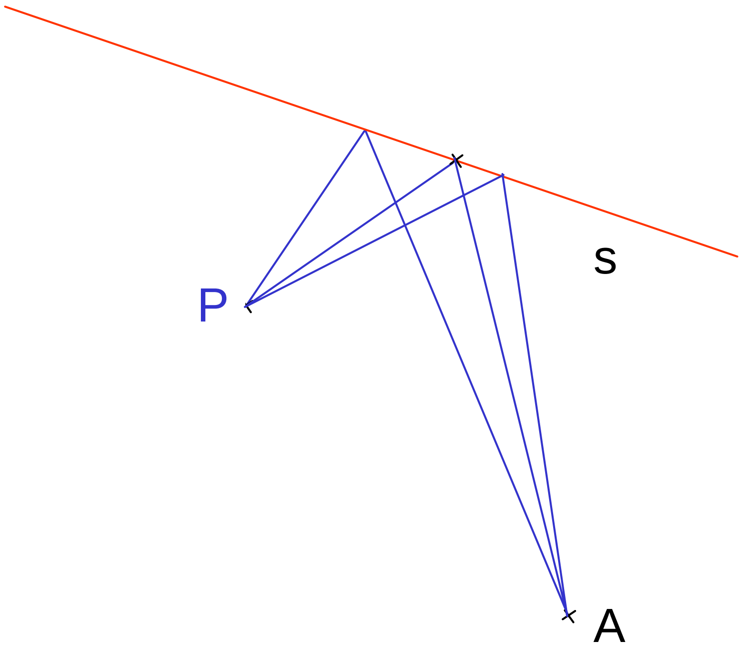
Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

2.1 Geradenspiegelungen

a) Spiegel

Wie wirkt ein Spiegel?



Modellvorstellung:
Jeder beleuchtete Punkt P sendet nach allen Seiten Lichtstrahlen aus

Wie verlaufen die Lichtstrahlen von P über S nach A?

Fermat-Prinzip (Pierre de Fermat 1601 – 1665):

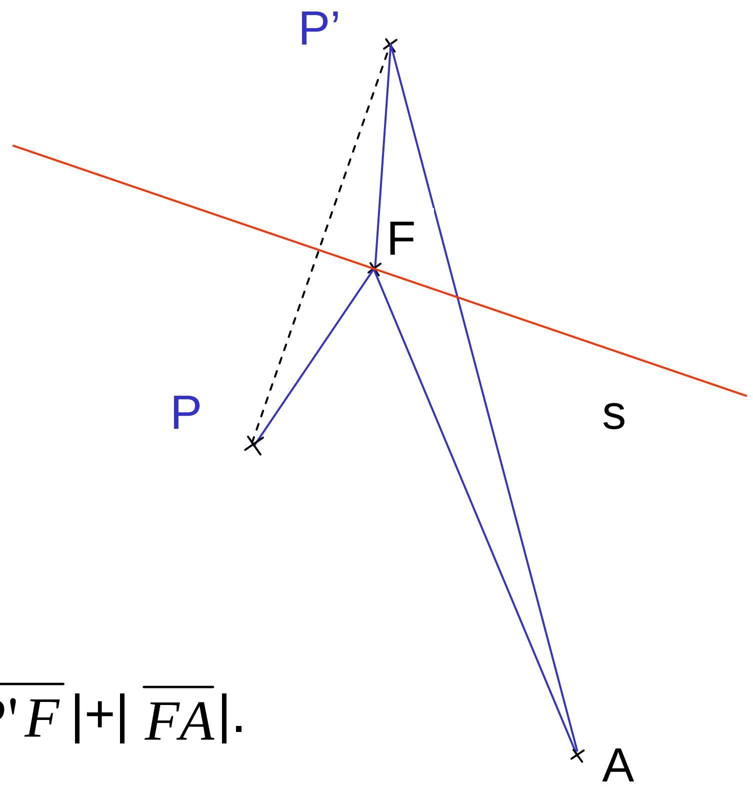
Licht wählt unter allen möglichen Wegen den kürzesten

(im Allgemeinen: den schnellsten)

Was ist der kürzeste Weg von P über S nach A?

Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem Fermat-Prinzip

Von P aus läuft ein Lichtstrahl zum Punkt F auf der Spiegelfläche und von dort zu Punkt A. F ist so zu bestimmen, dass der gesamte Weglänge $|\overline{PF}|+|\overline{FA}|$ möglichst kurz wird.



Definiere P' so, dass s die Mittelsenkrechte zu $\overline{PP'}$ ist.

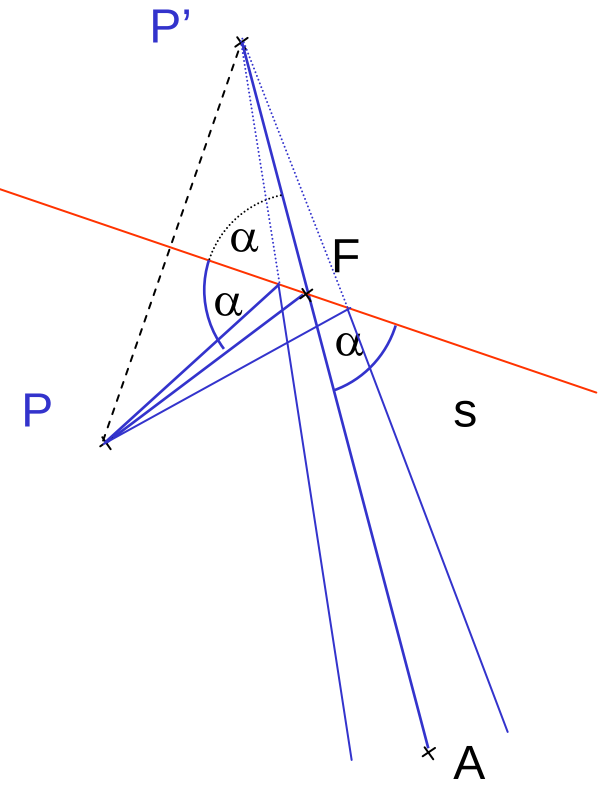
- $|\overline{PF}|=|\overline{P'F}|$
- gesamte Weglänge $|\overline{PF}|+|\overline{FA}|=|\overline{P'F}|+|\overline{FA}|$.

Weglänge minimal: F liegt auf $\overline{P'A}$.

Sonst: $|\overline{P'F}|+|\overline{FA}|>|\overline{P'A}|$.

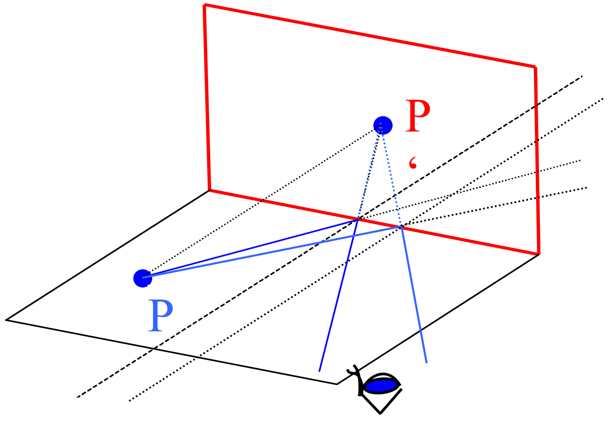
Reflexionsgesetz

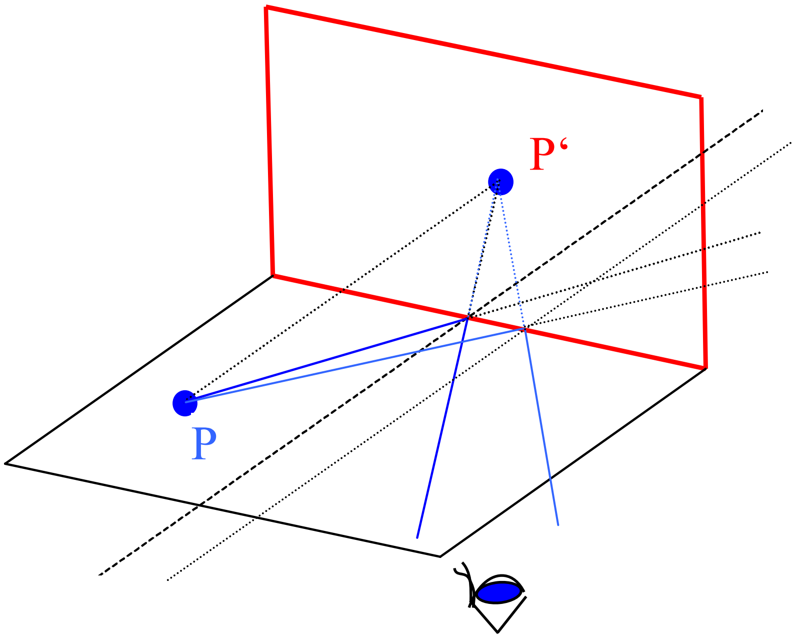
- Einfallender Strahl, Lot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene (Einfallsebene) senkrecht zur Spiegelebene
- Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich.



Betrachte weitere Strahlen, die von P ausgehen.

Die reflektierten Strahlen ***scheinen*** alle von einem Punkt P‘ herzukommen, der auf der anderen Seite des Spiegels auf dem Lot durch P im gleichen Abstand wie P liegt.





Das Auge nimmt den Punkt P‘ als Quelle der Strahlen wahr.

Untersuchung des Strahlengangs:
Beschränkung auf die Einfallsebene
Spiegel***ebene*** $\Rightarrow$ Spiegel***achse***
Räumliche Spiegelung $\Rightarrow$ *Geradenspiegelung*

b) Geradenspiegelungen

Definition 2.1

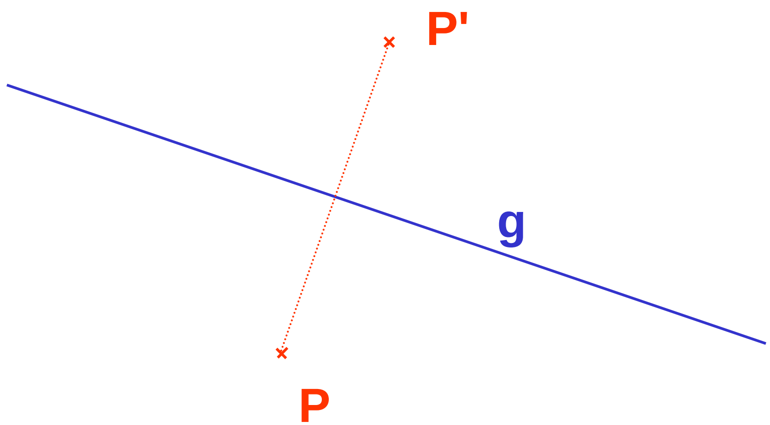
Es sei g eine Gerade der Ebene E.

Eine Abb. $S_g : E \to E$ heißt Geradenspiegelung (Achsenspiegelung)

$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:

Ist $P \notin g$, so ist g die Mittelsenkrechte von PP‘

Ist $P \in g$, so ist P' = P.



Handelndes Durchführen von Geradenspiegelungen:

- Falten und Klecksen; Falten und Schneiden; Falten und Kohlepapier; Falten und Durchstechen
- kariertes Papier

Eigenschaften einer Geradenspiegelung S_g:

Die Umkehrabbildung einer Geradenspiegelung S_g ist die selbe Geradenspiegelung S_g : $\mathbf{S_g^{-1} = S_g}$

1 Punktepaar (P,P') $(P \neq P')$ legt die Abbildung eindeutig fest.

Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Achsenspiegelung S_g mit $S_g(P)=Q$.

