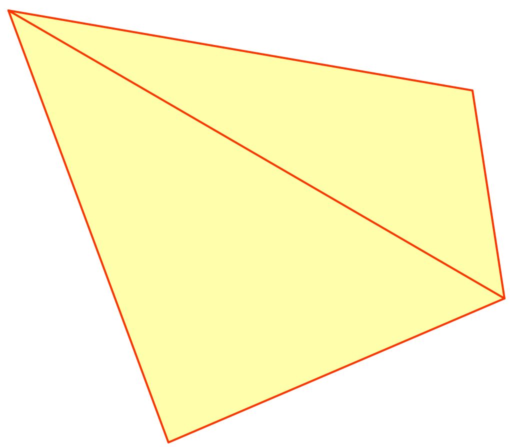
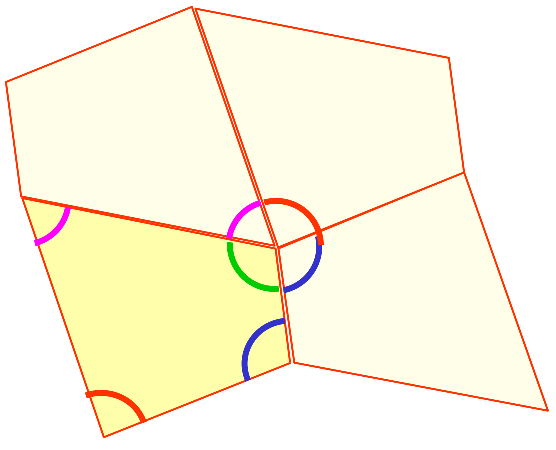
5.6 Winkelsumme im Viereck und in Vielecken: Neue Aspekte

Wiederholung:

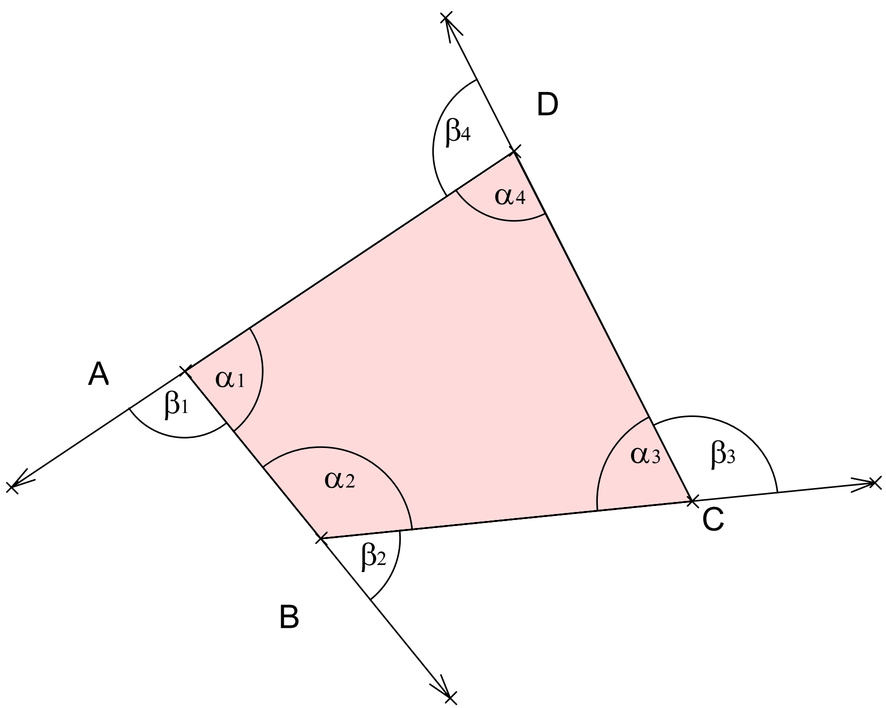
- Zerlegung in Dreiecke („Triangulation“)
- experimentell gewinnbar z.B. beim Parkettieren (Punktspiegelungen und Verschiebung)





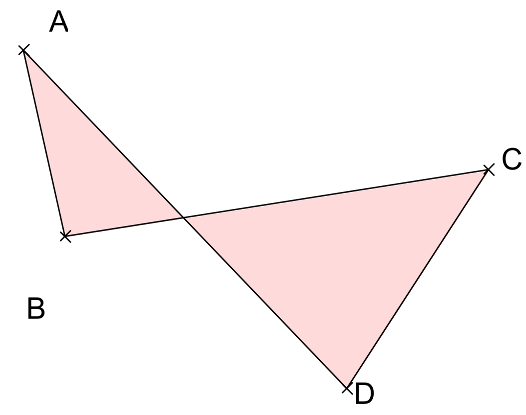
- Dynamischer Beweis

Wozu ein weiterer Beweis?
Neue Erkenntnisse? Umfassendere Sichtweise?

