Puzzle geeignet, wenn man die Einteilung des Kathetenquadrats vorgibt.

Ein Beweis des Kathetensatzes



Wie ist wohl das karierte Parallelogramm konstruiert worden?

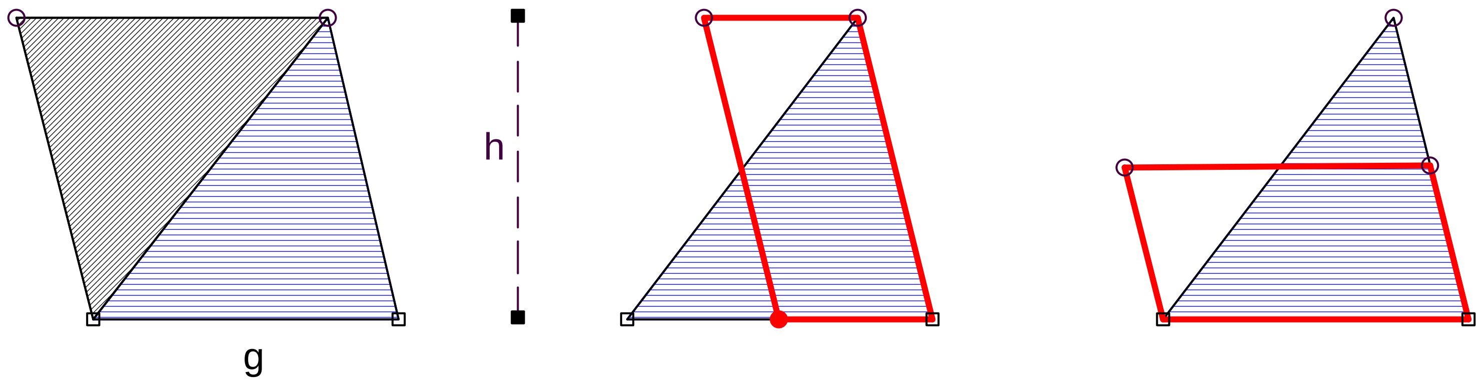
Wenn DA als Grundseite des Parallelogramms betrachtet wird, wie lang ist dann die zugehörige Höhe?

Was ist der Flächeninhalt des Parallelogramms?

Das Parallelogramm wird so um A gedreht, dass D auf C fällt. Um wie viel Grad?

Welcher Zusammenhang besteht mit dem Flächeninhalt des grünen Rechtecks?

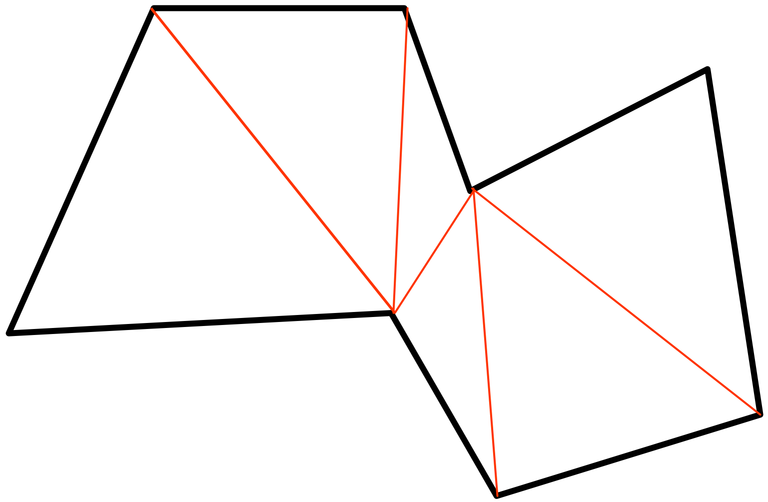
Dreiecksformeln und ihre geometrische Deutung



A= $\dfrac{gh}{2}$ A= $\dfrac{g}{2}h$ A= $g\dfrac{h}{2}$

Verschiedene Herleitungen führen zunächst zu verschiedenen Formen der Flächeninhaltsformeln → Termumformungen

6.2.2 Flächeninhalt von n-Ecken



Flächeninhalt?

Zerlegen in Dreiecke, Dreiecksflächen berechnen!

Triangulation

6.2.3 Flächeninhalt von Polygonen mit Zirkel und Lineal und durch Zerschneiden und Zusammenlegen

Aufgabe 1

Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal zu einem Rechteck mit den Seitenlängen $a = 5$ cm und $b = 7$ cm ein flächeninhaltsgleiches Quadrat.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal zu zwei Quadraten mit den Seitenlängen $a_1 = 3$ cm und $a_2 = 5$ cm ein Quadrat, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der beiden Quadrate ist.

Aufgabe 3

Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal zu einem Quadrat der Seitenlänge $a = 6$ cm ein flächeninhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite 1 cm beträgt.

Problem 1

Kann man ein Vieleck (Polygon) mit Zirkel und Lineal alleine umwandeln in

1. ein flächeninhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite eine Einheitsstrecke ist,
2. ein flächeninhaltsgleiches Quadrat?

Klar: Kann man Teil 1 lösen, dann ist Teil 2 sofort mit Hilfe des Kathetensatzes oder des Höhensatzes gelöst.

Problem 2

Kann man diese Umwandlung auch durch Zerschneiden und Zusammenlegen erreichen?

Problem 2 ist etwas schwieriger und wird daher zunächst zurückgestellt.

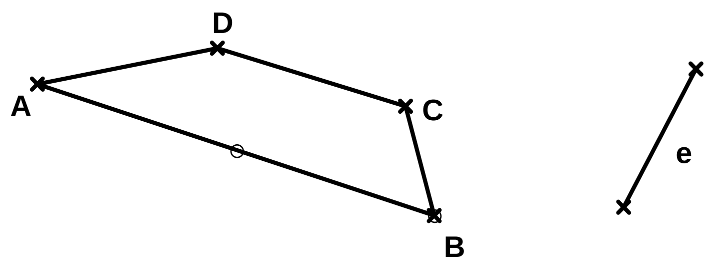
Werden diese Fragen positiv beantwortet, dann kann man alleine mit Hilfe von Zirkel und Lineal bzw. durch Zerschneiden den Flächeninhalt beliebiger Polygone vergleichen:

Entweder

- man wandelt beide in Rechtecke mit einer Einheitsseite um und vergleicht deren andere Seitenlängen,
- oder man verwandelt beide in jeweils flächengleiche Quadrate und vergleicht diese Quadrate.

