Kapitel 3: Deckabbildungen von Figuren - Symmetrie

3.1 Die Gruppe (K,o) aller Kongruenzabbildungen einer Ebene

K ist die Menge aller Kongruenzabbildungen $E \to E$;
o ist die „Hintereinanderausführung“ von Abbildungen

- K ist abgeschlossen unter o,
- das **Assoziativgesetz** gilt : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
- „id“ ist **neutrales** Element; id $\in$ K
  (id ist die identische Abbildung)
- mit jedem $f \in K$ ist auch das **inverse** Element $f^{-1} \in K$

Satz 3.1
(K,o) ist eine (unendliche) Gruppe.

Definition 3.1

Sei h eine Kongruenzabbildung der Ebene E und F $\subseteq$ E eine Figur in der Ebene.
Wenn h(F)=F ist, d.h. wenn **F invariant unter h** ist, dann nennt man **F h-symmetrisch**, und **h eine Deckabbildung** (Symmetrieabbildung) von F.

Satz 3.2

Sei F $\subseteq$ E eine (nicht notwendig beschränkte) Figur in der Ebene.
Dann ist die **Menge der Deckabbildungen** (Symmetrieabbildungen) **von F** eine **Untergruppe** von (K,o).

Aufgabe

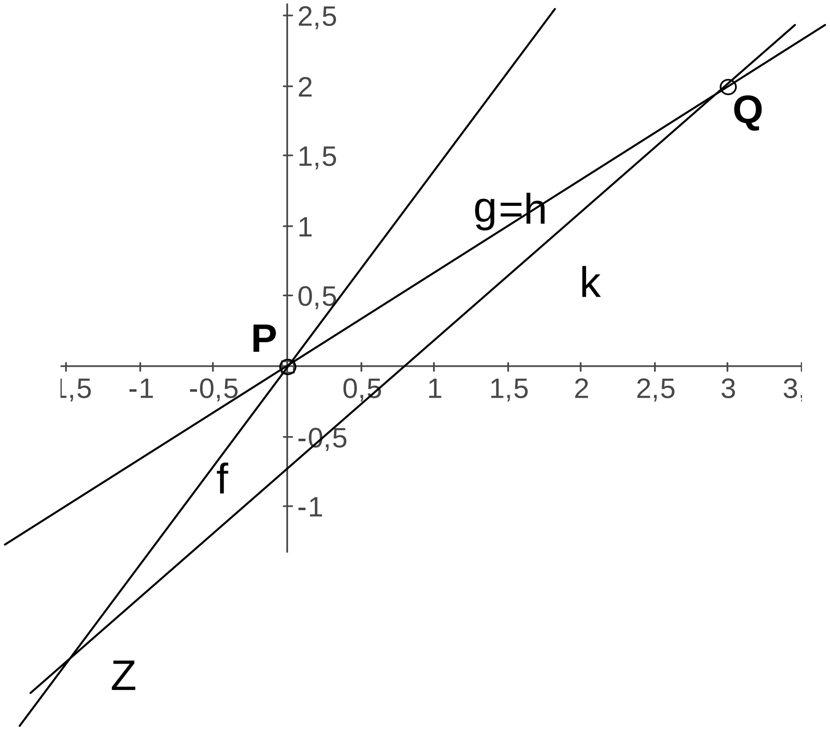
Welches sind die Symmetrieabbildungen

- eines festen Punktes,
- einer Geraden?

Aufgabe

Gegeben sind P(0/0) und Q(3/2).
Bestimmen Sie eine Kongruenzabbildung X, so dass gilt

$$D_{P,60°} \circ X = D_{Q,30°}$$



$$D_{P,300°} \circ D_{P,60°} \circ X = D_{P,300°} \circ D_{Q,30°}$$

$$X = D_{P,300°} \circ D_{Q,30°}$$

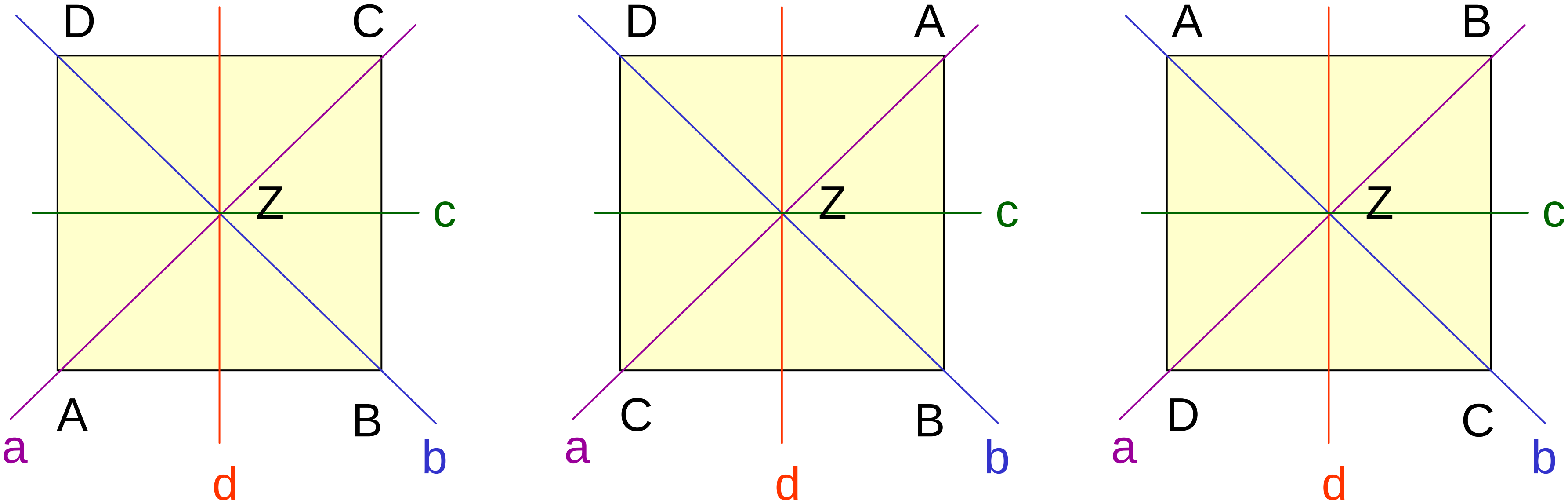
$$= (S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_k)$$