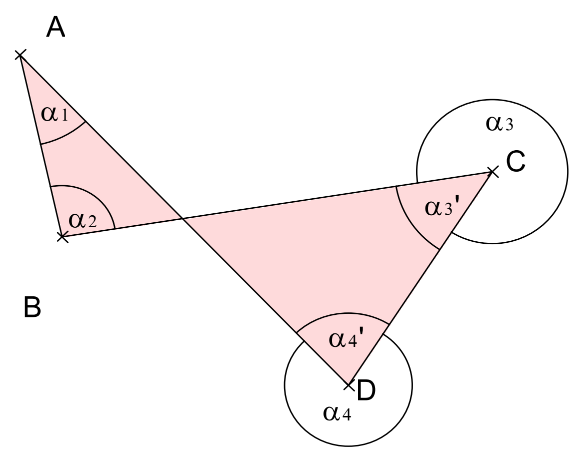


- Man durchläuft das Viereck vom Startpunkt A einmal im Gegenuhrzeigersinn.
- An jeder Ecke ändert man die Richtung um den Winkel β_i.
- Was kann man über die Summe der β_i sagen?
- Die Innenwinkel des Vierecks sind mit α_i bezeichnet.
- Benutzen Sie den Zusammenhang zwischen α_i und β_i um die Summe der α_i zu bestimmen.
- Übertragen Sie den Beweis auf n-Ecke.

Gilt der Winkelsummensatz auch für „überschlagene“ Vierecke?

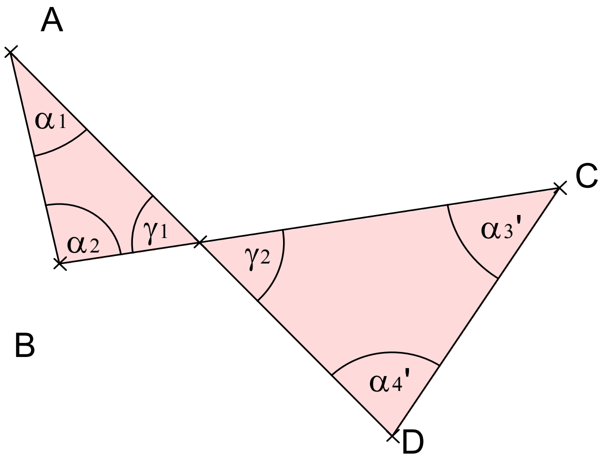


- Zunächst scheint das Beispiel zu zeigen, dass der Satz nicht mehr stimmt!
- Kann man ihn noch retten?
- Was sind hier eigentlich die Winkel im Viereck?



- Welche Vorzeichen sollten die Winkel α_3‘ und α_4‘ haben?
- Welche Winkelsumme ergibt sich, wenn man als Winkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3' + \alpha_4'$ verwendet?
- Welche Winkelsumme ergibt sich, wenn man statt dessen als Winkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ verwendet?

Winkelsummensatz unter Verwendung vorzeichenbehafteter Winkel.