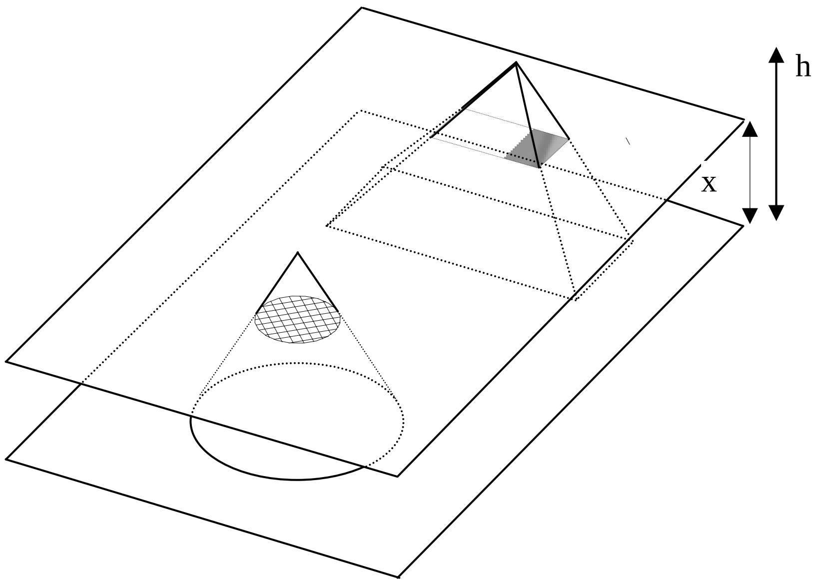
Aufgabe

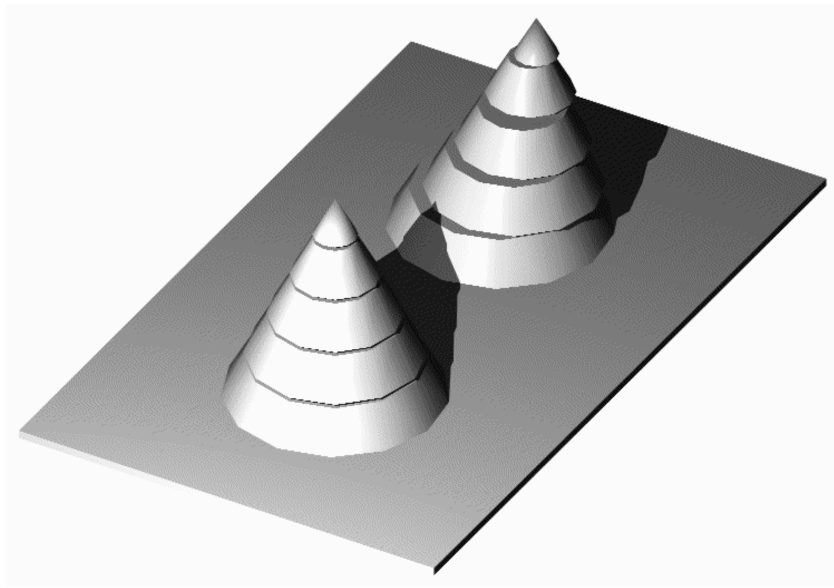
Wandeln sie das folgende Viereck in ein flächengleiches Rechteck mit der Strecke e als einer Seite um.



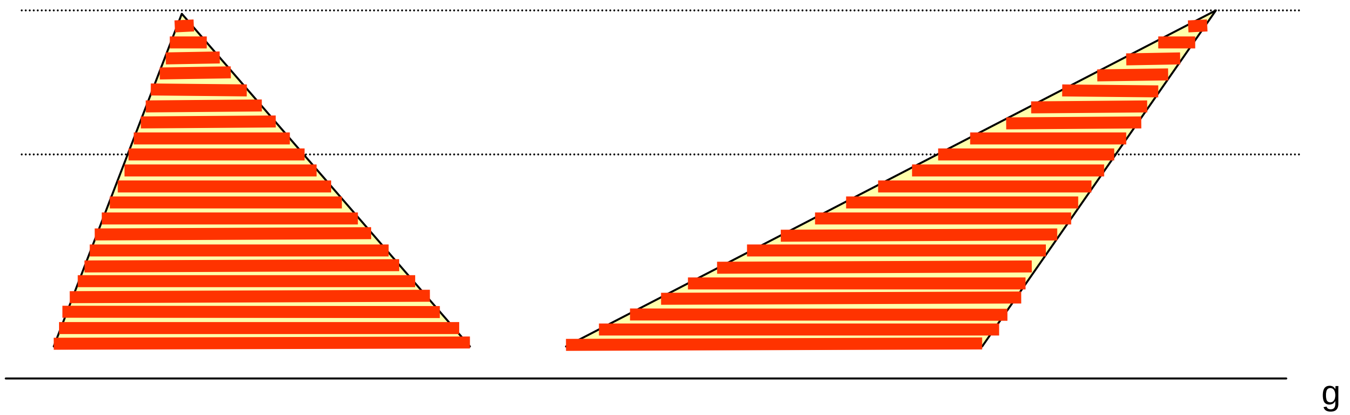
6.2.4 Das Prinzip von Cavalieri (1598 – 1647)

Satz von Cavalieri im Raum
Sind zwei Körper gleich hoch und ist in jeder Höhe die Schnittfläche bei beiden Körpern gleich groß, so haben die Körper dasselbe Volumen