$$= S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_k$$

$$= S_f \circ S_k$$

$$= D_{Z,330°}$$

3.2 Die Deckabbildungen eines Quadrats



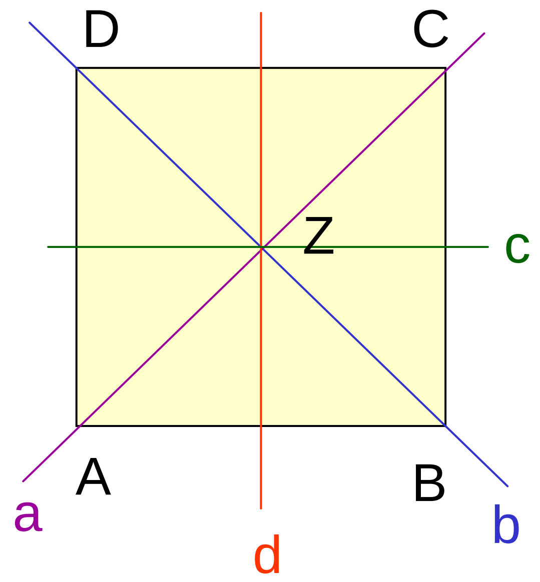
ABCD $\Rightarrow$ CBAD $\Rightarrow$ DCBA

S_b $D_{Z,90}$

$$S_b \circ D_{Z,90} = S_c$$

Kurze Schreibweise: „ 90 “ statt $D_{Z,90}$ und „ a “ statt S_a .

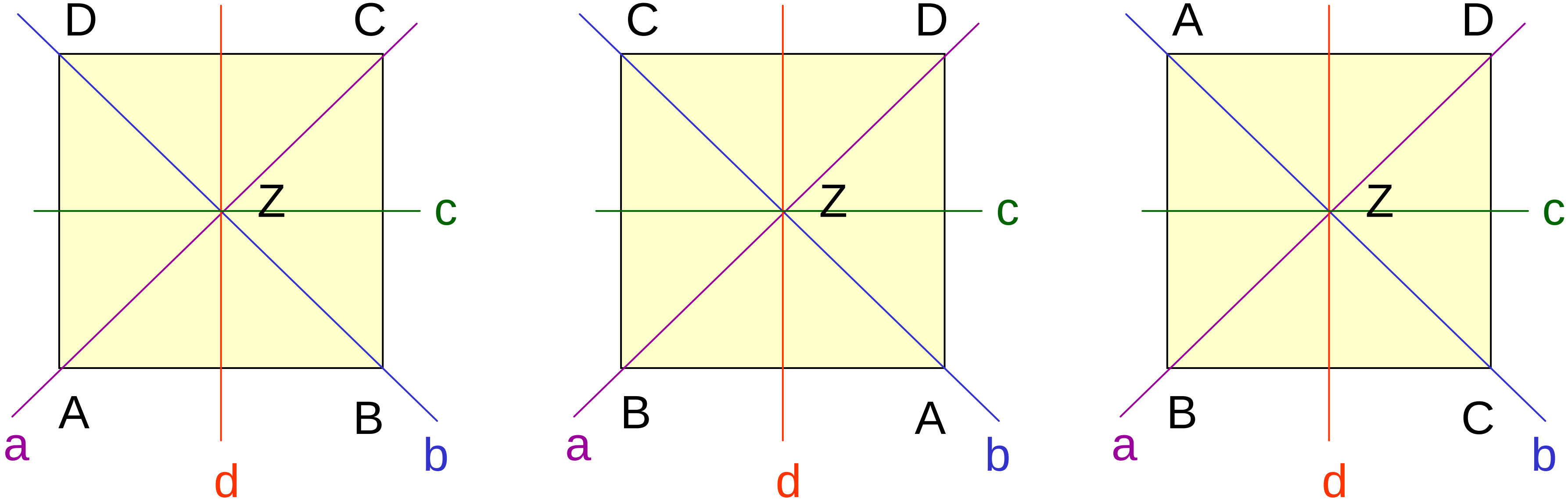
o	0	90	180	270	a	b	c	d
0	0	90	180	270	a	b	c	d
90	90	180	270	0	c	d	b	a
180	180	270	0	90	b	a	d	c
270	270	0	90	180	d	c	a	b
a	a	d	b	c	0	180	270	90
b	b	c	a	d	180	0	90	270
c	c	a	d	b	90	270	0	180
d	d	b	c	a	270	90	180	0



d o a = 270 ?

Satz 3.3
Die Menge der Deckabbildungen eines Quadrats bildet eine Gruppe (mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung).

d o a = 270 ?

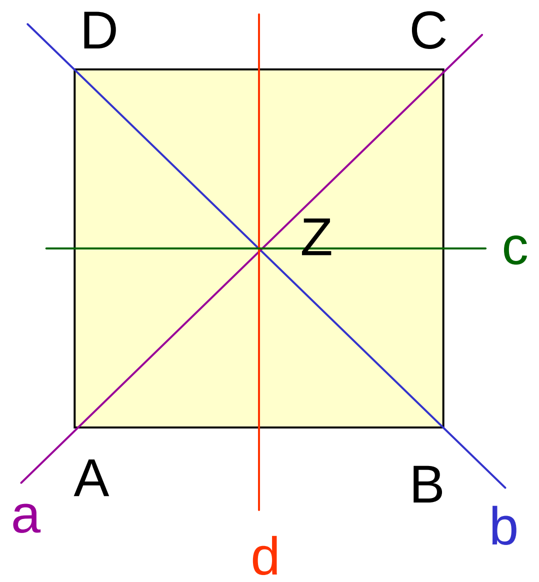


ABCD $\Rightarrow$ BADC $\Rightarrow$ BCDA

d a

... oder einfach: d o a ist eine Drehung um den doppelten Winkel zwischen d und a : $\angle$ d,a = 135° .