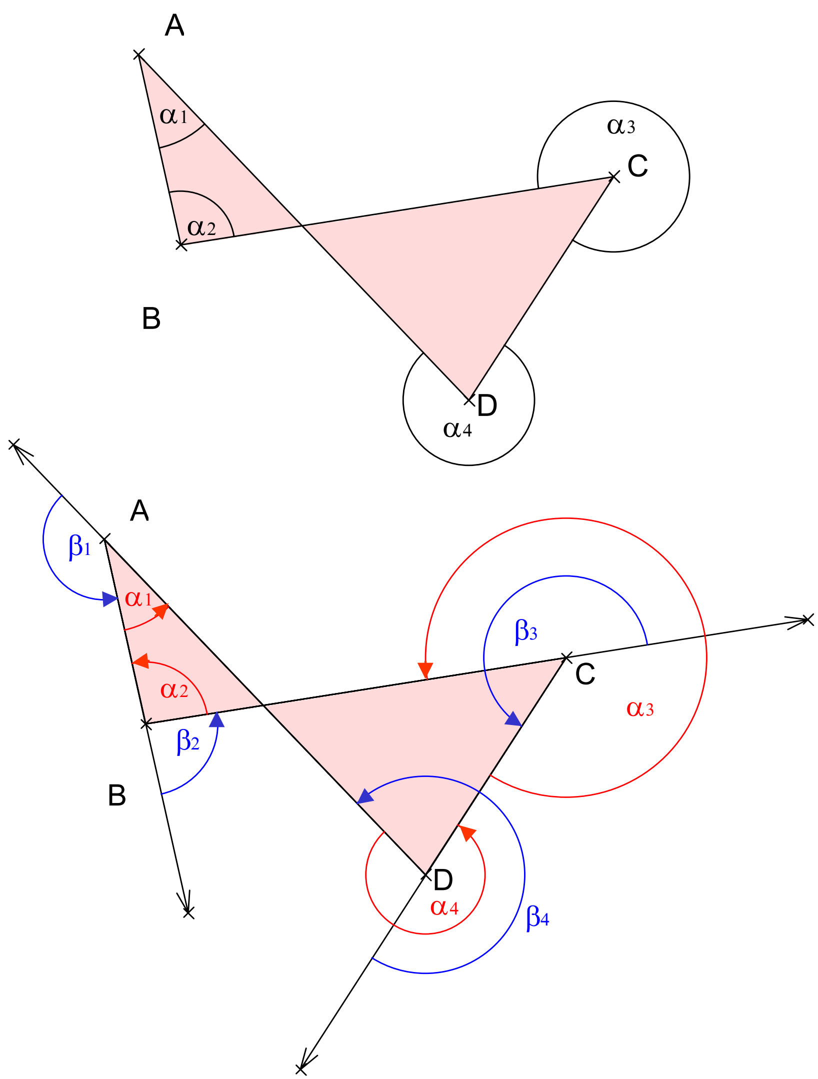


Zunächst vernachlässigen wir Winkelorientierungen. Man sieht, dass $\gamma_1 = \gamma_2$ ist.

Daraus folgt $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3‘ + \alpha_4‘$.

Werden die Winkel $\alpha_3‘$ und $\alpha_4‘$ wegen ihrer Orientierung mit negativen Werten versehen, dann erhält man als Winkelsumme 0.

Betrachtung nur von positiven Winkeln, im Gegenuhrzeigersinn orientiert



- Was ist die Summe der β_i?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Winkeln α_i und β_i?
- Was ergibt sich für die Summe der α_i ?

$$\sum \beta_i = 2 \cdot 360°$$

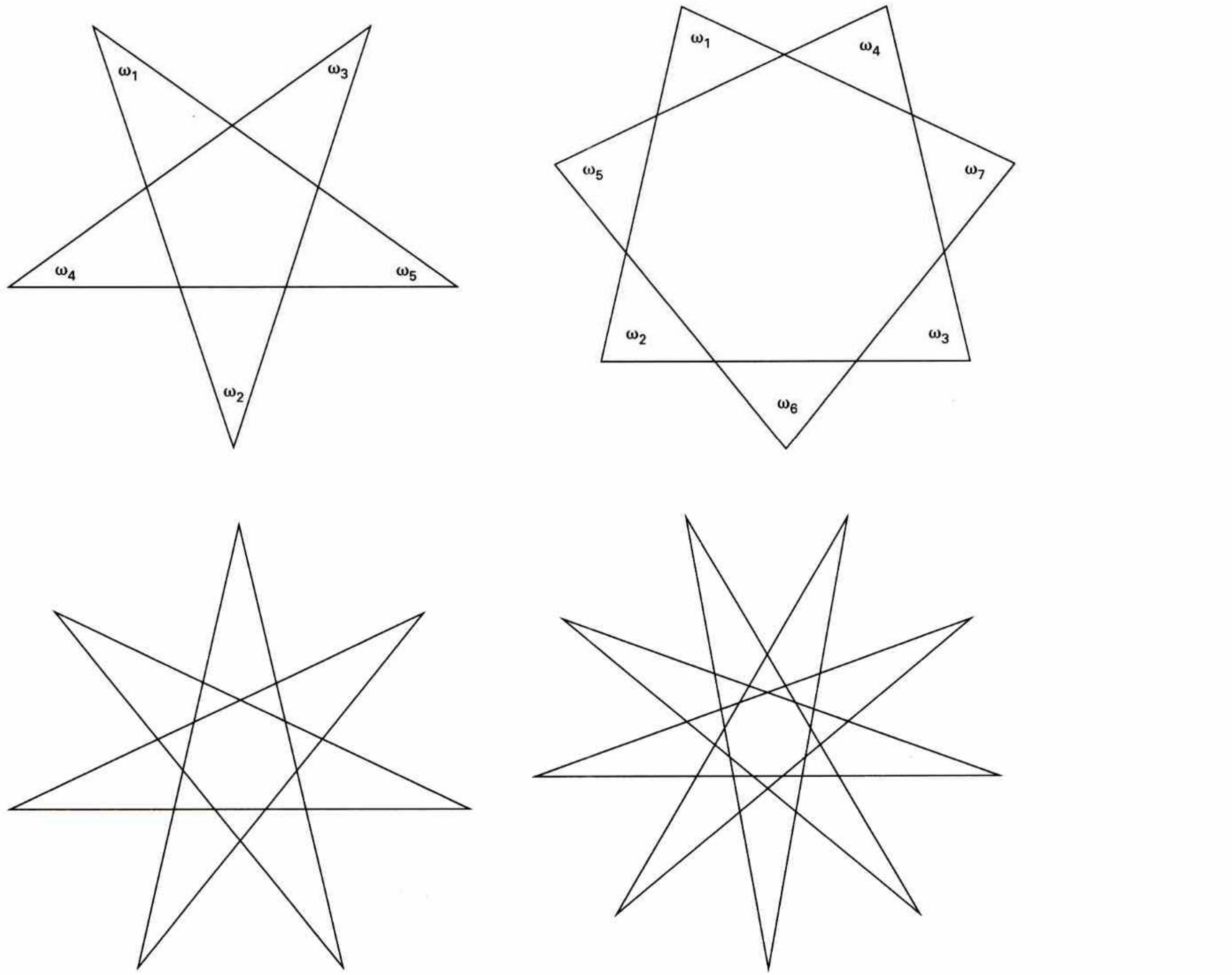
$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_1 &= 180° \\
\alpha_2 + \beta_2 &= 180° \\
\alpha_3 + \beta_3 &= 360° + 180° \\
\alpha_4 + \beta_4 &= 360° + 180° \\
\sum (\alpha_i + \beta_i) &= 2 \cdot 360° + 4 \cdot 180°
\end{aligned}$$