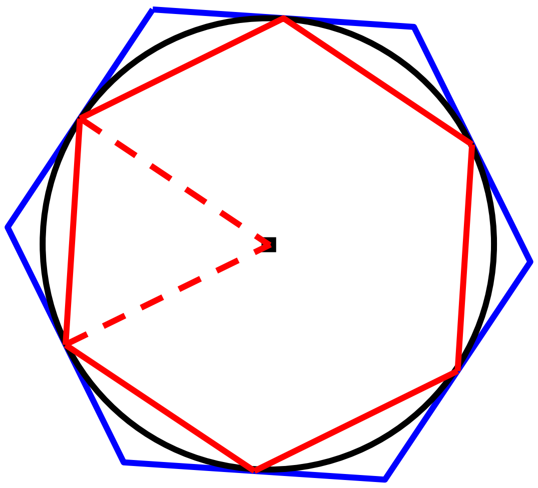
Satz von Cavalieri in der Ebene
Kann man eine Gerade g so zeichnen, dass jede Parallele zu dieser Geraden aus zwei Flächen stets zueinander gleichlange Strecken ausschneidet, so haben die Flächen denselben Inhalt**.**



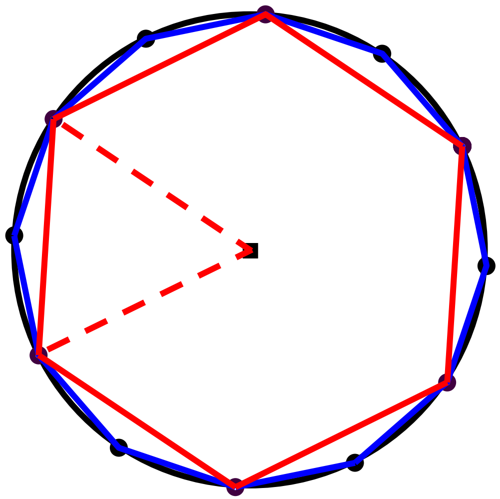
→ Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe haben den gleichen Flächeninhalt (Strahlensatz).

6.2.5 Grenzprozesse

Beispiel: Flächeninhalt des Kreises



Ein- und umbeschriebenes Sechseck

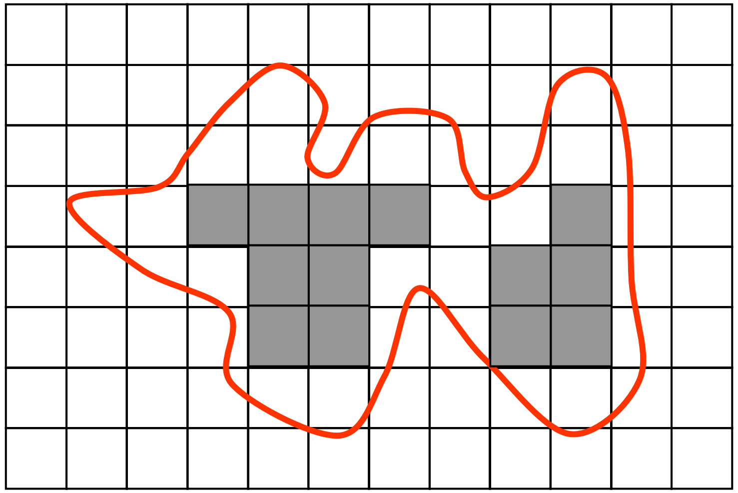


Einbeschriebenes Sechseck und Zwölfeck

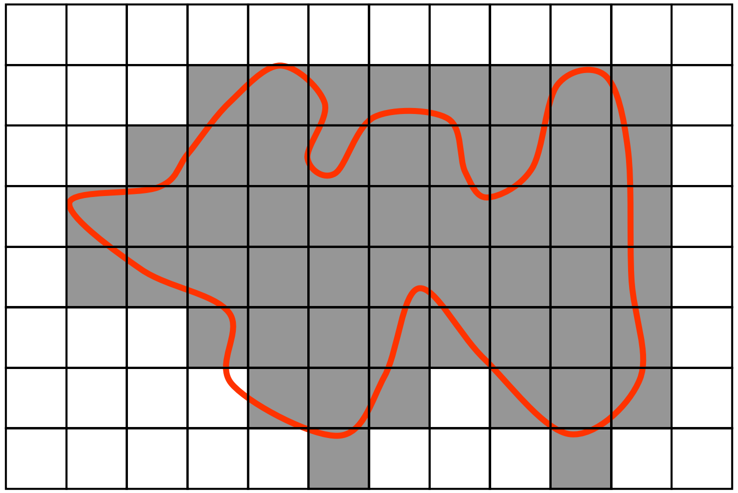
Annäherung durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke.
Für n $\to \infty$ nähern sich deren Flächeninhalte von unten bzw. oben einem gemeinsamen Wert.
Diesen Wert **definiert** man als den Flächeninhalt des Kreises.

Ganz beliebige Figur

Flächeninhalt A ?



$I_1 \leq A \leq U_1$



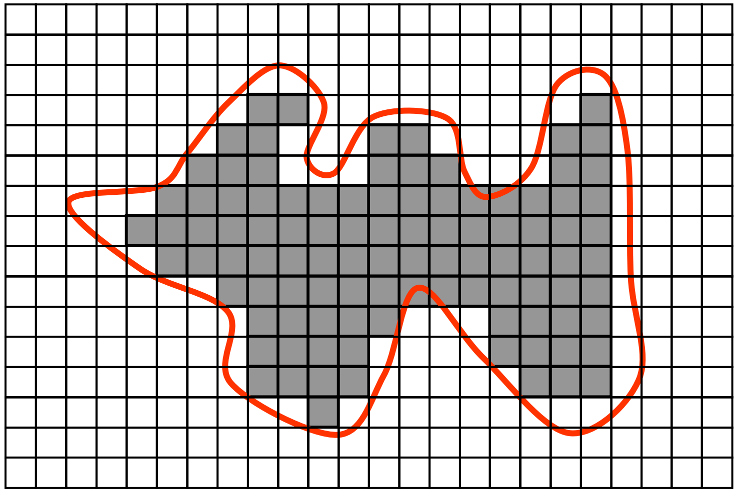
Gitterpapier drüber legen ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren

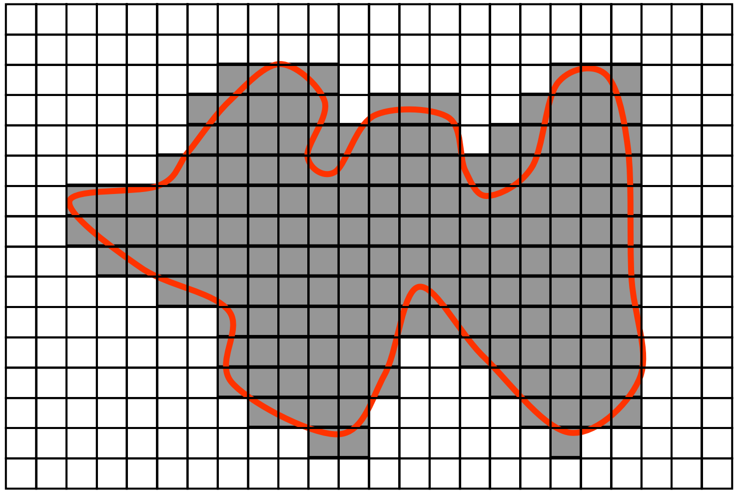
→ I_1

Kästchen außen zählen und addieren

→ U_1



$I_1 \leq I_2 \leq A \leq U_2 \leq U_1$



Kästchenlänge halbieren ...

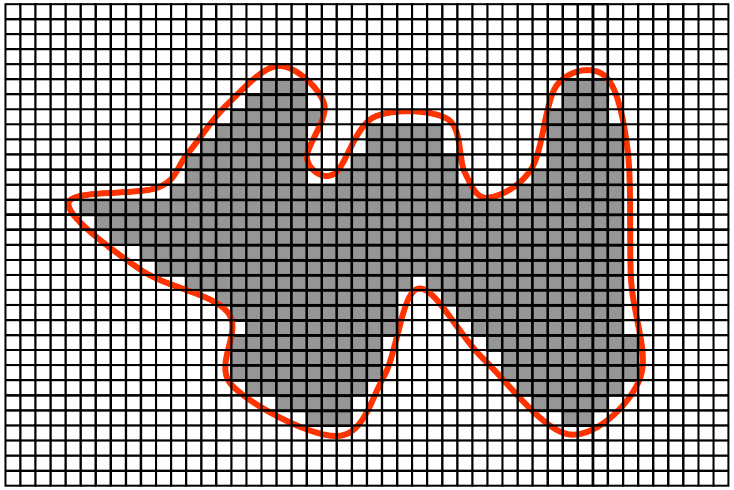
Kästchen im Inneren zählen und addieren

→ I_2

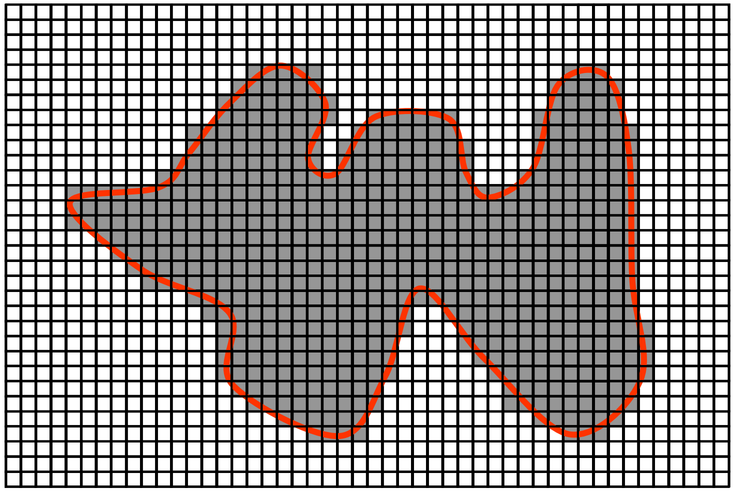
Kästchen außen zählen und addieren

→ U_2

Falls I_n und U_n sich dem gleichen Wert A nähern, dann ist das der Flächeninhalt der Figur.



$$I_1 \leq I_2 \leq I_4 \leq A \leq U_4 \leq U_2 \leq U_1$$



Kästchenlänge nochmals halbieren ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren
→ I_4