o	0	90	180	270	a	b	c	d
0	0	90	180	270	a	b	c	d
90	90	180	270	0	c	d	b	a
180	180	270	0	90	b	a	d	c
270	270	0	90	180	d	c	a	b
a	a	d	b	c	0	180	270	90
b	b	c	a	d	180	0	90	270
c	c	a	d	b	90	270	0	180
d	d	b	c	a	270	90	180	0



a o 90 = d ?

$$\mathrm{ABCD} \underset{a}{\Rightarrow} \mathrm{ADCB} \underset{90}{\Rightarrow} \mathrm{BADC}$$

a o b = 180 ?

$$\mathrm{ABCD} \underset{a}{\Rightarrow} \mathrm{ADCB} \underset{b}{\Rightarrow} \mathrm{CDAB}$$

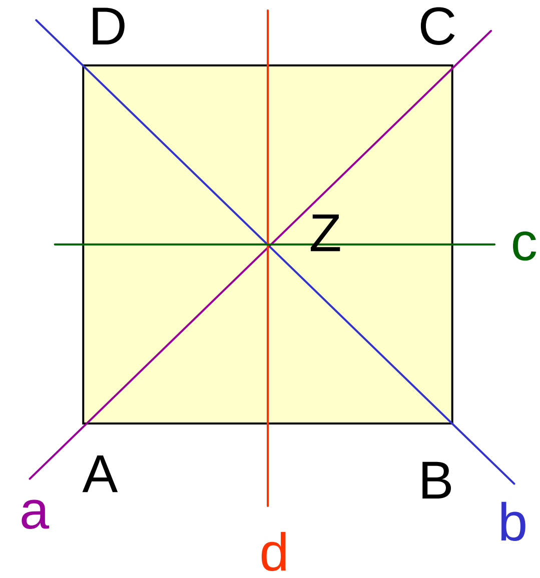
a o 180 = b ?

$$\mathrm{ABCD} \underset{a}{\Rightarrow} \mathrm{ADCB} \underset{180}{\Rightarrow} \mathrm{CBAD}$$

a o c = 270 ?

$$\mathrm{ABCD} \underset{a}{\Rightarrow} \mathrm{ADCB} \underset{c}{\Rightarrow} \mathrm{BCDA}$$

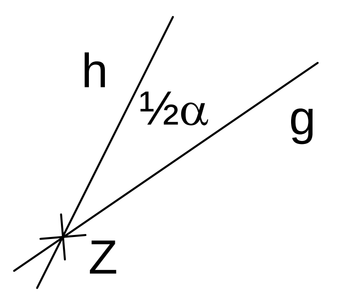
o	0	90	180	270	a	b	c	d
0	0	90	180	270	a	b	c	d
90	90	180	270	0	c	d	b	a
180	180	270	0	90	b	a	d	c
270	270	0	90	180	d	c	a	b
a	a	d	b	c	0	180	270	90
b	b	c	a	d	180	0	90	270
c	c	a	d	b	90	270	0	180
d	d	b	c	a	270	90	180	0



Man kann die Tabelle leichter überprüfen, wenn man folgende Tatsache über Verkettung von Achsenspiegelung und Drehung benutzt (Übung):

Ist g eine Gerade durch Z , $D_{Z,\alpha}$ eine Drehung um Z mit Winkel α, dann ist

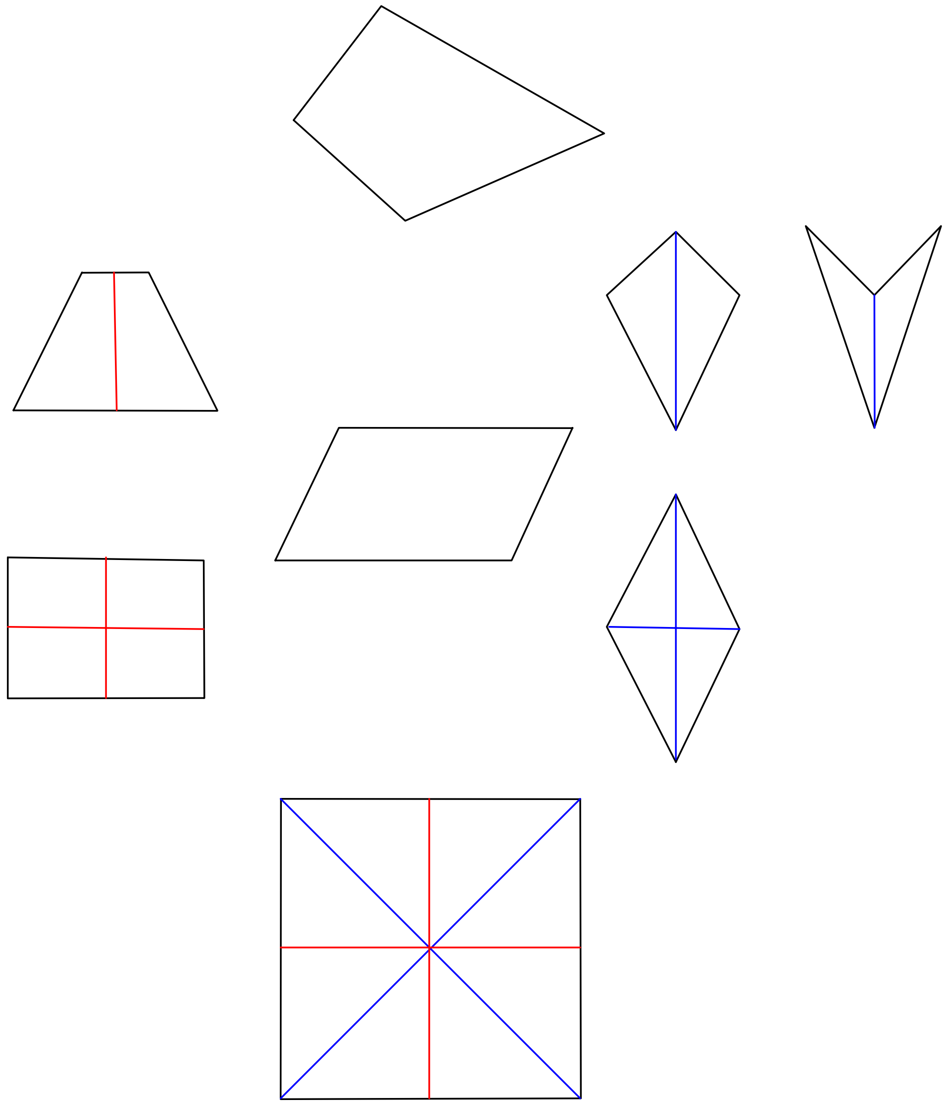
$S_g \circ D_{Z,\alpha} = S_h$, wobei $Z \in h$ und $\angle g,h = ½\alpha$,
$D_{Z,\alpha} \circ S_g = S_k$, wobei $Z \in k$ und $\angle k,g = ½\alpha$.