$$\sum \alpha_i = 4 \cdot 180° = 720°$$

Aufgabe aus dem Schweizer Mathbu.ch, 7. Schuljahr Original

Winkel in Sternfiguren

6.1 Wie stehts bei diesen Sternfiguren? Miss auch hier die Winkel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 … und bestimme die Winkelsumme.



Fortsetzung

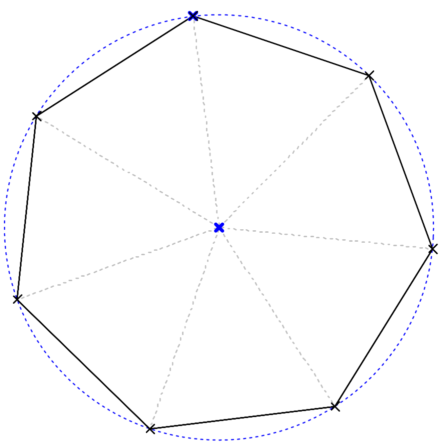
6.2 **A** Finde selber Winkel, mit denen Sternfiguren entstehen.

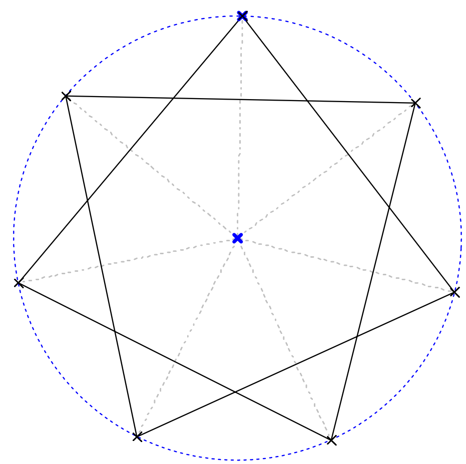
B Kannst du die Anzahl der Ecken der Sternfiguren voraussagen, wenn du den Winkel kennst?

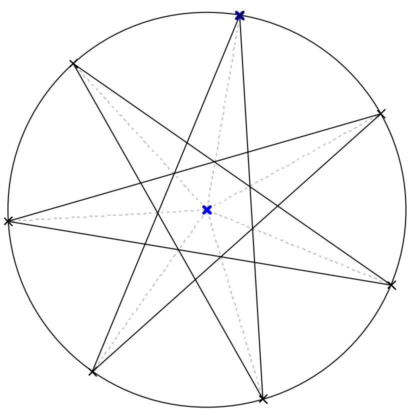
6.3 **A** Gibt es Winkel, bei denen nach dem oben beschriebenen Verfahren keine regulären Vielecke oder Sternfiguren entstehen?

B Was für Figuren entstehen dann?

7-Ecke mit DynaGeo: Was kann man hier wohl über die Winkelsumme sagen? → Experimente