Kästchen außen zählen und addieren
→ U_4

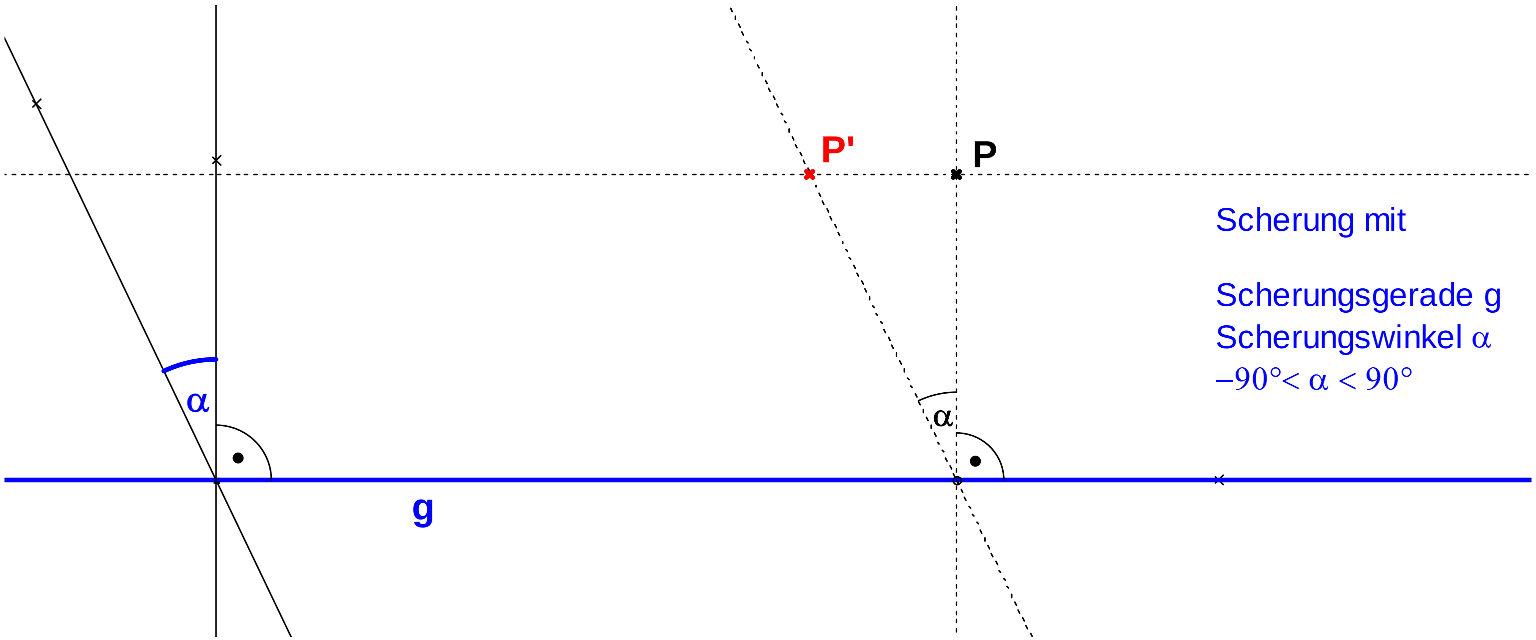
Intervallschachtelung für A

6.3 Die Scherung – eine flächentreue Abbildung

Der Beweis zum Kathetensatz legt die folgende Definition einer Abbildung der Ebene nahe.

Gegeben sind

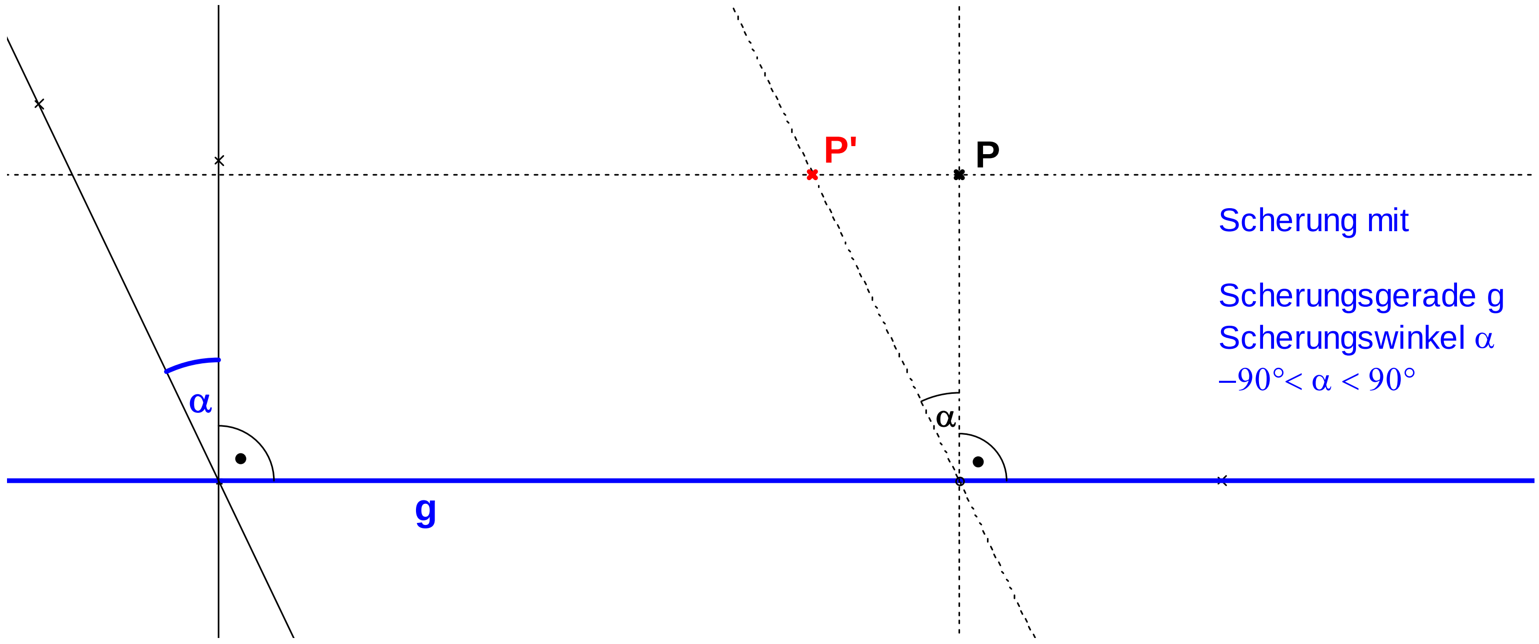
- eine Gerade g , (Scherungsgerade)
- ein Winkel α mit $-90° < \alpha < 90°$ (Scherungswinkel)



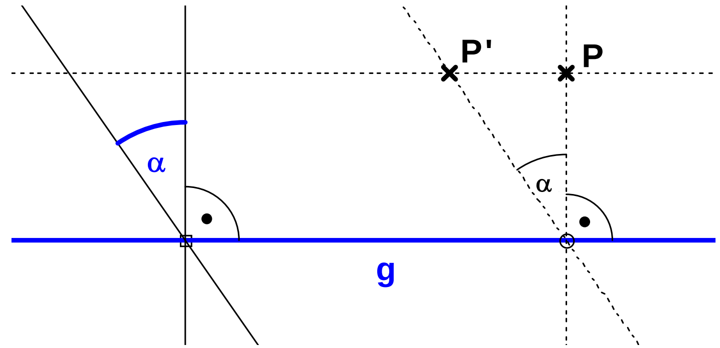
Abbildungsvorschrift:

$P \in g$: $P' = P$

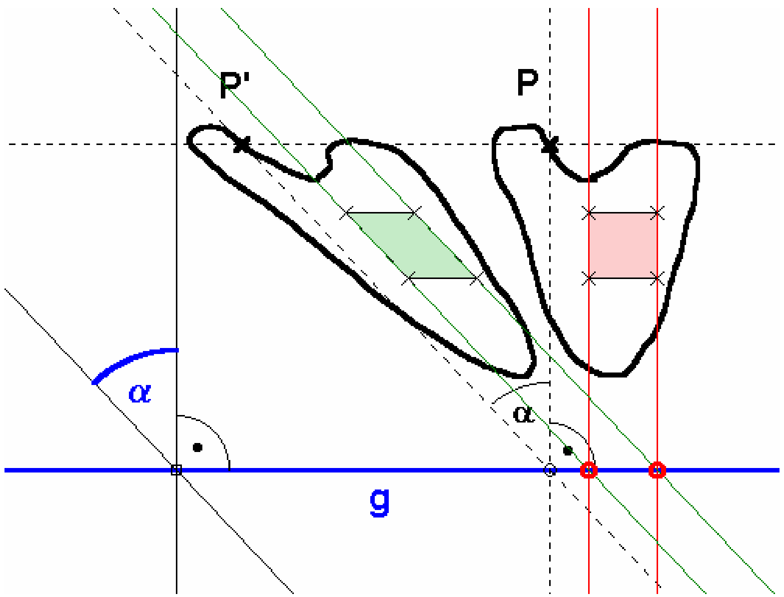
$P \notin g$: $\angle(P', F_P, P) = \alpha$, mit F_P Fußpunkt des Lotes von P auf **g.**



Eigenschaften der Scherung:



- Fixpunktgerade g,
- Fixgeraden sind alle Parallelen zu g,
- geradentreu,
- nicht längentreu, aber Strecken parallel zu g behalten ihre Länge,
- nicht winkeltreu,
- flächeninhaltstreu.



Der Flächeninhalt einer beliebigen Figur ergibt sich als Grenzwert von Quadraten mit immer kleineren Seitenlängen.

Diese Quadrate können so gewählt werden, dass 2 ihrer Seiten parallel zu g sind.

Der Flächeninhalt solcher Quadrate bleibt bei der Scherung erhalten.

6.4 Historische Bemerkungen

Im Altertum war es ein zentrales Anliegen der Geometrie, alle Konstruktionen exakt nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal durchzuführen.

Dieses Anliegen hat die geometrische Forschung über 2000 Jahre lang vorangetrieben, und die endgültigen Antworten auf die offenen Fragen sind nur etwas über 100 Jahre alt.

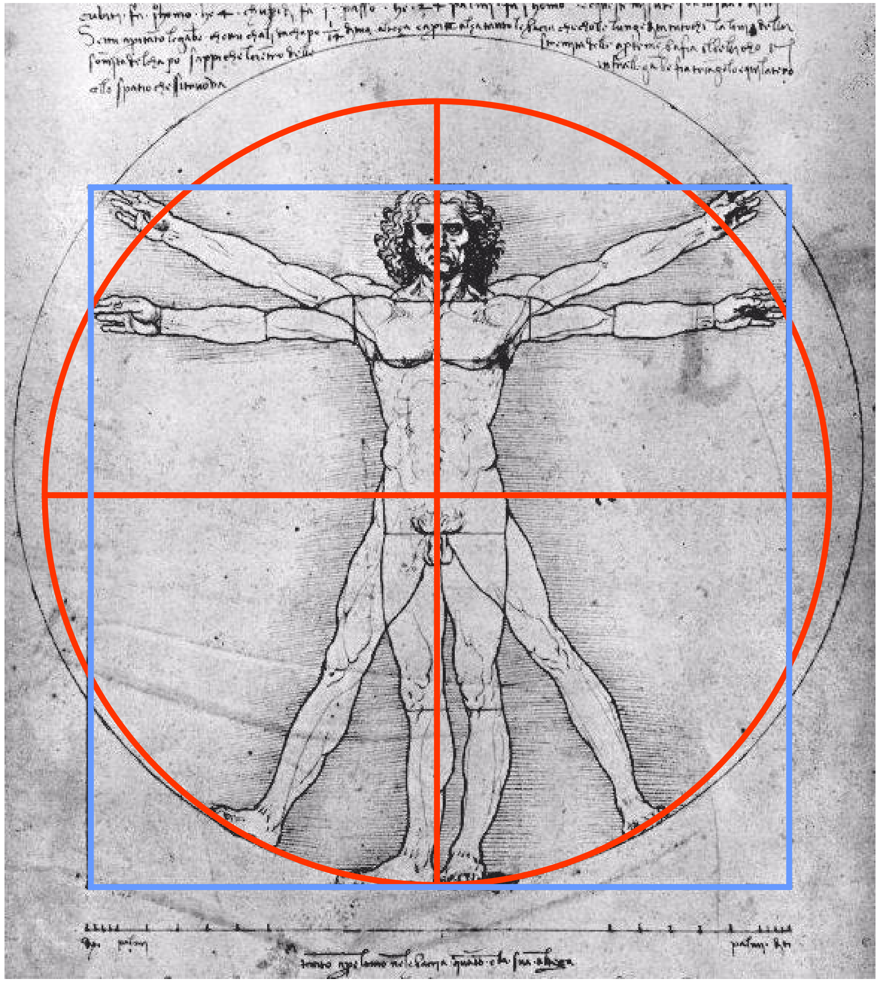
Der Grund für die Einschränkung der Hilfsmittel war philosophischer Natur, Näherungen für die in Frage stehenden Probleme waren seit alters her bekannt.

Hier sollen einige der klassischen Probleme kurz vorgestellt werden.

Quadratur des Kreises: Ein altes griechisches Problem

Konstruiere mit Zirkel und Lineal zu einem Kreis mit gegebenen Radius ein flächengleiches Quadrat.