3.3 Untergruppen der Deckabbildungsgruppe des Quadrats

(a) $\{ D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_a, S_b, S_c, S_d \}$	Deckabbildungen des Quadrats
(b) $\{ D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270} \}$	Deck***drehungen*** des Quadrats
(c) $\{ D_0, D_{180}, S_a, S_b \}$	Deckabbildungen der Raute
(d) $\{ D_0, D_{180}, S_c, S_d \}$	Deckabbildungen des Rechtecks
(e) $\{ D_0, D_{180} \}$	Deckabbildungen des Parallelogramms
(f) $\{ D_0, S_a \}$	Deckabbildungen des Drachens
(g) $\{ D_0, S_c \}$	Deckabbildungen des (symm.) Trapezes
(h) $\{ D_0 \}$	Deckabbildungen eines beliebigen Vierecks

Das „Haus der Vierecke“: Symmetrie als Ordnungsprinzip



Welche Vierecke fehlen hier?

Will man das **allgemeine Trapez** und den **schiefen Drachen** in das „Haus“ aufnehmen, dann muss man Schrägspiegel-symmetrie berücksichtigen.

Achsen- und drehsymmetrische Figuren

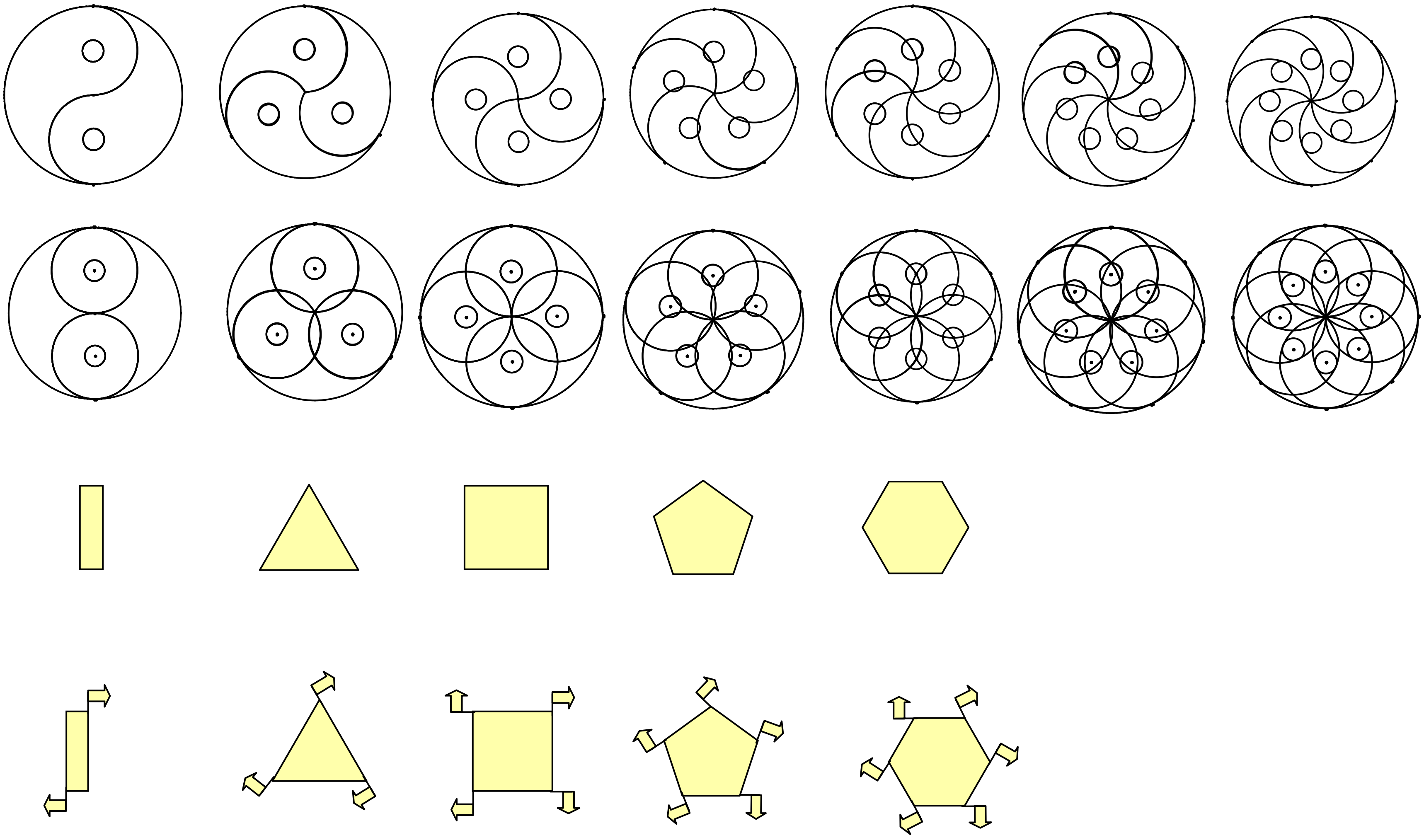
Definition:
Eine Figur soll achsensymmetrisch (drehsymmetrisch) heißen, wenn sie mindestens eine Symmetrieachse (eine nicht triviale Deckdrehung) hat.