Fixelemente von S_g:

Fix**punkte**: alle Punkte von g

Fixpunkt**gerade**: g

Fixgeraden: g; alle Senkrechten zu g

Invarianten:

geradentreu

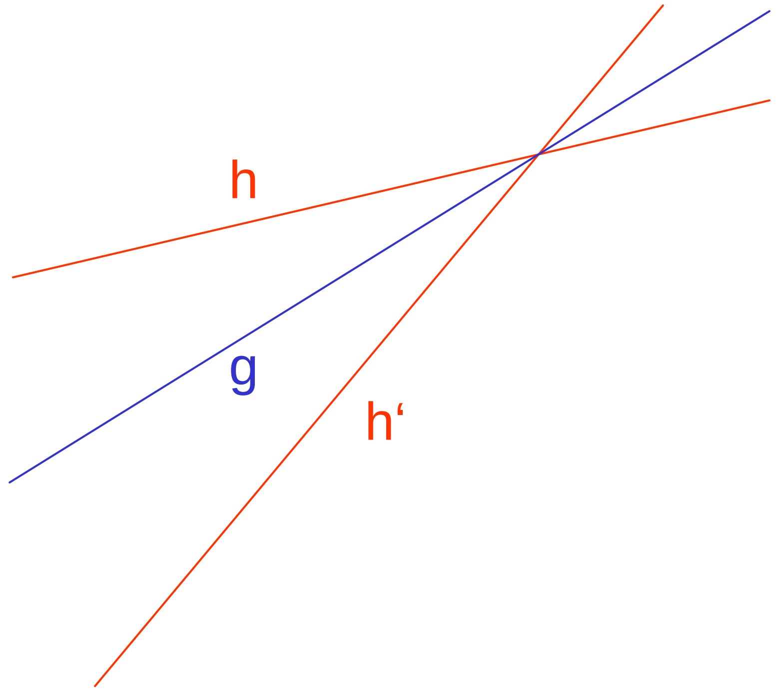
längentreu

winkelmaßtreu

flächeninhaltstreu

***nicht** umlaufsinntreu*

Weitere, hieraus und aus der Definition beweisbare Eigenschaften einer Geradenspiegelung S_g

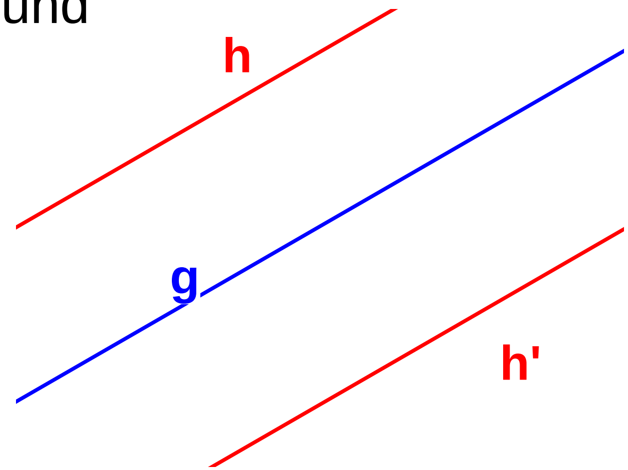


Ist nicht h || g, so schneiden sich h und h' auf g.

g halbiert den Winkel zwischen h und h' .

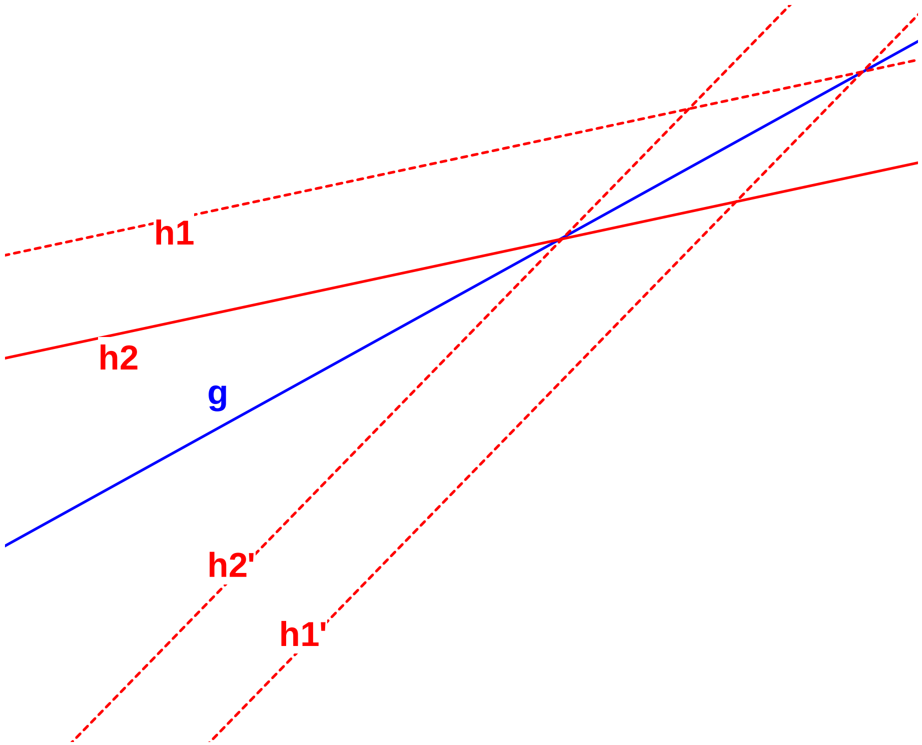
Ist h || g, so ist g Mittelparallele des von h und h' begrenzten Parallelstreifens .

Beweis → Übung



Ist h_1 || h_2 , so ist auch h_1' || h_2'
„parallelentreu“

Beweis → Übung



2.2 Definition und Eigenschaften von Kongruenzabbildungen

Definition 2.2

Eine Abbildung f: E $\rightarrow$ E heißt Kongruenzabbildung

$\Leftrightarrow$ f ist bijektiv, geradentreu, längentreu.

Satz 2.1

Jede Geradenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung.

Satz 2.2

Die Verkettung von zwei Geradenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung.

Folgende Probleme im Zusammenhang mit Kongruenzabbildungen sollen behandelt werden:

Gibt es außer den Achsenspiegelungen noch weitere Kongruenzabbildungen?

Welche Typen können das sein? Kann man sie einfach klassifizieren?

Welche Typen von Kongruenzabbildungen erhält man, wenn man mehrere Achsenspiegelungen hinter einander ausführt?

Bevor wir uns mit der Verkettung von Achsenspiegelungen im Einzelnen befassen, sollen noch einige Eigenschaften von Kongruenzabbildungen bewiesen werden.
Wir verwenden wiederum alle in Kapitel 1.6 aufgeführten „Axiome“.

Satz 2.3

Die Verkettung von zwei Kongruenzabbildung ist eine Kongruenzabbildung.

Beweis:
Unmittelbare Folge aus der Definition.

Satz 2.4

Jede Kongruenzabbildung ist winkelmaßtreu und flächeninhaltstreu.

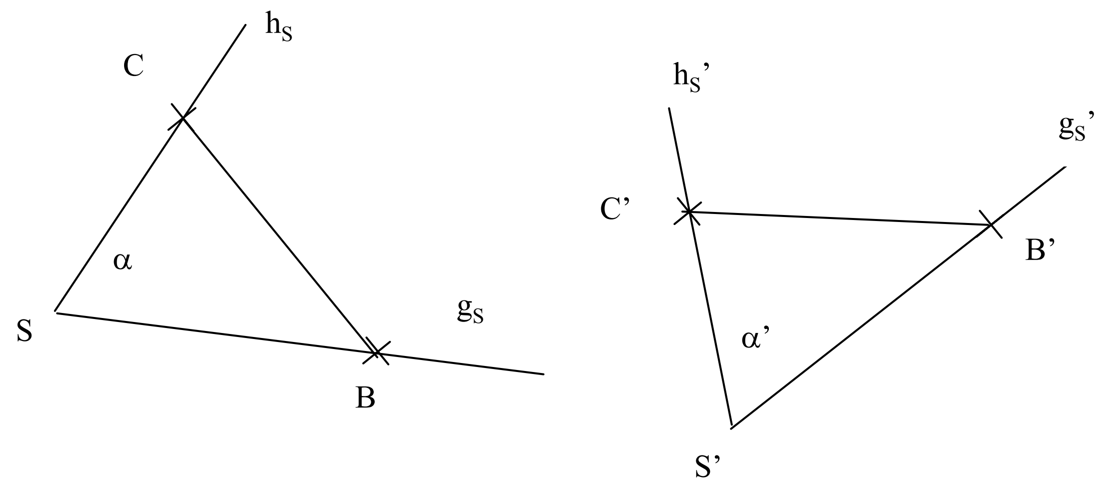
Winkeltreue

Winkel α sei $\angle\ g_S, h_S$

Bildwinkel α' sei $\angle g_S', h_S'$.

Wähle Punkt B auf g_S

und Punkt C auf h_S.



Wegen der Längentreue der Kongruenzabbildungen:

Für das Bilddreieck S'B'C' ist $\overline{SB} = \overline{S'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CS} = \overline{C'S'}$

Damit stimmen die Dreiecke auch in allen Winkeln überein, also ist **$\alpha' = \alpha$.**

Flächeninhaltstreue

Vorgriff auf die späteren Ausführungen zum Flächeninhaltsbegriff:

Der Flächeninhalt von Rechtecken bleibt erhalten.

Rechteck ABCD $\Rightarrow$ Rechteck A‘B‘C‘D‘

da Kongruenzabbildungen **winkeltreu** sind.

Seitenlängen Bildrechteck A’B’C’D’ =
Seitenlängen Rechteck ABCD

da Kongruenzabbildungen **längentreu** sind.

$\Rightarrow$ **Flächeninhalte bleiben gleich, da der Flächeninhalt beliebiger Figuren (z.B. von Ellipsen) als Grenzwert geeigneter Folgen von Quadraten definiert wird**.

Satz 2.5
Jede Kongruenzabbildung ist parallelentreu.

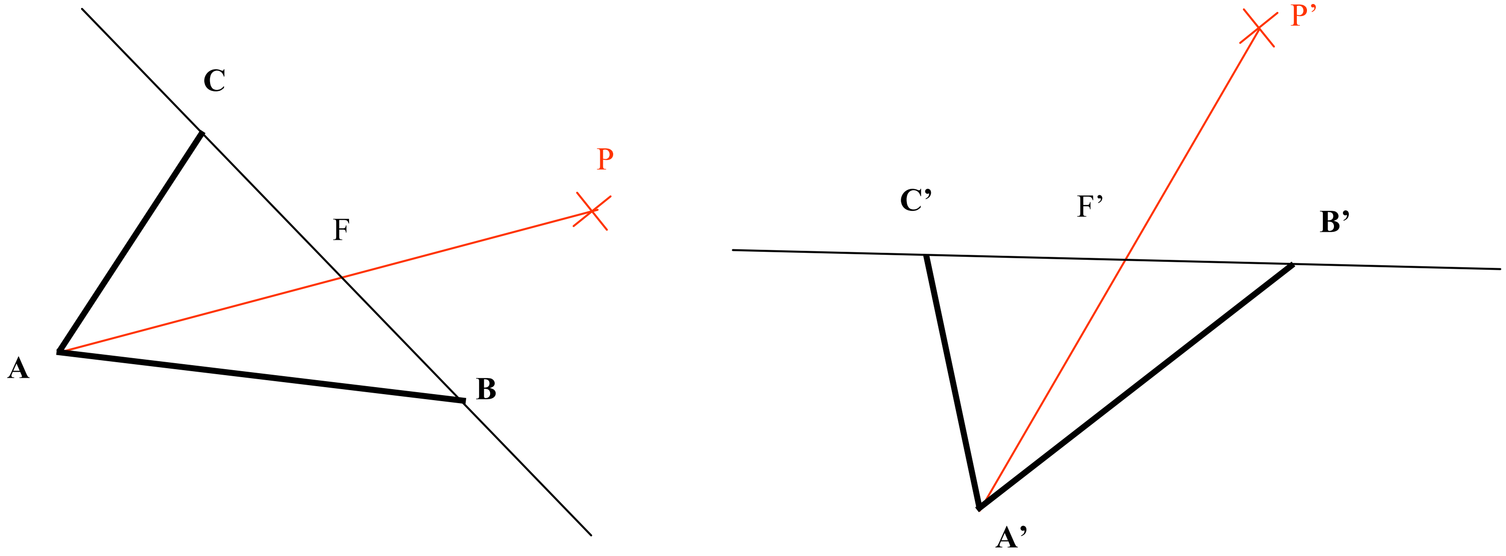
Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Geradentreue und der Bijektivität von Kongruenzabbildungen (→Übungsaufgabe).