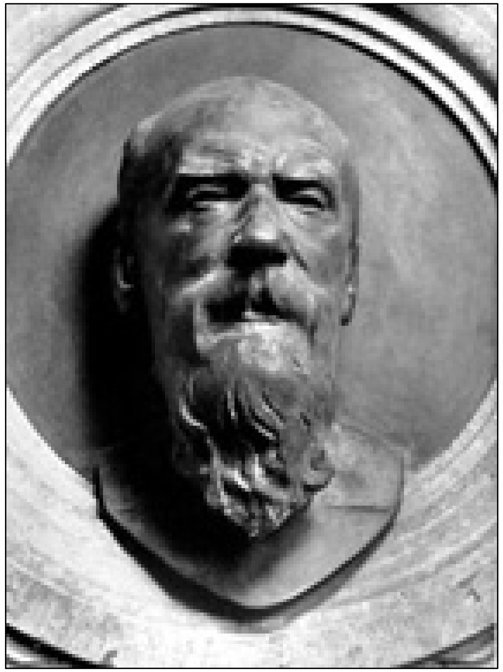
Leonardo da Vinci:
Studie zu den Proportionen am „idealen“ menschlichen Körper.
Quadraturproblem implizit dargestellt ?



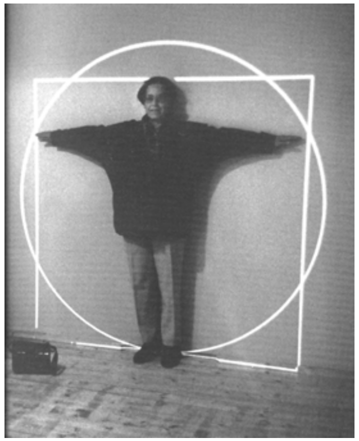
Kreis durch die Fingerspitzen der waagerecht ausgestreckten Arme und durch den zentralen großen Zeh.

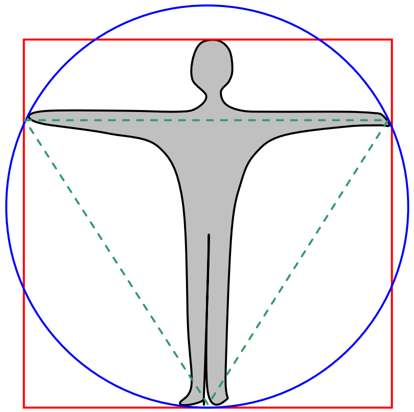
Fast gleicher Flächeninhalt wie das Quadrat aus Körperhöhe und Breite der ausgestreckten Arme.

Beweis für die Unmöglichkeit der „Quadratur des Kreises“ erst um 1870 gelungen (F.Lindemann)!

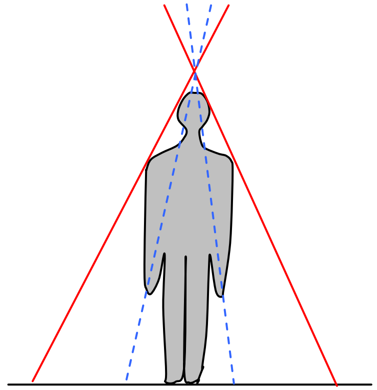


Phänomena“ 1984 in Zürich
Esoterischer Autor : Der Mensch ist die Lösung des Unlösbaren!