Fragen:
Versuchen Sie jeweils Beispiele anzugeben oder zu begründen, warum es solche Figuren nicht geben kann.

Gibt es Figuren, die achsensymmetrisch, aber nicht drehsymmetrisch sind?
Achsenzahl?

Gibt es Figuren, die drehsymmetrisch, aber nicht achsensymmetrisch sind?
Drehwinkel?

Drehungen? Achsen?



3.4 Symmetrieachsen - Deckdrehungen einer (beschränkten) Figur

Satz 3.4

Alle Figuren seien beschränkt.

a) Für jedes $n \in N$ gilt: Es gibt eine Figur mit genau n Symmetrieachsen.
Lage dieser Symmetrieachsen:
Alle schneiden sich in einem Punkt Z,
Schnittwinkel zwischen 2 benachbarten Achsen: $360° / (2n)$.

b) Hat eine Figur genau n Symmetrieachsen, so ist jede Drehung um Z um $360°/n$ eine Deckdrehung der Figur.
Es gibt keine Deckdrehung der Figur mit kleinerem Drehwinkel.
$\Rightarrow$ Jede achsensymmetrische Figur mit mindestens 2 Symmetrieachsen ist auch drehsymmetrisch .

c) Nicht jede drehsymmetrische Figur ist auch achsensymmetrisch .

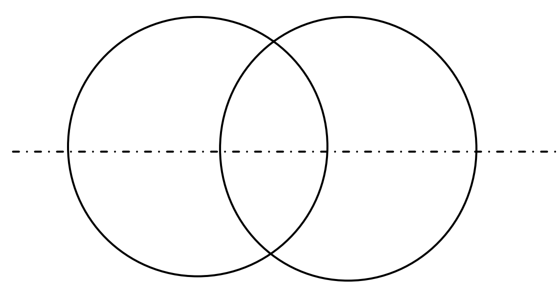
3.5 Kreis - Zweikreisfigur

Kreis

- Unendlich viele Symmetrieachsen
  (jede Gerade durch M ist S-Achse),
- unendlich viele Deckdrehungen
  (jede Drehung um M ist Deckdrehung).

Zweikreisfigur

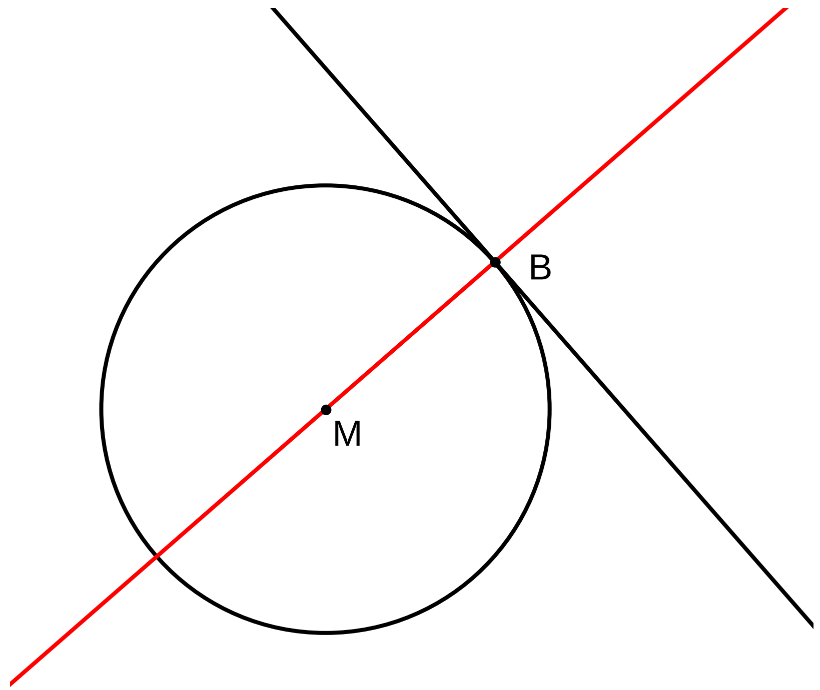
- Zwei Symmetrieachsen ,
  Eigenschaften Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Mittelsenkrechte einer Strecke, Winkelhalbierende.



Kreisfigur mit Tangente

Eine Symmetrieachse (Radius durch den Berührpunkt) .

Als Folgerung: Tangente senkrecht auf dem Berührradius; Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises, gemeinsame Tangenten an zwei Kreise.



3.6 Aufgaben zur Symmetrie

Aufgabe

S_g sei eine Achsenspiegelung an g, $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = S_g(F_0)$.

Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und S_g-symmetrisch ist.

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit abstrakt und kompliziert beschrieben?

Aufgabe

a) $D_{Z,120°}$ sei eine Drehung um Z mit Drehwinkel 120°, $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = S_g(F_0)$, $F_2 = S_g(F_1)$.
Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und $D_{Z,120°}$-symmetrisch ist.

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit beschrieben?

b) Nun sei statt $D_{Z,120°}$ die Drehung $D_{Z,30°}$ gegeben. Beschreiben Sie die Konstruktion der kleinsten Figur, die F_0 enthält und $D_{Z,30°}$-symmetrisch ist.

c) Beantworten Sie Frage (b) jeweils für die Drehwinkel 50°, 17°.

3.7 Parkettieren

3.7.1 Was ist Parkettieren?

Parkettieren ist das überlappungsfreie, lückenlose Ausfüllen der Ebene mit einem vorgegebenen endlichen Satz kongruenter Figuren .

Womit kann man parkettieren?

Mit welchen *regelmäßigen Vielecken* kann man parkettieren?