Satz 2.6
Durch das Abbilden eines einzigen Dreiecks ist eine Kongruenzabbildung eindeutig festgelegt.

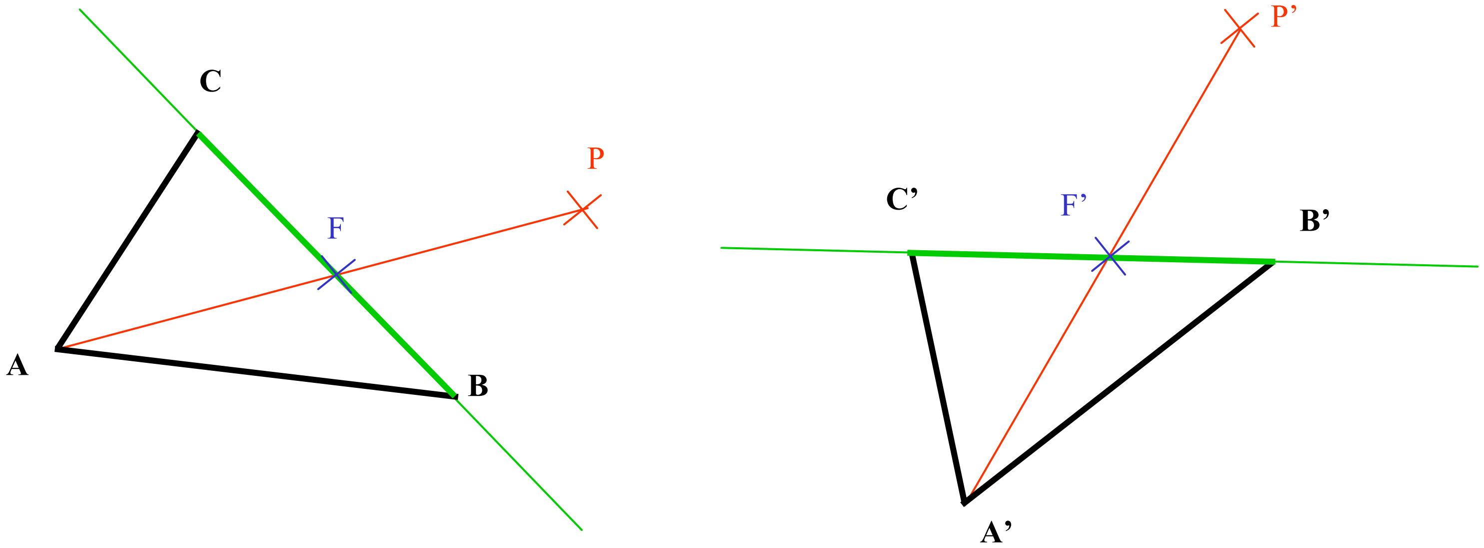
Beweis:

Das Bild eines (nicht ausgearteten) Dreiecks ABC sei A'B'C'.
P sei *beliebiger* Punkt



Zu zeigen: Bild P' von P eindeutig festgelegt.

Zeichne die Gerade AP (für $P \neq A$)



1.Fall: **AP** schneidet die Gerade **BC** in einem Punkt **F**.

Bildpunkt **F'** von **F** liegt auf **B'C'** .

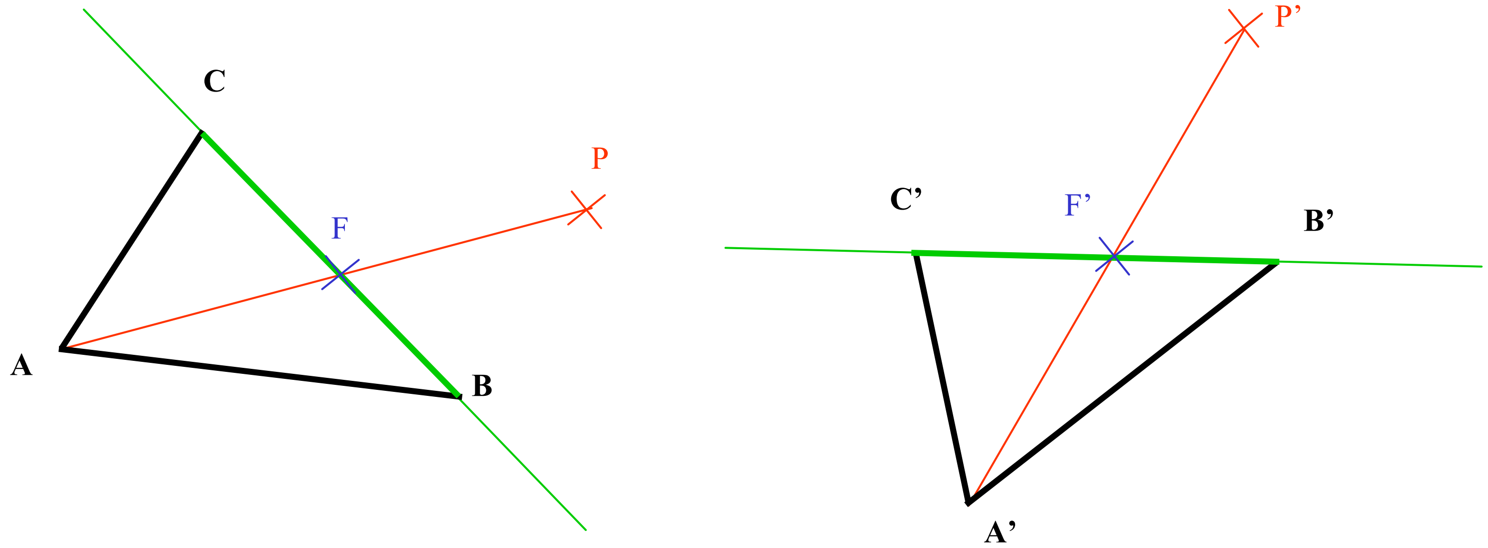
Geradentreue und Längentreue $\Rightarrow \quad \overline{BF} = \overline{B'F'} \quad , \quad \overline{CF} = \overline{C'F'}$

$\Rightarrow$ **F'** eindeutig bestimmt .

P' liegt auf **A'F'** .

Längentreue $\Rightarrow \quad \overline{F'P'} = \overline{FP}$

P' eindeutig bestimmt.



2.Fall: **AP** schneidet die Gerade **BC** nicht.

$\Rightarrow$ **zur Übung selbst bearbeiten.**

3.Fall: P=A. $\Rightarrow$ AP ist nicht definiert.

P'=A' $\Rightarrow$ **P' eindeutig bestimmt.**

2.3 Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen

Experimentieren mit DynaGeo

Demo Drehung

Demo Versch.

Zusammenfassung der Ergebnisse:

Satz 2.7

Die Hintereinanderausführung von 2 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.

Dabei gilt:

Schneiden sich die beiden Achsen in Z unter $\angle\alpha$, so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine **Drehung** um Z um $\angle$ **2**α ersetzen.

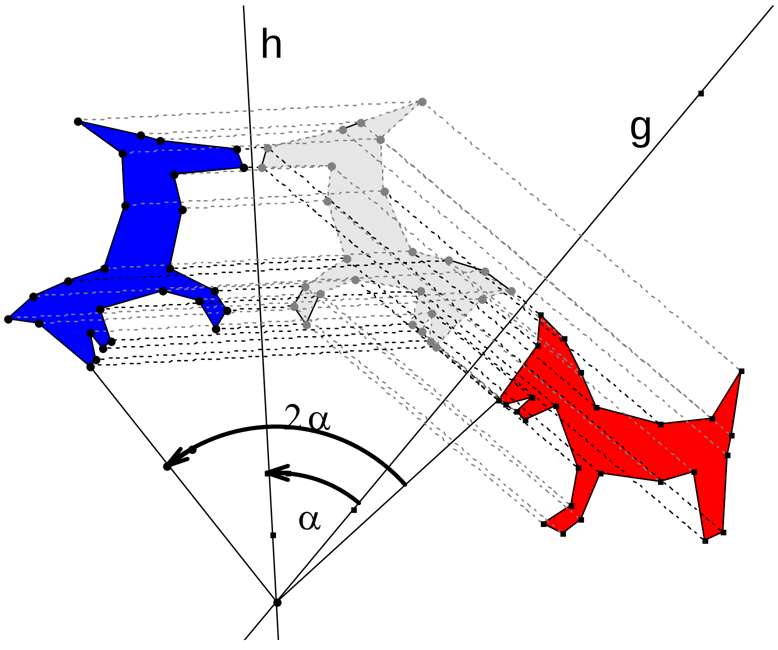
Die Reihenfolge der Achsenspiegelung legt den Winkel fest:

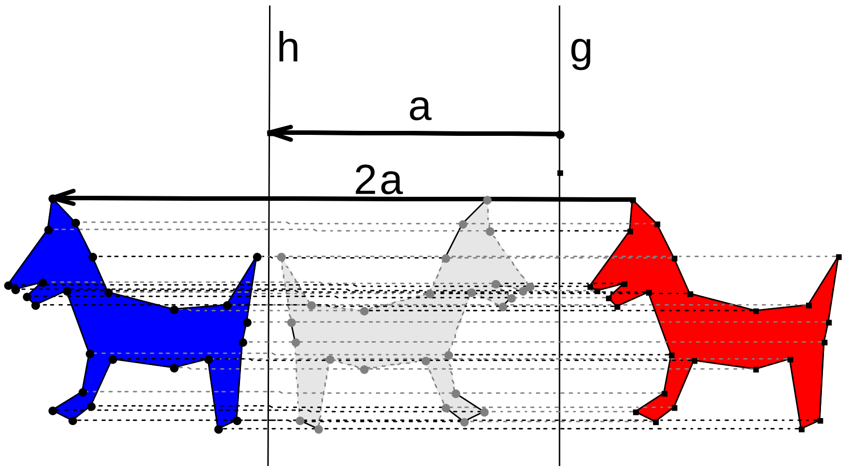
α ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn die erste Spiegelachse im Gegenuhrzeigersinn auf die zweite Spiegelachse gedreht wird.

Sind die beiden Achsen **parallel** im Abstand **a**, so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine **Verschiebung** um **2a** senkrecht zur Achsenrichtung ersetzen.

Die Reihenfolge der Achsenspiegelung legt die Richtung der Verschiebung fest:

Die Verschiebung erfolgt von der ersten Spiegelachse auf die zweite Spiegelachse zu.





Bevor der Satz ausführlich bewiesen wird, geben wir noch die genauere Definition von Drehung und Verschiebung an.

Definition einer Drehung

Definition

Es sei Z ein Punkt der Ebene E, α eine Winkelgröße.