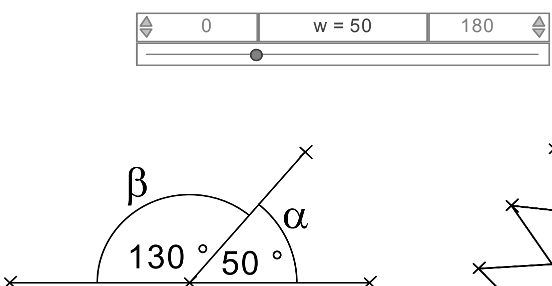


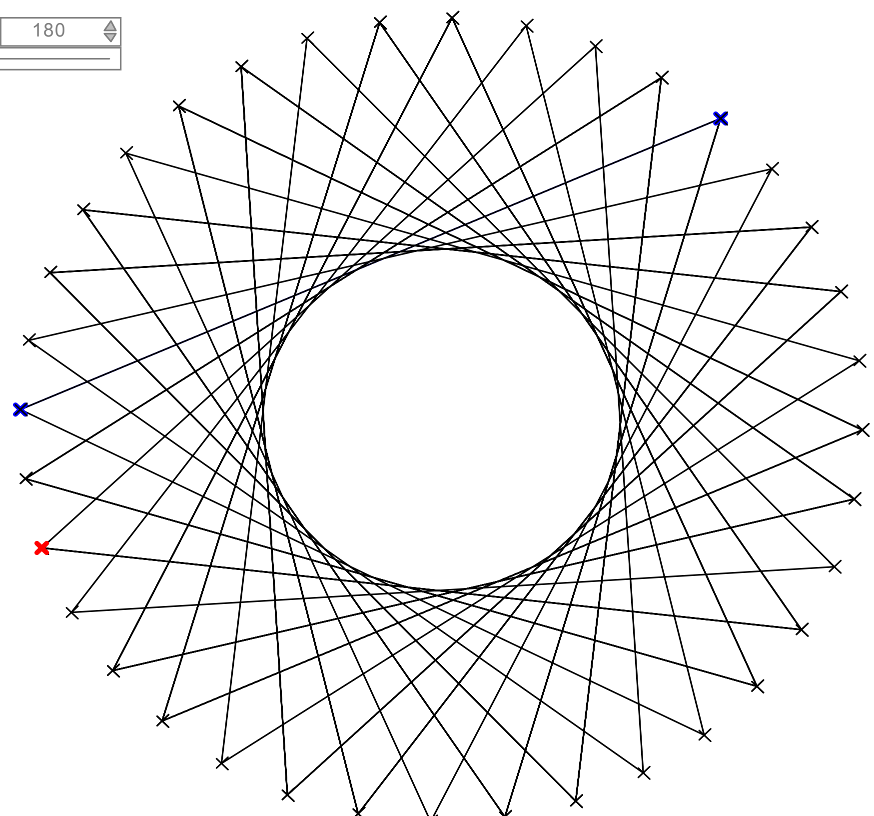
Experimente mit DynaGeo → Experimente

Winkel α gegeben → Welcher Außenwinkel β gehört dazu?

Nach wie vielen Umdrehungen k schließt sich die Figur?

Wie viele Ecken n hat die Figur dann?