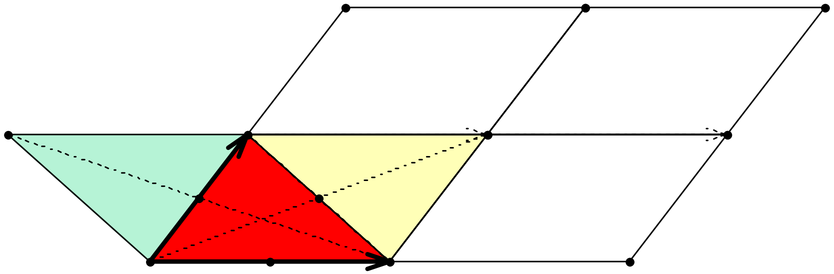
- Mit welchen Dreiecken kann man parkettieren?
- Mit welchen Vierecken kann man parkettieren?
- Mit welchen weiteren regelmäßigen n-Ecken kann man parkettieren?

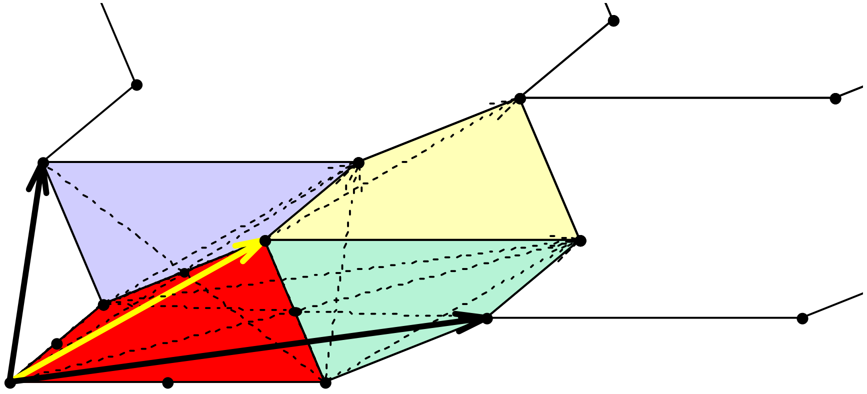
Schwierigere Fragestellung:
Parkettierungen mit mehr als einem Typ von Figuren.

Satz 3.5

a) Mit regelmäßigen n-Ecken kann man genau dann parkettieren, wenn n = 3, 4, 6 ist.

b) Man kann mit jedem beliebigen Dreieck oder Viereck parkettieren.





Parkettieren mit Dreiecken und Vierecken ermöglicht in der Schule einen experimentellen Zugang zu den Sätzen über die Winkelsumme.

3.7.2 Warum wird im Mathematikunterricht parkettiert?

Als eine Forderung an die Inhalte der Schulmathematik wird häufig genannt:

„Die Geometrie (der Grundschule) soll sich an fundamentalen geometrischen Ideen orientieren".

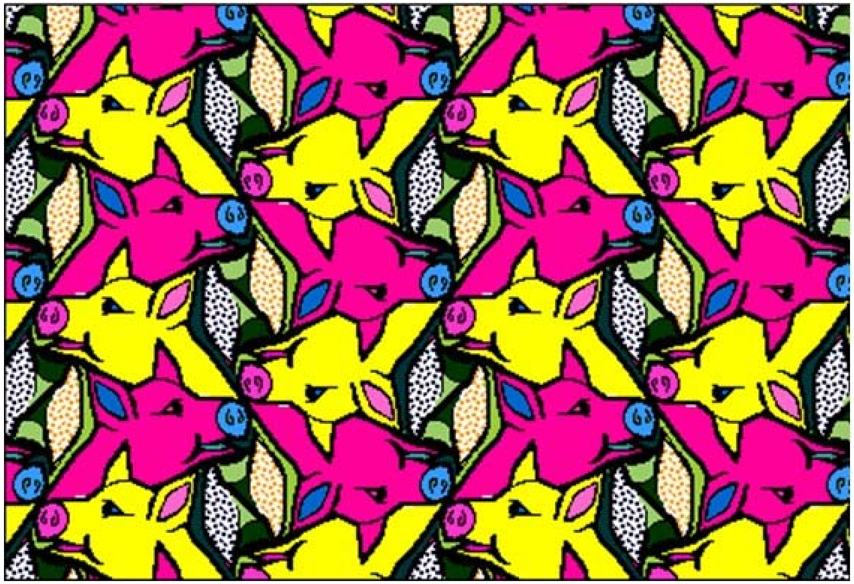
Realisierung **fundamentaler Ideen der Geometrie** beim Parkettieren:

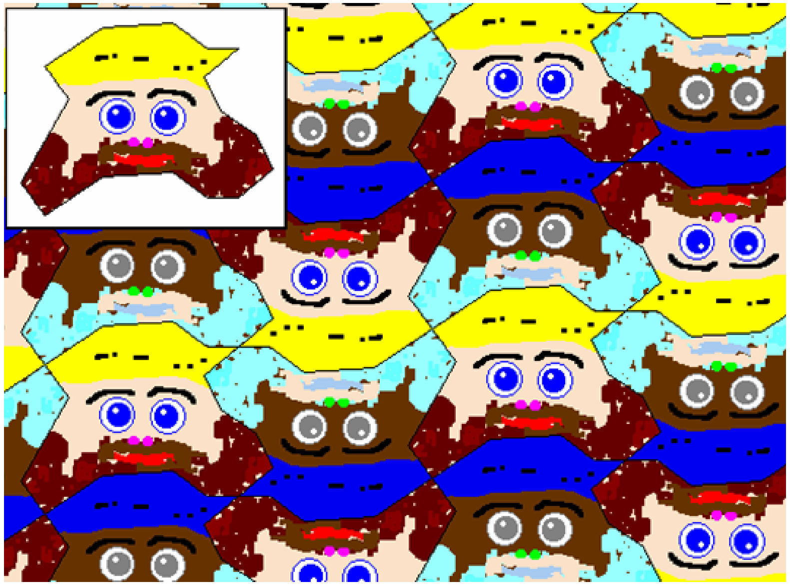
a) die **Idee des Messens** : Vorbereitung des Begriffs „Flächeninhalt“
b) die **Idee des Passens** : Längen, Winkel, Winkelsätze, Winkelsummensätze
   $\Rightarrow$ **Geometrie in ihrer ursprünglichen Bedeutung als Feldmesskunst.**
c) **Ästhetik** : Einfärben; ansprechende Grundbausteine (Symmetrien ausnützen)

3.7.3 Parkettieren durch geeignetes Verändern von Grundbausteinen

Mit dem Computer-Programm “Tesselmania” kann man ansprechende Parkettierungen leicht auch mit Schülern durchführen.