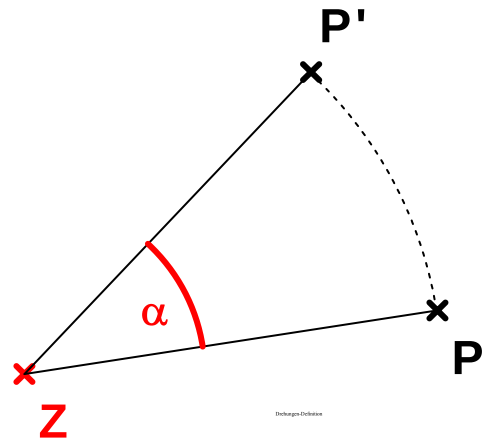
Eine Abbildung $D_{Z,\alpha} : E \rightarrow E$ heißt Drehung

$\Leftrightarrow$ **für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:**

$\overline{P'Z} = \overline{PZ}$

$\angle$ **PZP' = α**

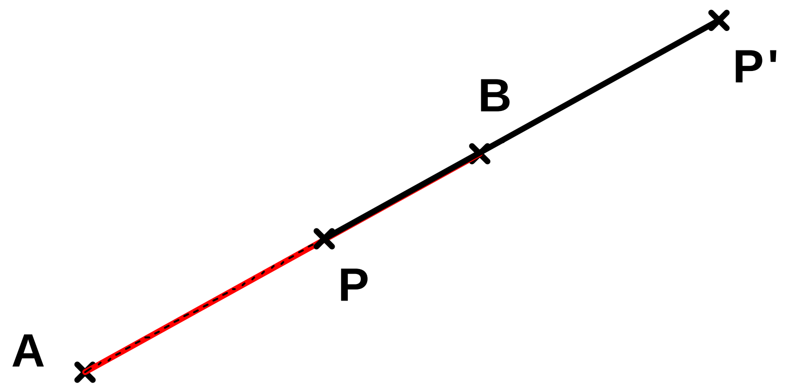
Ist P = Z, so ist P' = Z = P.

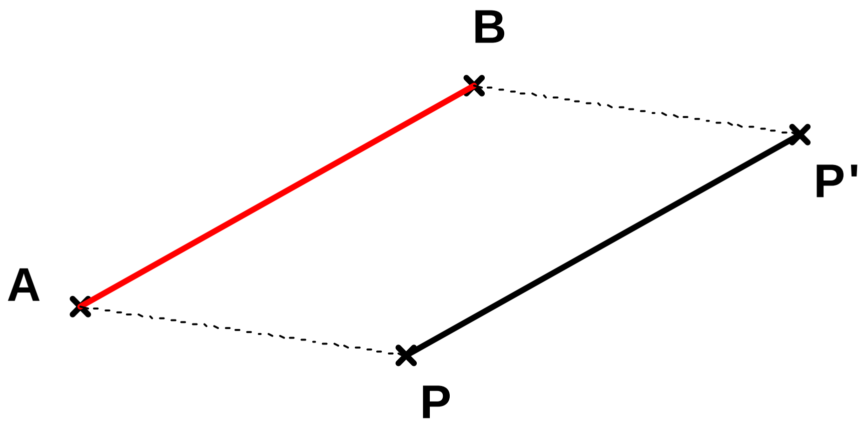


Definition einer Verschiebung

Definition

Es seien A,B zwei verschiedene Punkte der Ebene E.
Eine Abbildung $V_{A,B}$: E $\to$ E heißt Verschiebung um $\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow$ für alle Punkte P der Ebene gilt:
- liegt P auf der Geraden AB, so auch P';
$\overline{PP'}$ und $\overline{AB}$ sind gleichlang und gleichgerichtet.
- Sonst bilden die Punkte ABP'P
(in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm.

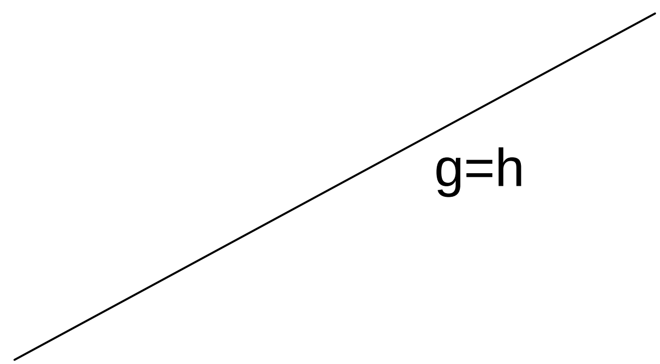




Ausführlicher Beweis des Satzes 2.7.

Gegeben sei die Verkettung der Spiegelung S_g mit S_h .

1.Fall: **g=h** , d.h. Spiegelachsen g und h fallen zusammen.



$S_g = S_h \Rightarrow S_g o S_h = id.$

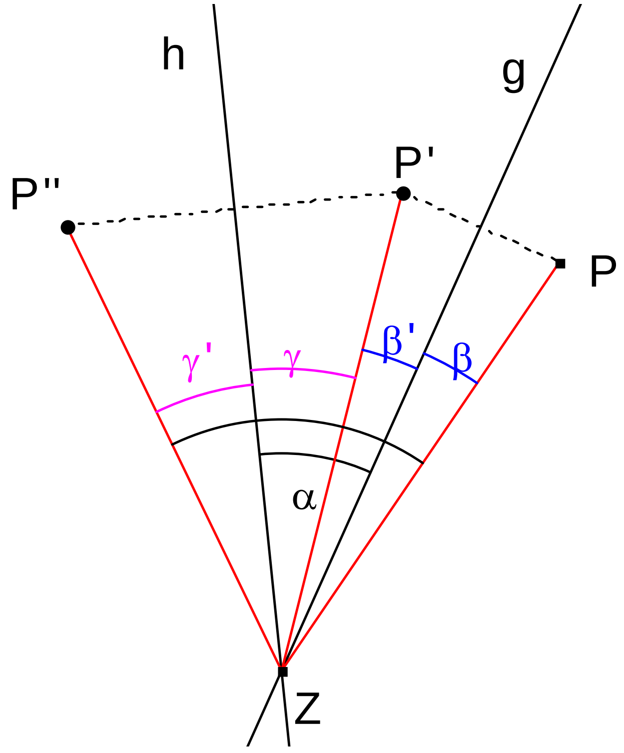
id ist Spezialfall einer **Drehung** (um 0°) **oder**
einer **Verschiebung** (um Nullvektor).

2.Fall: **g und h schneiden sich** in Punkt **Z** unter dem Winkel α.
α ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn man g im Gegenuhrzeigersinn auf h dreht.

Sei P ein beliebiger Punkt, $P' = S_g(P)$ und $P'' = S_h(P')$.

Behauptung:
P'' entsteht aus P durch Drehung um Z um den Winkel 2α .

Wir müssen alle möglichen Lagen von P, P' und P'' bezüglich der Achsen g und h betrachten!



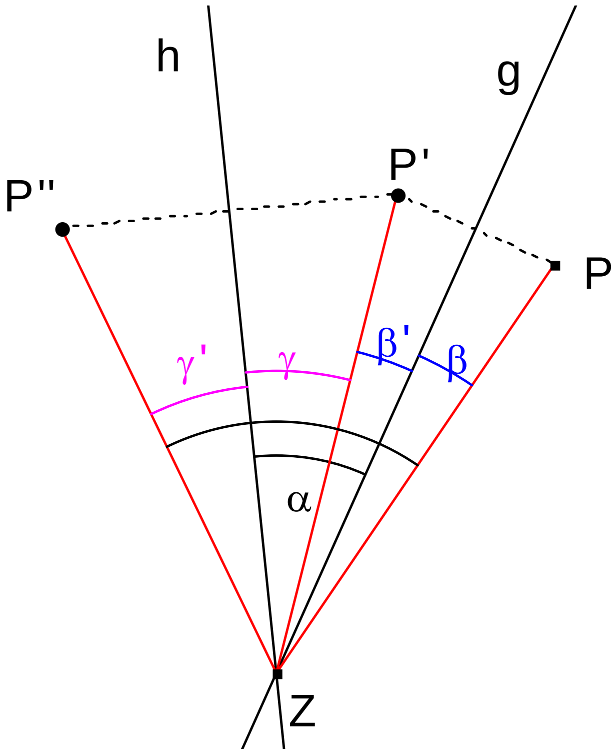
1. Unterfall:

P , P' und P'' liegen wie in der nebenstehenden Abbildung .

1.Behauptung:

P, **P'** und **P''** liegen auf einem **Kreisbogen um Z**.

Klar, da wegen der Längentreue von S_g und S_h gilt $\overline{ZP} = \overline{ZP'} = \overline{ZP''}$



2.Behauptung: $\angle$ **PZP'' = 2α .**

Wegen der Winkeltreue von S_g und S_h ist **β=β'** und **γ=γ'**.

Da $\alpha=\beta'+\gamma = \beta+\gamma$ und

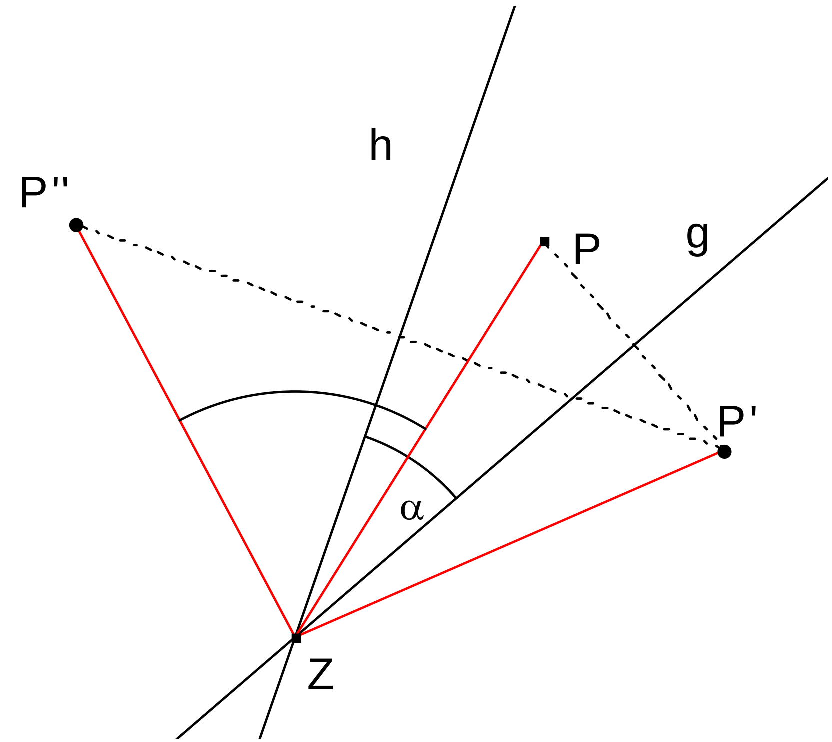
$\angle$ PZP''= $\beta+\beta'+\gamma+\gamma'$ folgt

$\angle$ PZP''= $\beta+\beta+\gamma+\gamma = 2(\beta+\gamma) = 2\alpha$.

Weitere Unterfälle:

Andere Lagen von P, P’, P’’ wie z.B. in der nebenstehenden Abbildung.