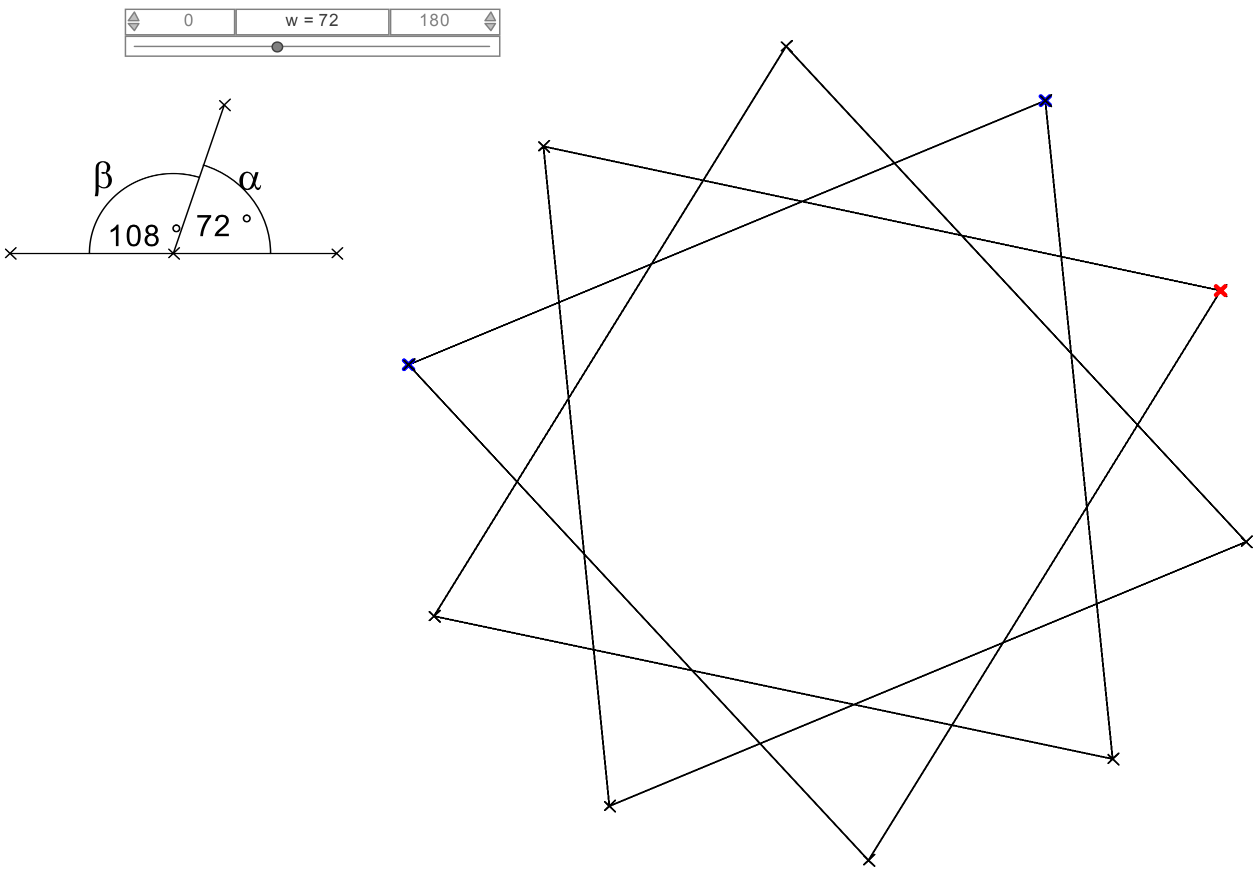




Winkelsumme im Stern-n-Eck Mathbuch

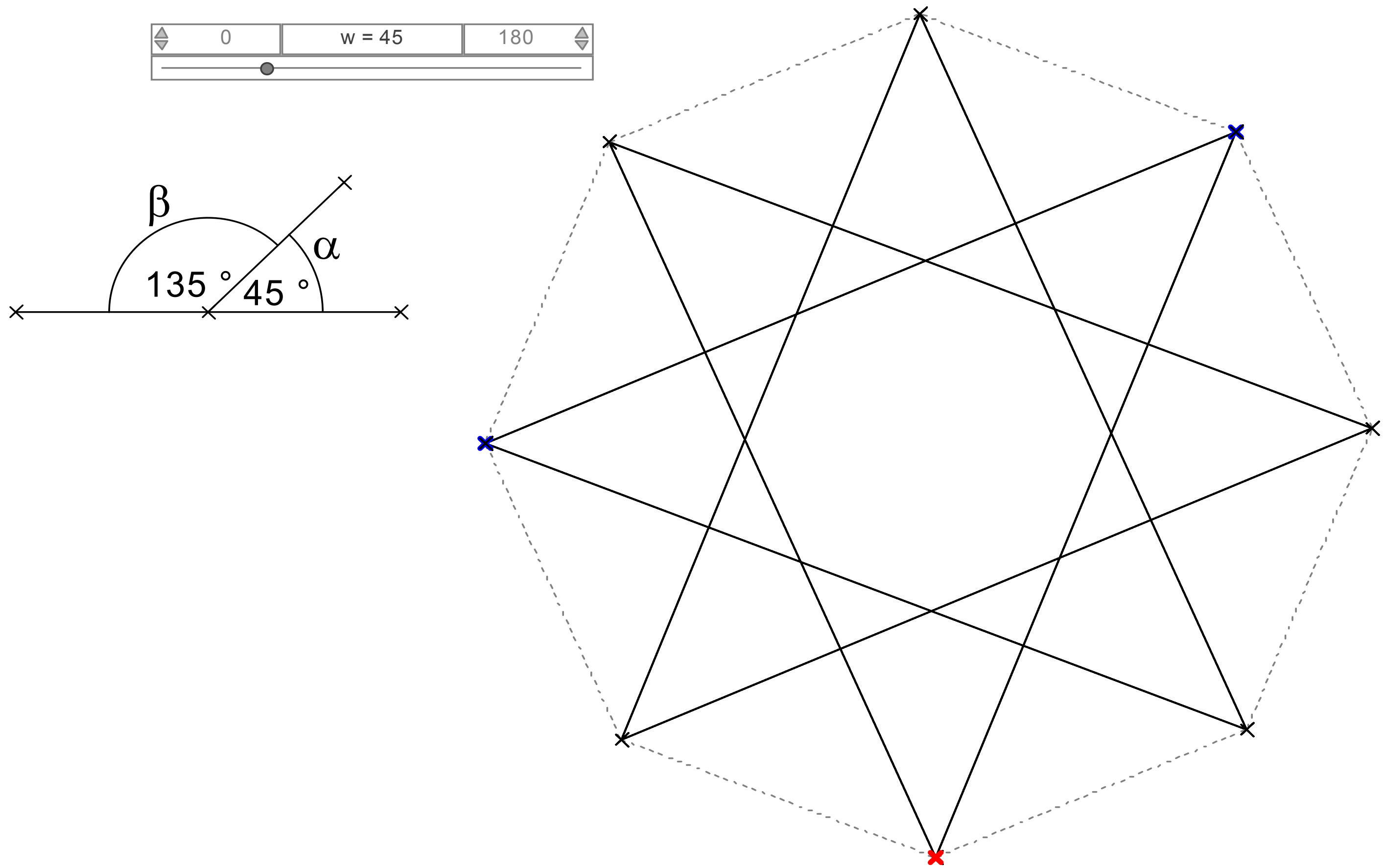
Weitere Bilder dazu mit Dynageo

→ Experimente



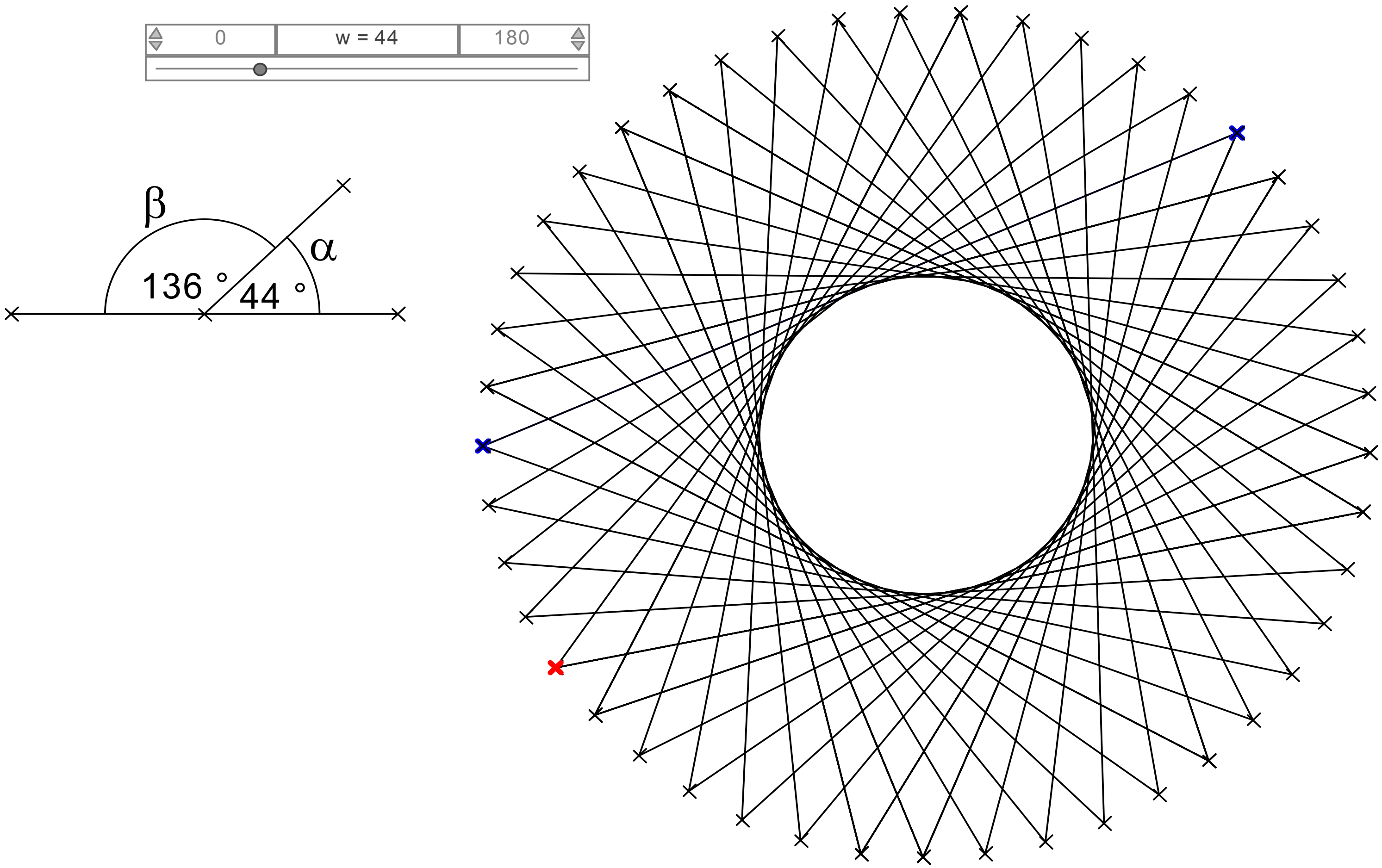
Weitere Bilder dazu mit Dynageo

→ Experimente



Weitere Bilder dazu mit Dynageo