Hier zwei Beispiele:



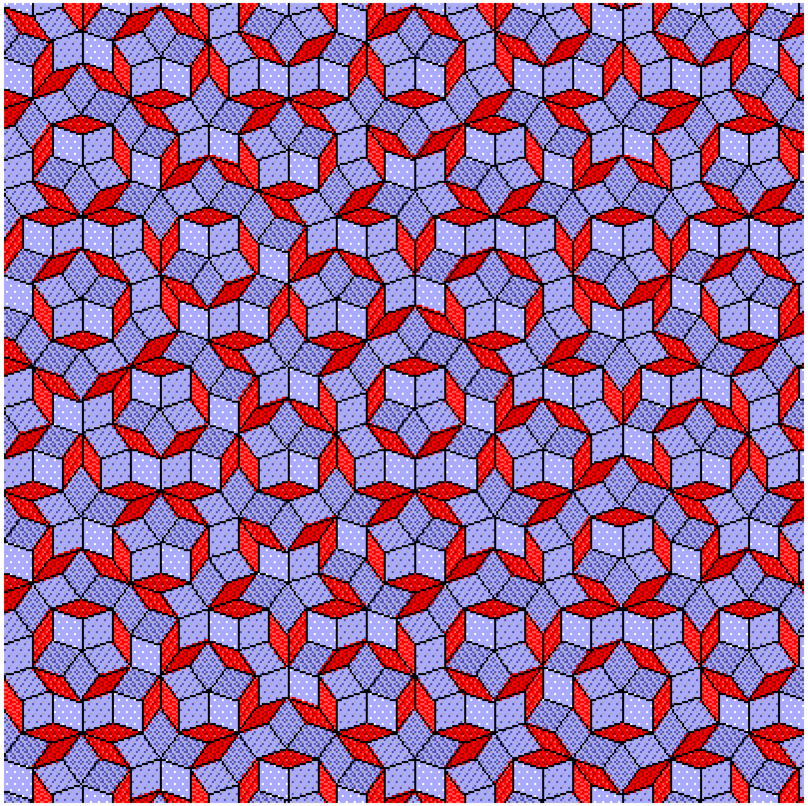


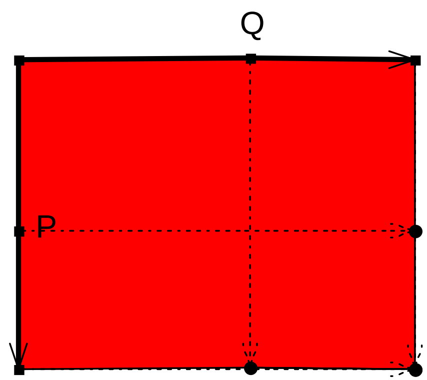
Programm als Demo auf
Schwarzes Brett/Mathematik und Informatik/Geoueb/

3.7.4 Parkettieren mit mehr als einem Grundbaustein

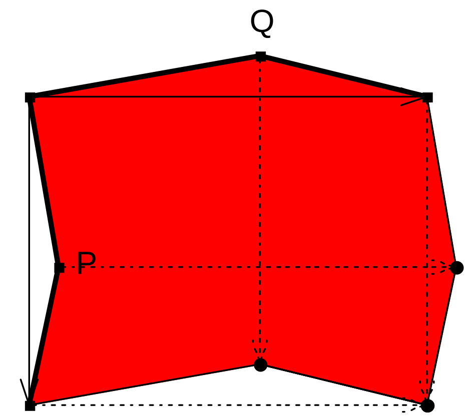
Roger Penrose hat einfache Parkettierungen der Ebene entdeckt, die nicht- periodisch sind.
Es gibt auch endliche Mengen von Grundbausteinen, die **nur** nicht-periodische Parkettierungen zulassen.

Eine nicht-periodische Parkettierung mit zwei Grundbausteinen:

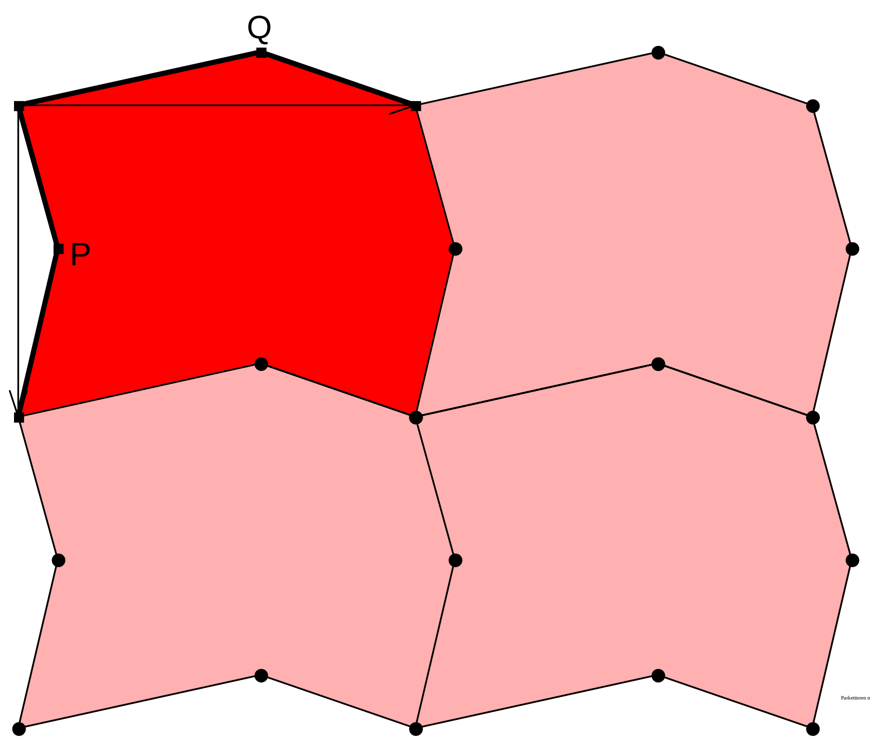




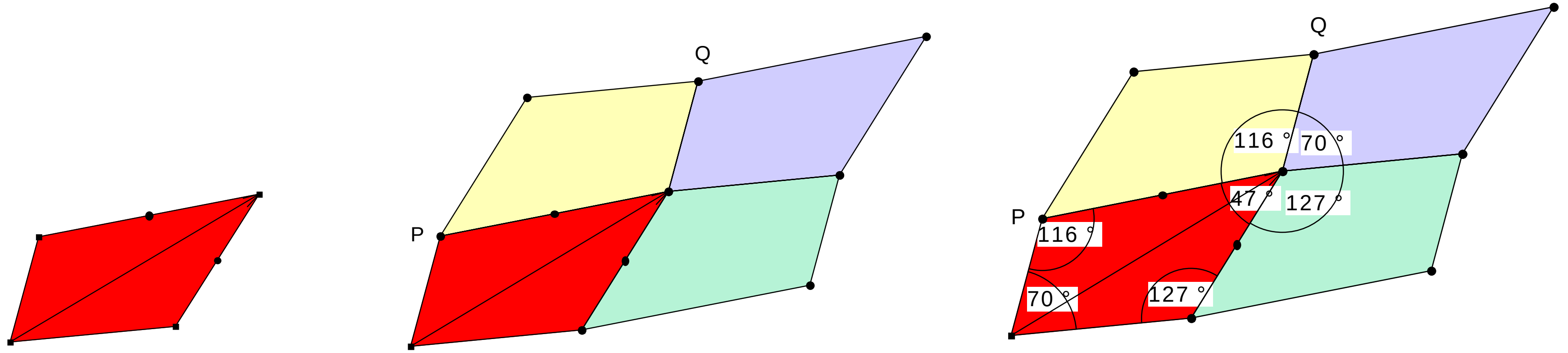
Ausgangsfigur:
Rechteck oder Parallelogramm



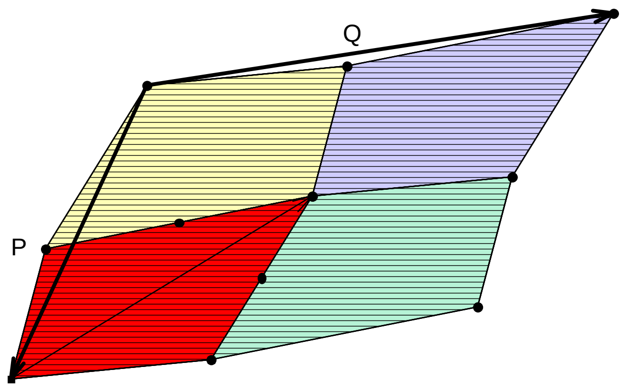
Ausgangsfigur an gegenüberliegenden Seiten kongruent verändern

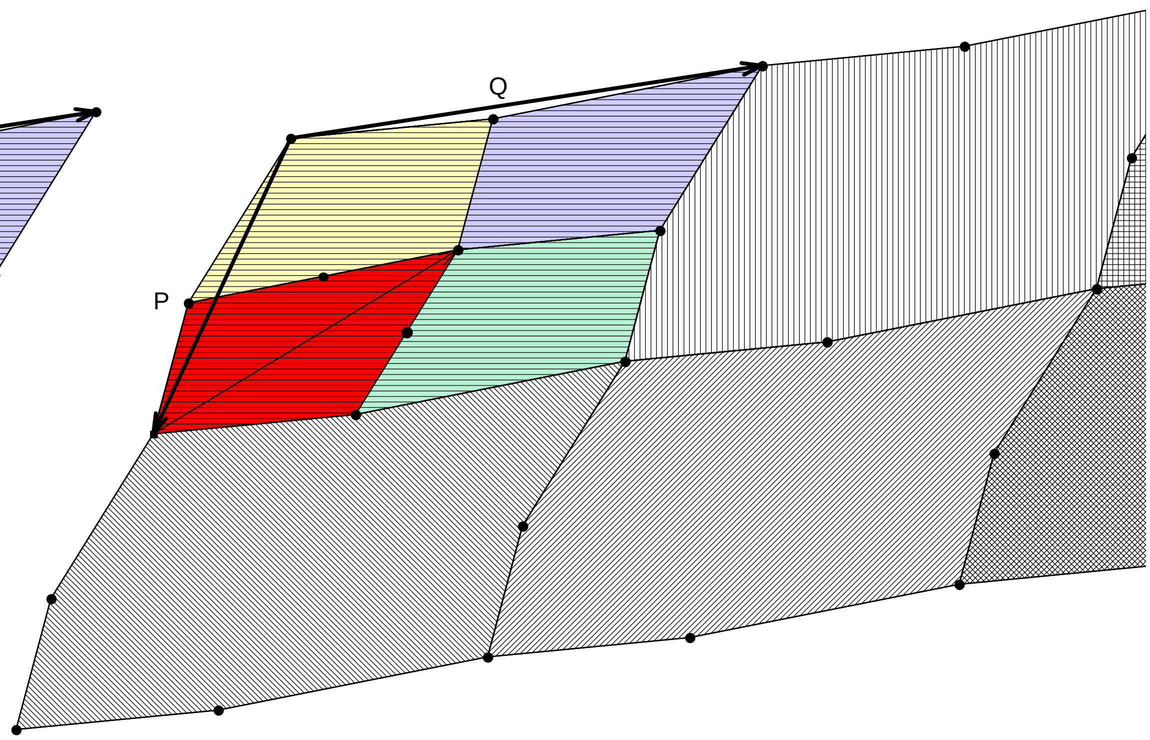


Mit dem entstehenden 8-Eck kann man die Ebene wie mit der Ausgangsfigur durch zwei Wiederholung von 2 Verschiebungen parkettieren.



Ausgangsviereck ... gespiegelt an Seitenmitten (grün und gelb), verschoben (blau)





...8-Eck wie zuvor:
Parkettieren durch
2 Verschiebungen
möglich.