→ Übungsaufgabe

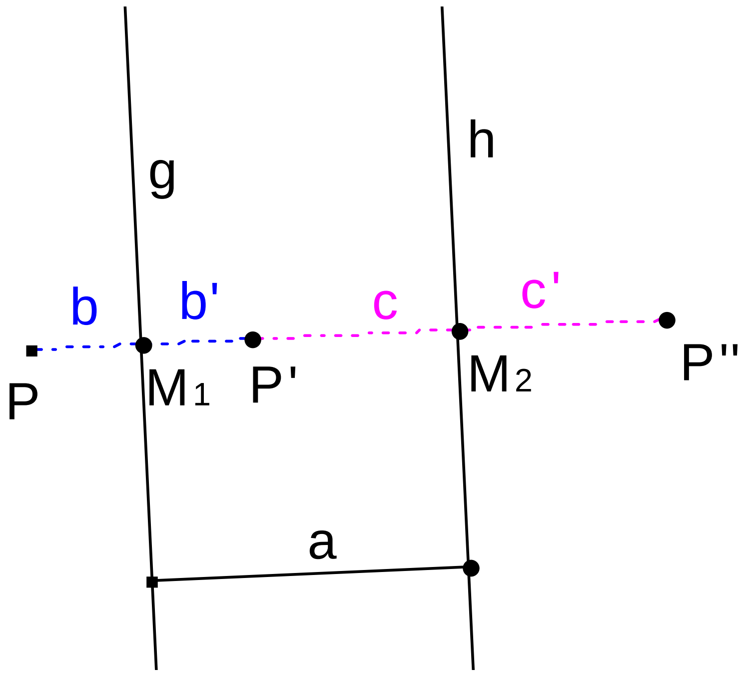


3.Fall: **g || h** **,** **g ≠ h** mit Abstand a.

Sei P ein beliebiger Punkt, P'= S_g(P) und P''= S_h(P').

Behauptung:
P'' entsteht aus P durch Verschiebung um 2a in der Richtung senkrecht von g nach h.

Wir müssen alle möglichen Lagen von P, P' und P'' bezüglich der Achsen g und h betrachten!

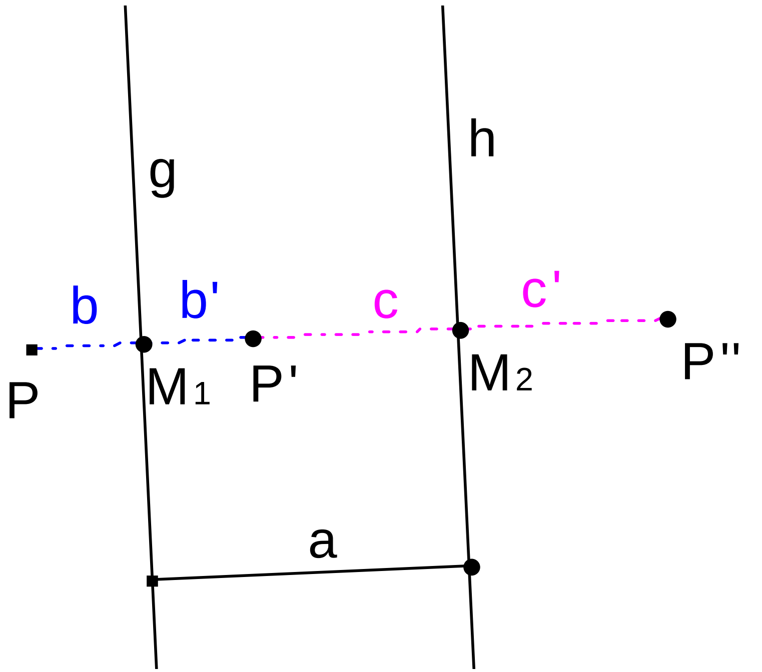


1. Unterfall:

P , P' und P'' liegen wie in der nebenstehenden Abbildung .

1.Behauptung:
P, P' und P'' liegen auf einer Senkrechten zu den Achsen g und h.
Klar nach Definition der Achsenspiegelung!

2.Behauptung: $\overline{PP''} = 2a$.



Nach Definition der Achsenspiegelung ist

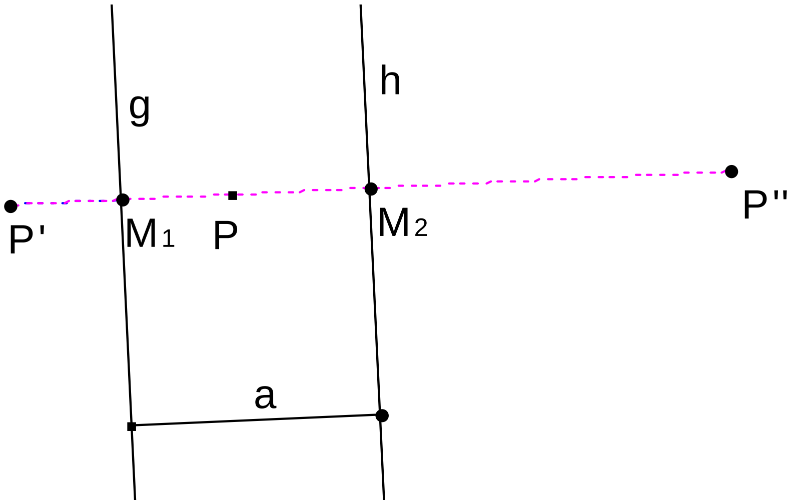
b = $\overline{PM_1} = \overline{M_1P'}$ = b'

c = $\overline{P'M_2} = \overline{M_2P''}$ = c'

a = b'+c $\Rightarrow$ $\overline{PP''}$ = 2b+2c=2a .

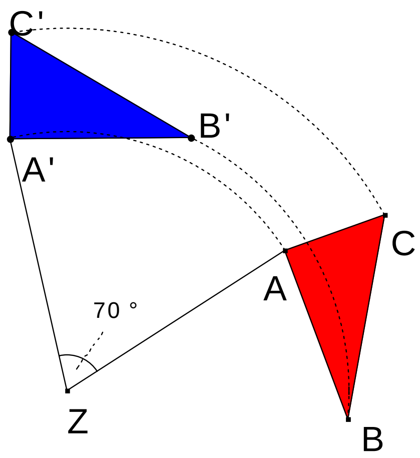
Weitere Unterfälle:

Andere Lagen von P, P', P'' wie z.B. in der nebenstehenden Abbildung.



$\rightarrow$ Übungsaufgabe

Auch die **Umkehrung von Satz 2.7** gilt!



Jede **Drehung** $D_{Z,\alpha}$ lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** ersetzen. Dabei müssen sich die beiden Spiegelachsen in Z unter $\angle \frac{1}{2}\alpha$ schneiden.

Jede **Verschiebung** v lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** an parallelen Achsen im Abstand $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, senkrecht zu $\overrightarrow{v}$, ersetzen. Orientierung des Winkels bzw. Verschiebungsrichtung beachten!

Geben Sie jeweils solche Achsen an.
Welche Bedingungen müssen dafür gelten?

Aufgabe

Konstruieren Sie Achsen für zwei Geradenspiegelungen, deren Verkettung eine Drehung um 90° (180° , 45°) ergibt.

Überprüfen Sie durch Ausführen der Spiegelungen eines Dreiecks, dass sich tatsächlich jeweils die erwartete Drehung ergibt.

Aufgabe

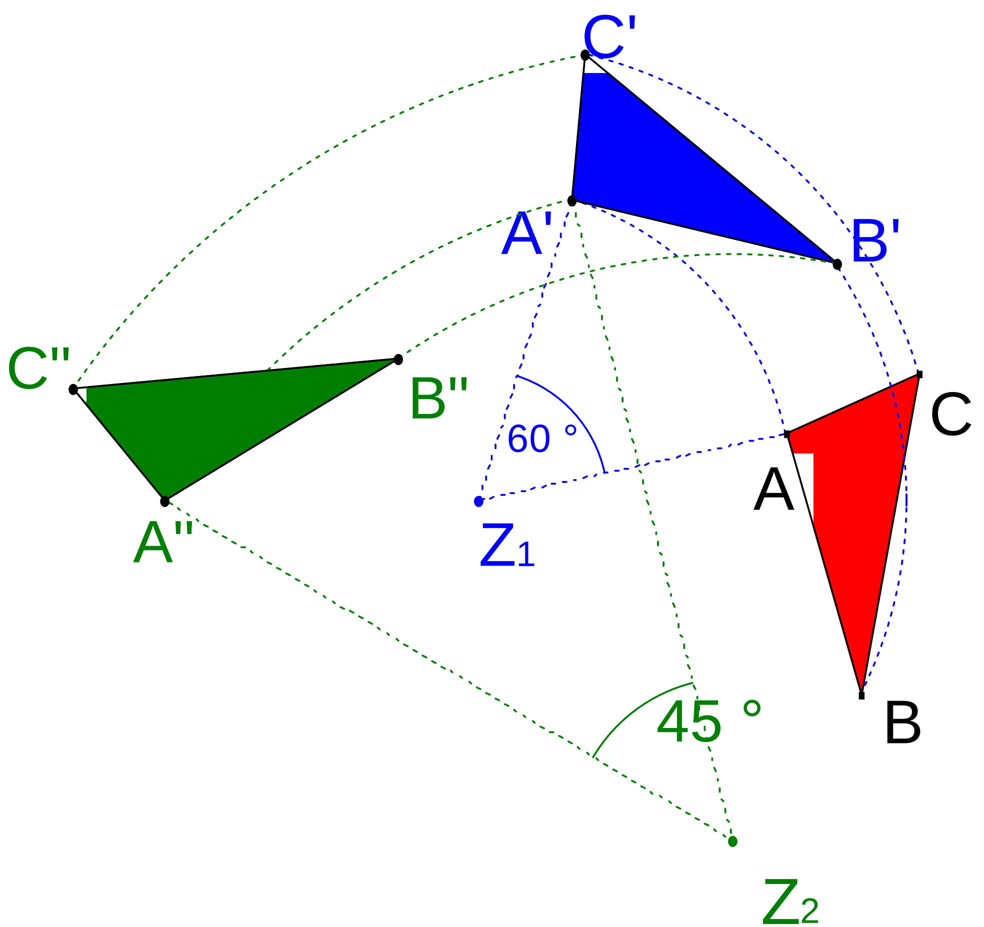
Die Geraden f, g, h gehen durch einen gemeinsamen Punkt, der Winkel $\angle$ f,g zwischen f und g sei 30°, der Winkel $\angle$ g,h sei 70°.

Die Doppelspiegelung $S_f o S_g$ soll durch zwei Achsenspiegelungen dargestellt werden, deren eine Achse h ist. Konstruieren Sie die zweite Achse.

Anwendung von Satz 2.7

Aufgabe

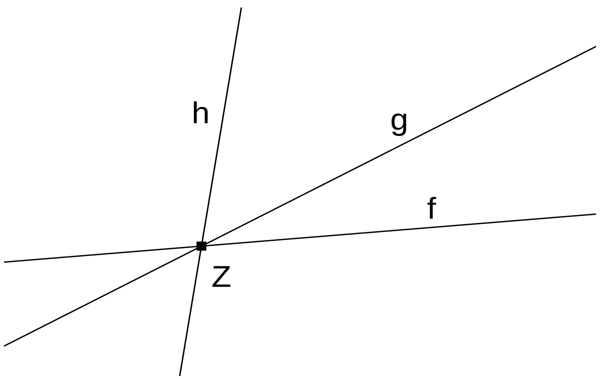
Was kann man über die Verkettung von zwei Drehungen sagen?