→ Experimente

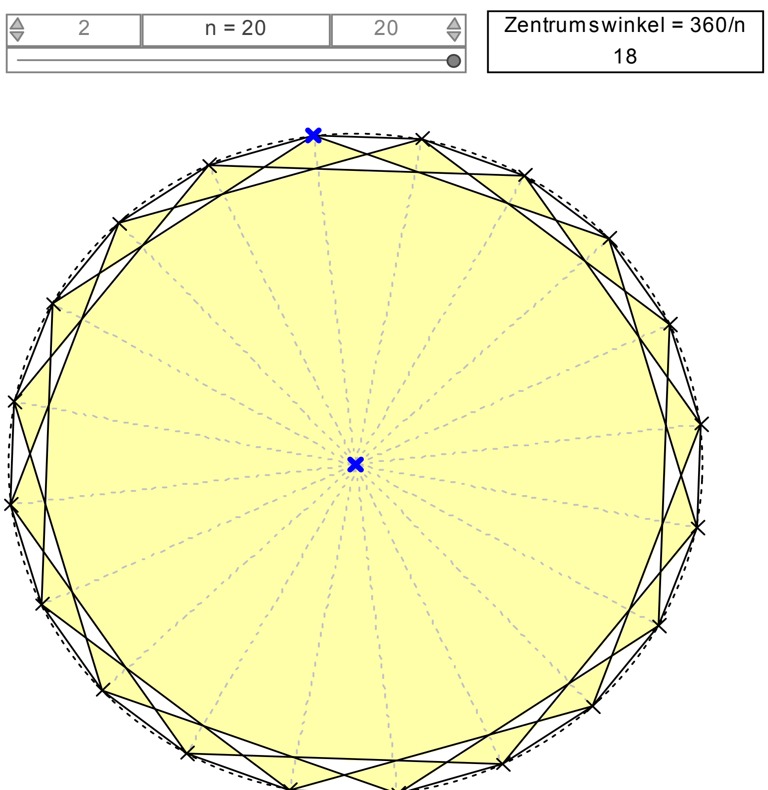


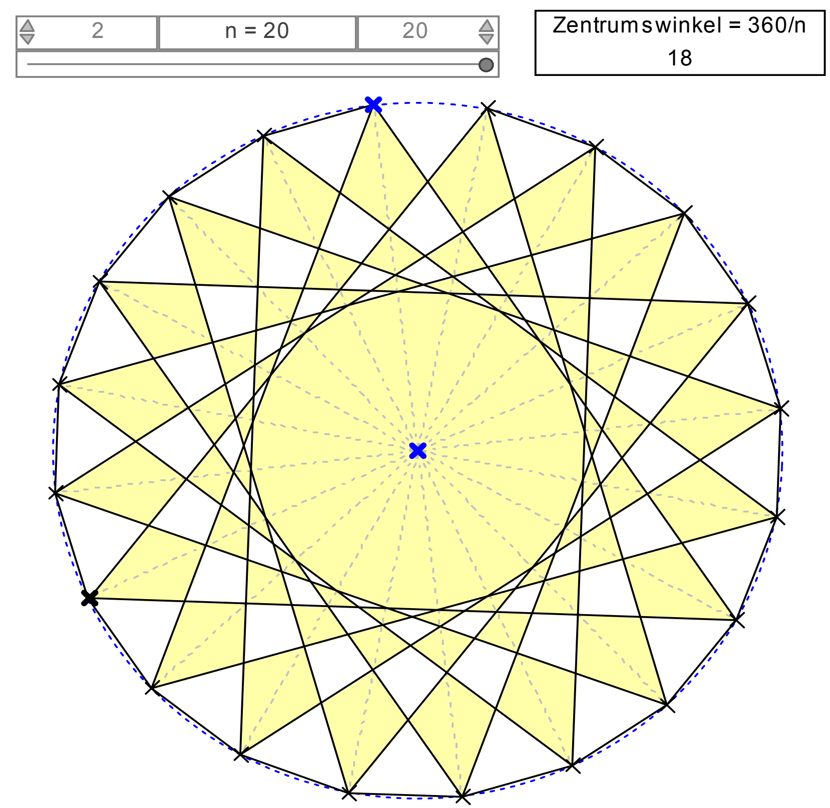
n Punkte auf einem Kreis gleichmäßig verteilt. Wie kann man verschiedene regelmäßige n-Ecke erzeugen?

- Jeden Punkt mit dem nächsten Nachbarn verbinden
- Jeden Punkt mit dem übernächsten Nachbarn verbinden

Jeden Punkt mit dem über-übernächsten Nachbarn verbinden ….

→ [Experimente]





Experimente

→ Experimente

Für welche Eckenzahl n und welche Umdrehungszahl k gibt es regelmäßige n-Sterne mit dieser Umdrehungszahl?

Wie berechnet man den einzelnen Winkel aus n und k?

Was ist die Winkelsumme?