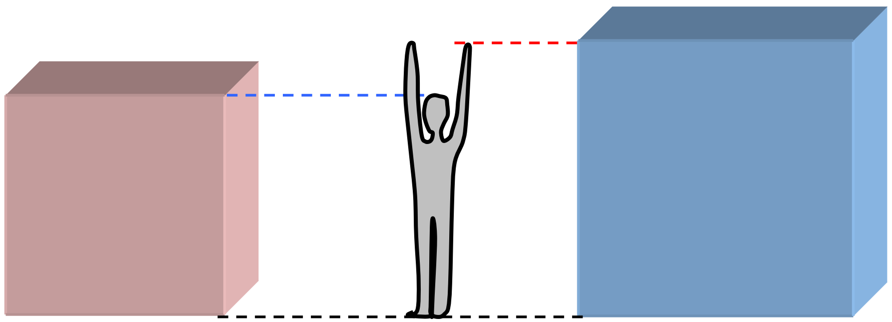




Quadratur des Kreises

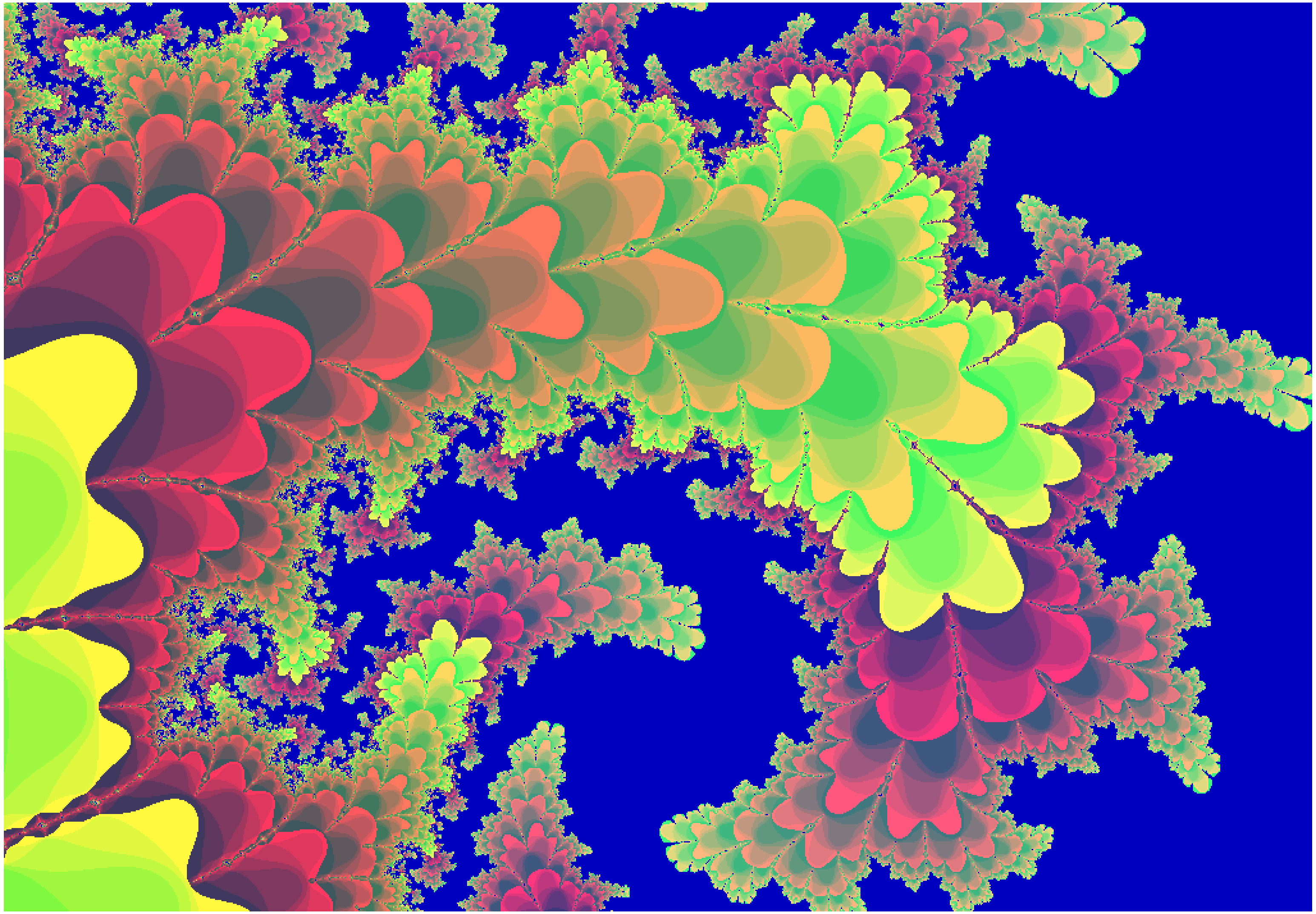


Winkeldrittelung



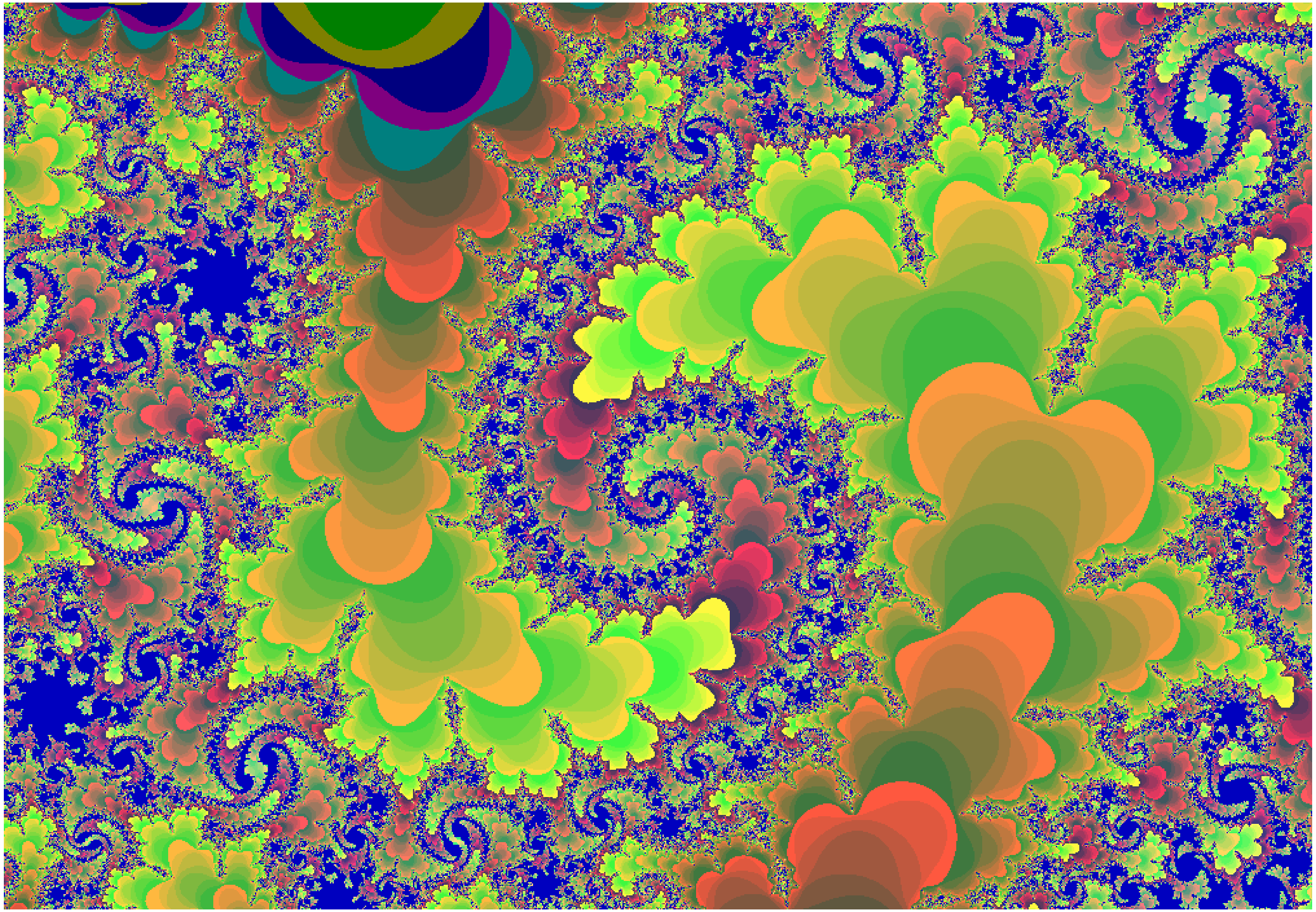
Würfelverdoppelung
(Delisches Problem)

Problematische Figuren: **Fraktale im 19./20. Jahrhundert**



Flächeninhalt der blauen Fläche?

Problematische Figuren: **Fraktale**



Flächeninhalt der blauen Fläche?