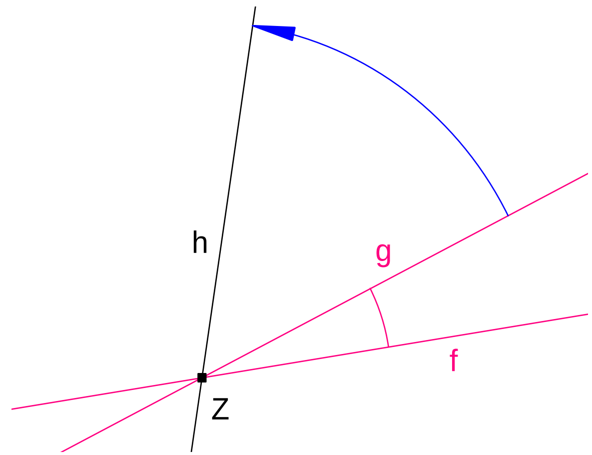


2.4 Hintereinanderausführen von 3 Achsenspiegelungen

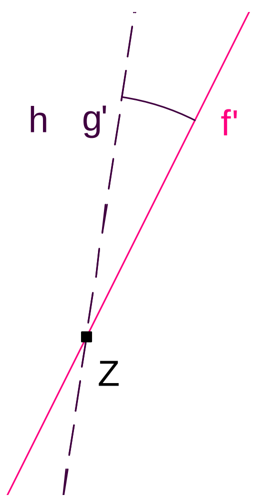
Die Zahl der zu untersuchenden Fälle von gegenseitiger Lage der Achsen zueinander ist hier viel größer als zuvor.

1.Fall: Die Achsen schneiden sich in einem Punkt.





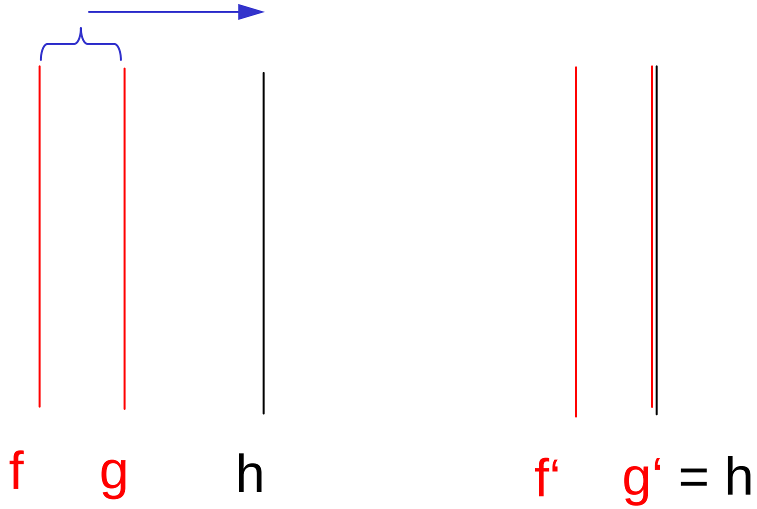
Die Drehung des Achsenpaares (f,g) um Z ändert die Verkettung $S_f \circ S_g$ nicht.



$$S_f \circ S_g \circ S_h = (S_f \circ S_g) \circ S_h =$$
$$(S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h = S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) =$$
$$S_{f'} \circ id = S_{f'}$$

$\Rightarrow$ ***eine* Achsenspiegelung an f'**

2.Fall: Die 3 Achsen sind parallel.

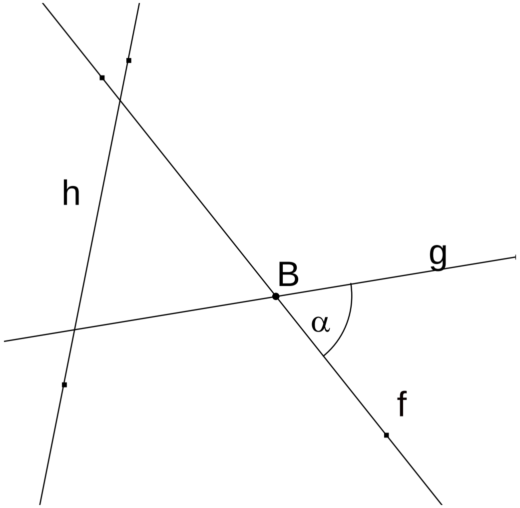


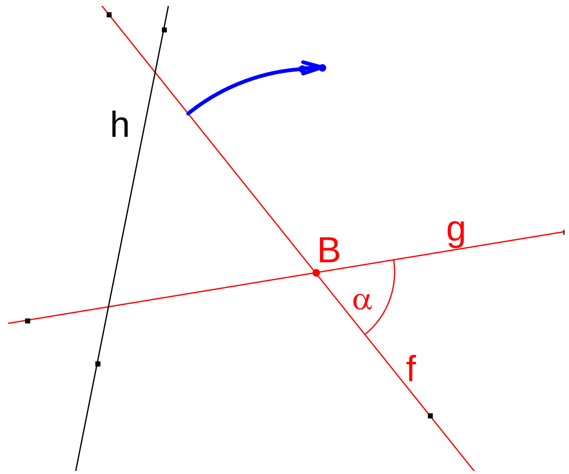
Die Verschiebung des Achsenpaares (f,g) ändert die Verkettung $S_f \circ S_g$ nicht.

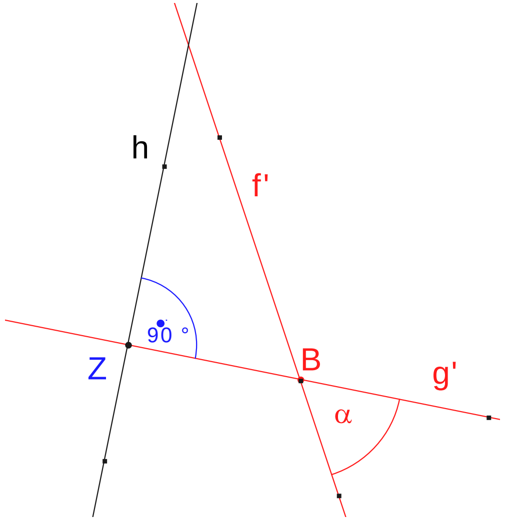
$$
\begin{aligned}
S_f \circ S_g \circ S_h &= \\
(S_f \circ S_g) \circ S_h &= \\
(S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h &= \\
S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) &= \\
S_{f'} \circ \mathrm{Id} &= S_{f'}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ***eine* Achsenspiegelung $S_{f'}$ an f’ .**

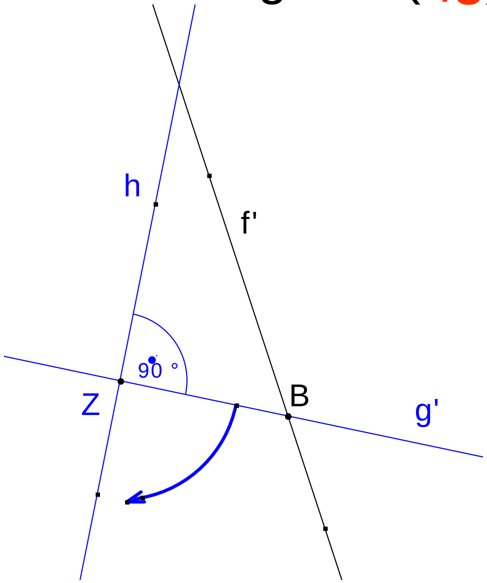
3.Fall: Die Achsen bilden ein Dreieck.

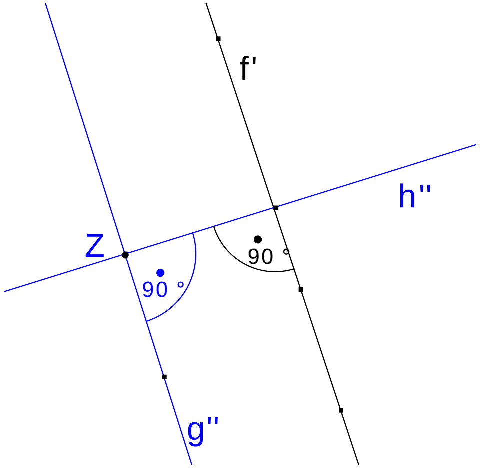






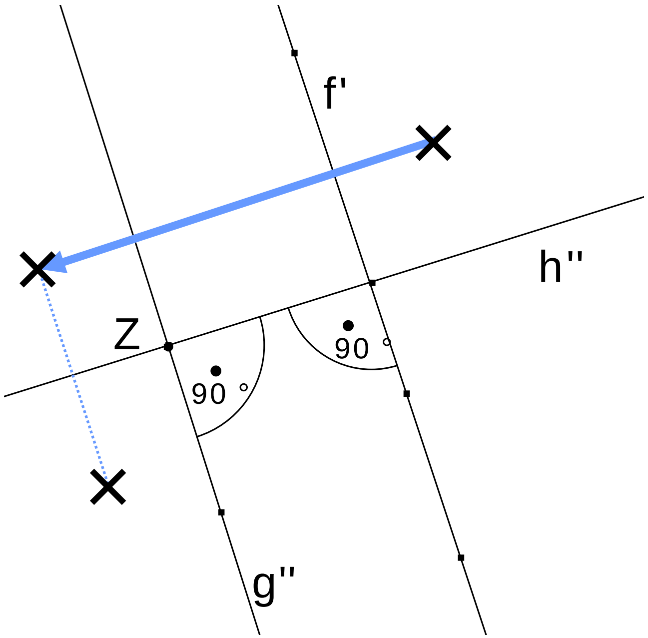
1. Drehung von (**f,g**) um **B** , so dass **g‘** ⊥ **h**, **Z** Schnittpunkt von **g’** und **h**.





$$S_f \circ S_g \circ S_h =$$
$$(S_f \circ S_g) \circ S_h =$$
$$(S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h =$$
$$S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) =$$
$$S_{f'} \circ (S_{g''} \circ S_{h''}) =$$
$$(S_{f'} \circ S_{g''}) \circ S_{h''}$$

2. Drehung von (**g‘,h**) um **Z** so, dass **h“** ⊥ **f‘**



($S_{f'} \circ S_{g''}$) ist **Verschiebung** parallel zur Spiegelachse h“ .

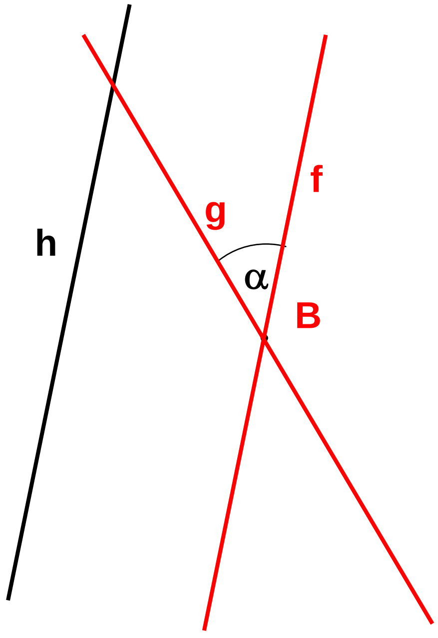
Danach **Spiegelung an h’’**.

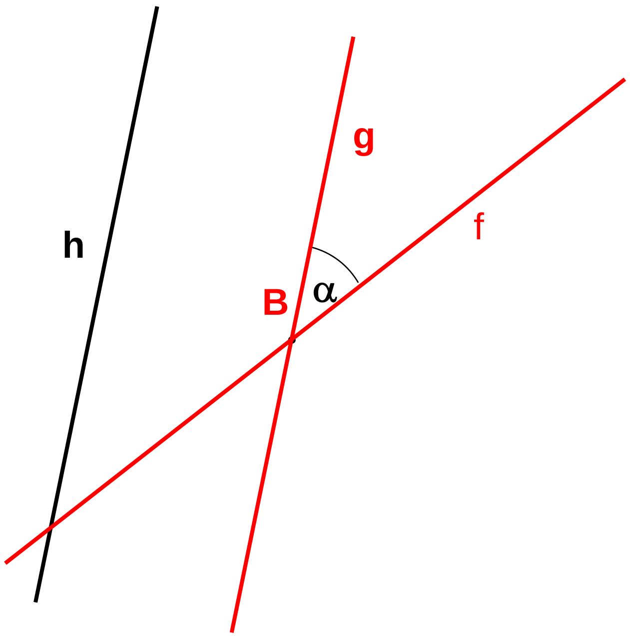
⇒ **Verschiebung gefolgt von einer Spiegelung an einer zur Verschiebungsrichtung parallelen Achse.**

Solche Kongruenzabbildungen bezeichnen wir als „Schubspiegelung“.

4.Fall: 2 Achsen sind parallel.

1. Unterfall: f || h oder g || h

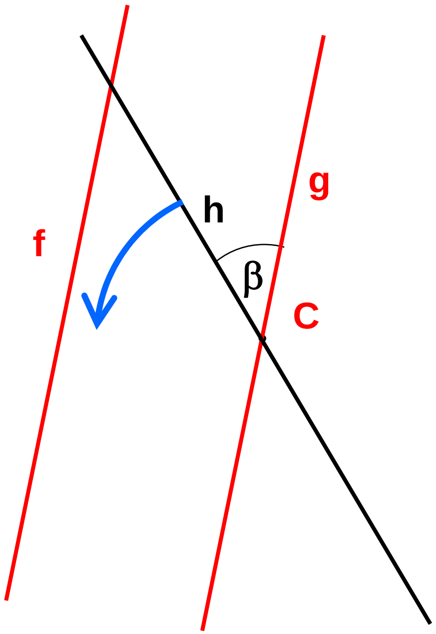


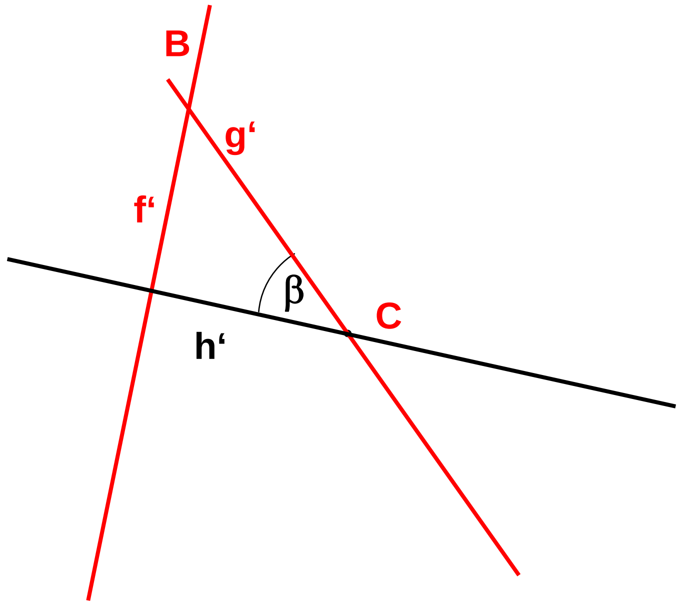


Hier kann der Beweis wie zuvor durchgeführt werden:
Drehen von Achsenpaar (**f,g**) um ihren Schnittpunkt **B**
usw.

$\Rightarrow$ **Schubspiegelung**

2. Unterfall: f || g.





Drehen von Achsenpaar (**h**,**g**) um ihren Schnittpunkt **C**,
so dass sich **f‘** und **g‘** in einem Punkt B schneiden.

$\Rightarrow$ Lage wie im 3.Fall , der Beweis kann wieder wie zuvor zu Ende geführt werden.

$\Rightarrow$ **Schubspiegelung**

Damit haben wir bewiesen:

Satz 2.8
Die Hintereinanderausführung von 3 Achsenspiegelungen ist eine Achsenspiegelung oder eine Schubspiegelung.

Die bislang als Verkettung von Achsenspiegelungen gewonnenen Kongruenzabbildungen Drehung, Verschiebung und Schubspiegelung sollen jetzt jeweils noch auf andere Art definiert werden.

2.5 Drehungen und ihre Eigenschaften

Definition 2.3

Es sei Z ein Punkt der Ebene E, α eine Winkelgröße.

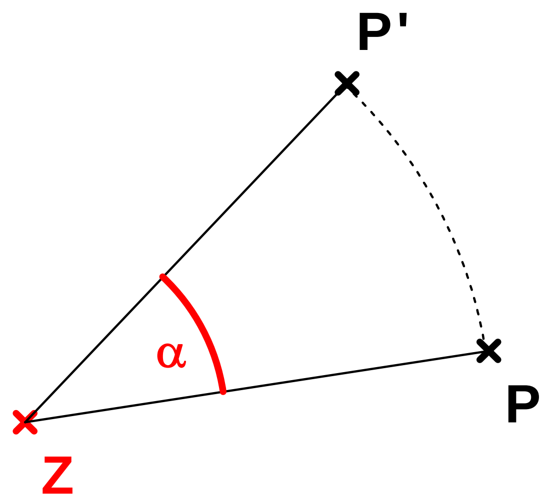
Eine Abbildung $D_{Z,\alpha}$: E $\rightarrow$ E heißt Drehung

$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:

$\overline{P'Z} = \overline{PZ}$

$\angle$ **PZP' = α**

Ist P = Z, so ist P' = Z = P.



Eigenschaften einer Drehung $D_{Z,\alpha}$:

$$D_{Z,\alpha}^{\ -1} = D_{Z,-\alpha} = D_{Z,360°-\alpha}$$

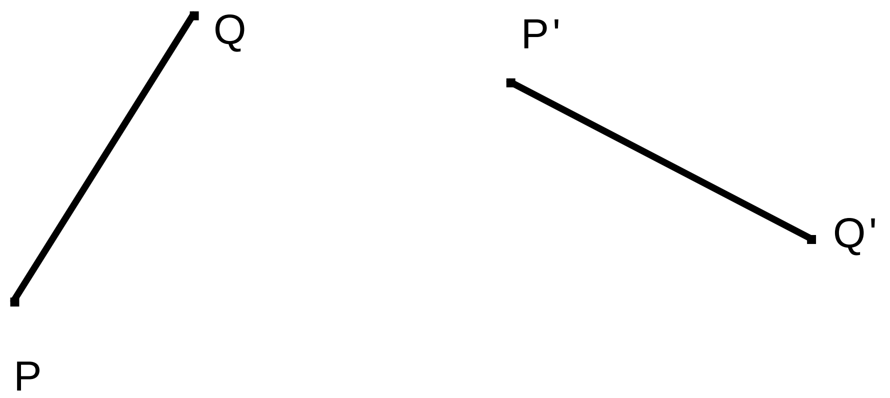
2 verschiedene Punktepaare (P,P'), (Q,Q') legen die Drehung eindeutig fest (falls es eine solche gibt).

Aufgabe

Zeigen Sie, dass es zu zwei gleich langen nicht parallelen Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ genau eine Drehung gibt, die P auf P‘ und Q auf Q‘ abbildet.

Konstruieren Sie eine solche

- durch Konstruktion eines Zentrums Z und des Drehwinkels α ,
- durch Konstruktion von zwei Achsenspiegelungen.



Weitere Eigenschaften einer Drehung $D_{Z,\alpha}$:

Fixelemente von $D_{Z,\alpha}$ (für $\alpha \neq 0°$)

Fixpunkte: Z
Fixpunktgeraden: keine
Fixgeraden: keine (für $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$).

Invarianten

geradentreu,
längentreu,
winkelmaßtreu,
flächeninhaltstreu,
umlaufsinntreu.

Weitere beweisbare Eigenschaften

Ist $Z \in g$, so ist $Z \in g'$,
Gerade und Bildgerade haben von Z denselben Abstand ,
Gerade und Bildgerade schneiden sich unter α (Begründung?).

Punktspiegelung (Sonderfall der Drehung; Drehwinkel α = 180°)

Definition 2.4

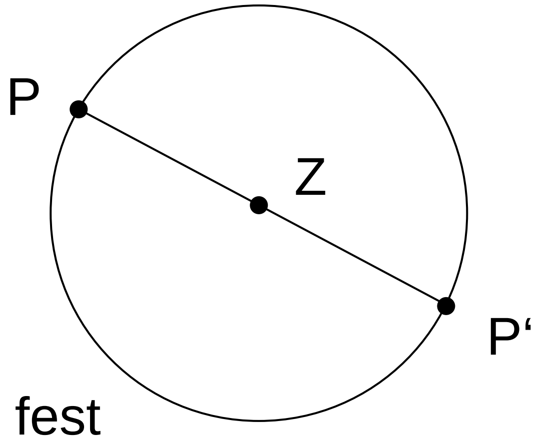
Sei Z ein Punkt der Ebene E.

Eine Abbildung heißt Punktspiegelung an Z

$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P‘ gilt:

Ist P = Z, so ist P' = Z = P

sonst halbiert Z die Strecke $\overline{PP'}$.



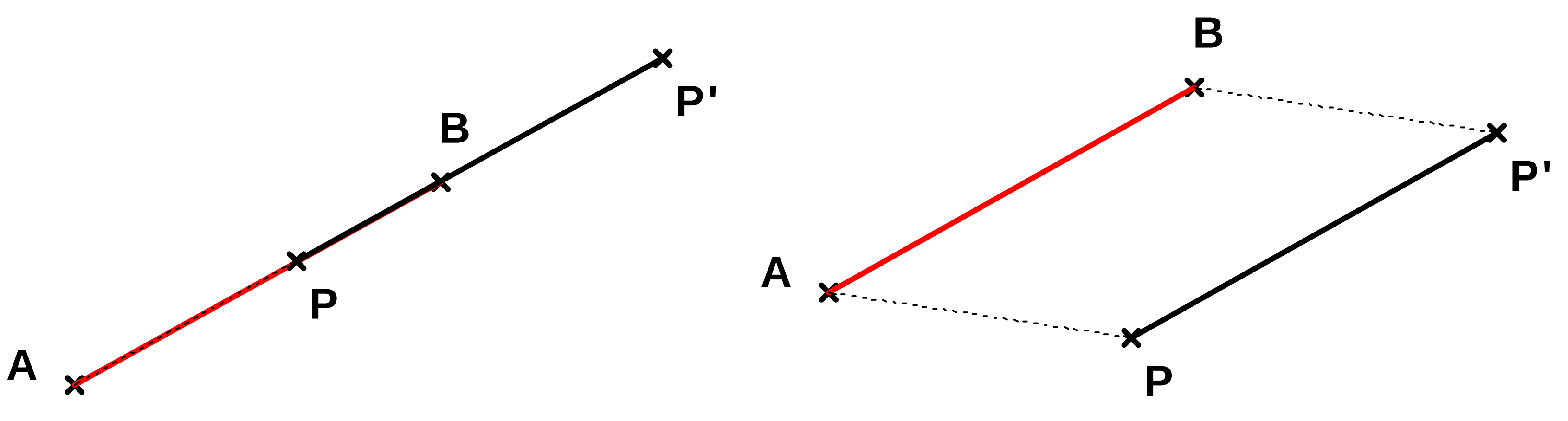
Zusätzliche Eigenschaften einer Punktspiegelung (gegenüber einer Drehung)

- $D_{Z,180}{}^{-1} = D_{Z,180}$,
- $D_{Z,180}$ liegt durch ***ein*** Punktepaar (P,P') eindeutig fest (falls P $\neq$P'),
- alle Geraden durch Z sind Fixgeraden,
- g' || g (Originalgerade und Bildgerade sind parallel).

2.6 Verschiebungen und ihre Eigenschaften

Definition 2.5

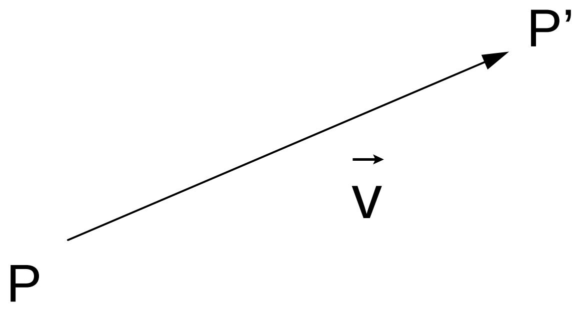
Es seien A,B zwei verschiedene Punkte der Ebene E.
Eine Abbildung $V_{A,B}$: E $\rightarrow$ E heißt Verschiebung um $\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow$ für alle Punkte P der Ebene gilt:
- liegt P auf der Geraden AB, so auch P';
$\overline{PP'}$ und $\overline{AB}$ sind gleichlang und gleichgerichtet.
- Sonst bilden die Punkte ABP'P
(in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm.



Eigenschaften einer Verschiebung $V_{A,B}$:

$$V_{A,B}^{-1} = V_{B,A}$$

Eine Verschiebung liegt durch 1 Punktepaar (P,P') eindeutig fest. Wir veranschaulichen die durch das Punktepaar (P,P') festgelegte Verschiebung oft durch einen Pfeil von P nach P' und schreiben auch $V_{\vec{v}}$.



Fixelemente von $V_{A,B}$: (für $A \neq B$)

- keine Fixpunkte,
- alle Geraden parallel zu AB sind Fixgeraden.

Invarianten:

- geradentreu,
- winkelmaßtreu,
- längentreu,
- flächeninhaltstreu,
- Umlaufsinn bleibt erhalten.

Zusätzliche Eigenschaft:

$g' \parallel g$ (d.h. Originalgerade und Bildgerade sind parallel).

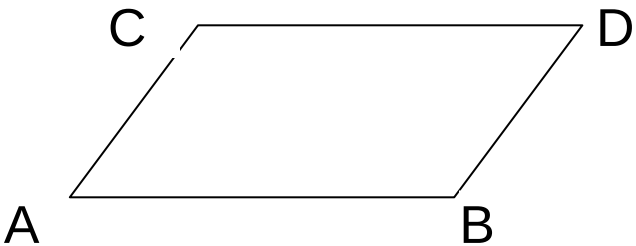
Begründung?

Aufgabe

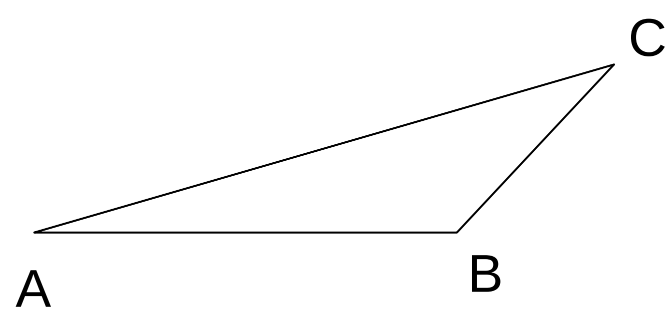
(a) ABDC sei ein Parallelogramm. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass gilt $V_{A,B} = V_{C,D}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass für die Verkettung von zwei Verschiebungen gilt $V_{A,B} \circ V_{B,C} = V_{A,C}$.

Zu (a)



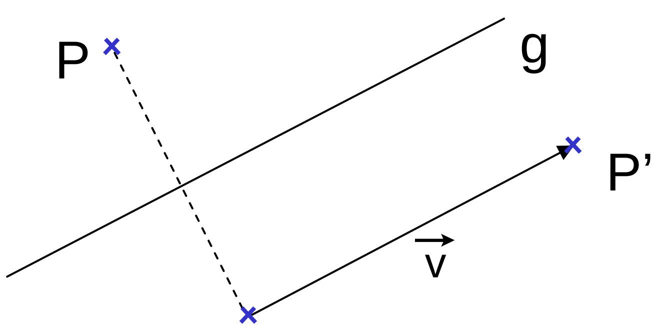
Zu (b)



2.6 Schubspiegelungen (Gleitspiegelungen) und ihre Eigenschaften

Definition 2.6
Schubspiegelungen sind Abbildungen, die aus dem Hintereinanderausführen einer Achsenspiegelung und einer Verschiebung bestehen.
Dabei liegt die <u>Spiegelachse parallel zur Verschiebungsrichtung</u>.

Schubspiegelung $Sch_{g,\vec{v}}$

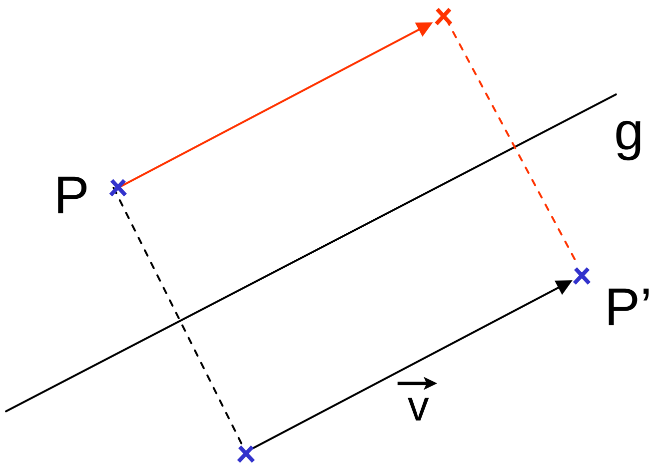


Eigenschaften einer Schubspiegelung $Sch_{g,\vec{v}}$

- Schubspiegelungen sind Verkettungen von Spiegelungen an 3 Achsen, von denen die ersten beiden parallel zueinander sind und die dritte senkrecht dazu ist.

- Man kann die Reihenfolge von Verschiebung und Achsenspiegelung vertauschen, wenn die Verschiebung parallel zur Spiegelachse verläuft:

$$V_{\vec{v}} \circ S_g = S_g \circ V_{\vec{v}}$$



Aufgabe:

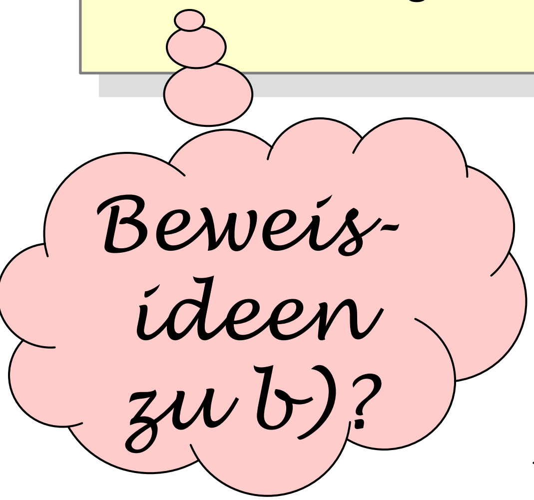
Verkettung einer *beliebigen* Verschiebung mit einer Spiegelung

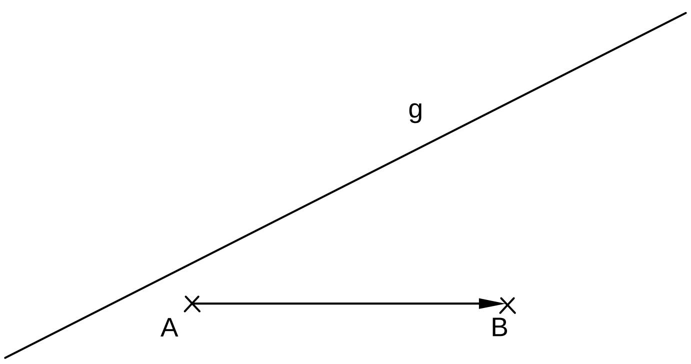
Gegeben ist eine Verschiebung V_{AB} und eine Achsenspiegelung S_g. Die Entfernung von A und B soll 6 cm betragen, g mit AB einen Winkel von 30° einschließen (Skizze).

a) Zeigen Sie, dass $V_{AB} \circ S_g \neq S_g \circ V_{AB}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $V_{AB} \circ S_g$ eine Schubspiegelung ergibt.

Markieren Sie die Spiegelachse und den Verschiebungsvektor. Beschreiben Sie, wie die neue Spiegelachse und der Verschiebungsvektor mit g und dem alten Verschiebungsvektor zusammenhängen.



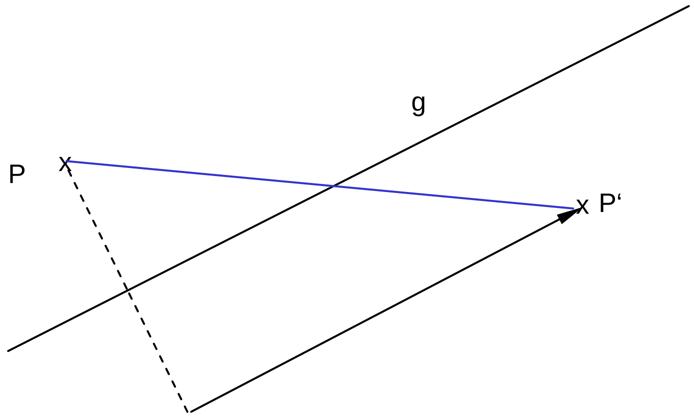


Aufgabe: Eigenschaften von Schubspiegelungen.

Beweisen Sie den folgenden **Satz**:

Bei einer Schubspiegelung liegt für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P’ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PP'}$ auf der Spiegelachse.

Untersuchen Sie, ob dieser Satz auch richtig wäre, wenn man bei der Definition der Schubspiegelung die Bedingung „der Verschiebungsvektor ist parallel zur Spiegelachse“ wegließe.



2.8 Kongruenzabbildungen - Produkte von Achsenspiegelungen

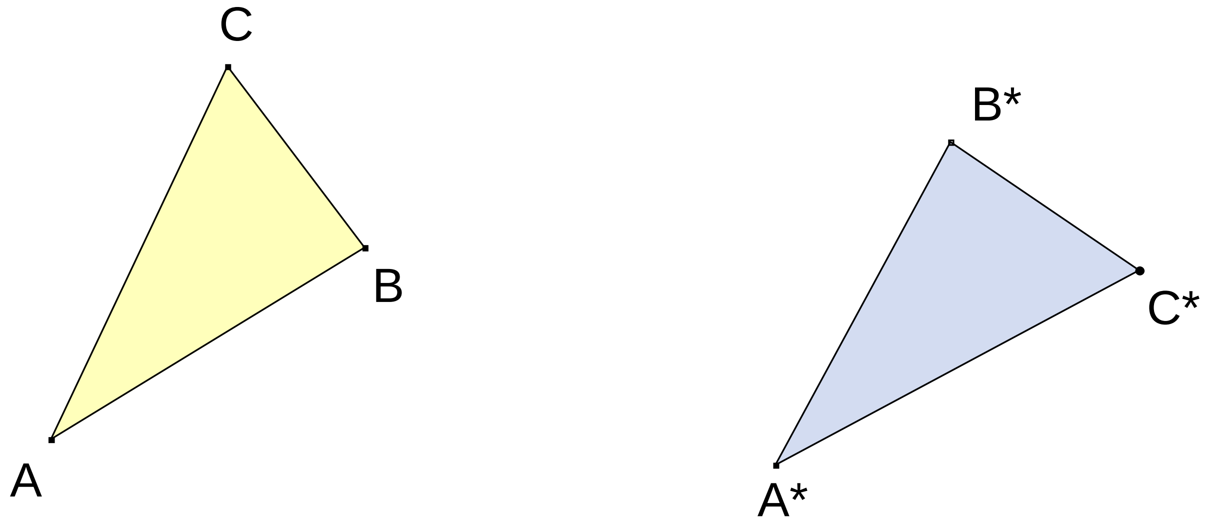
Nach dieser Vorarbeit: Klassifizierung aller Kongruenzabbildungen.

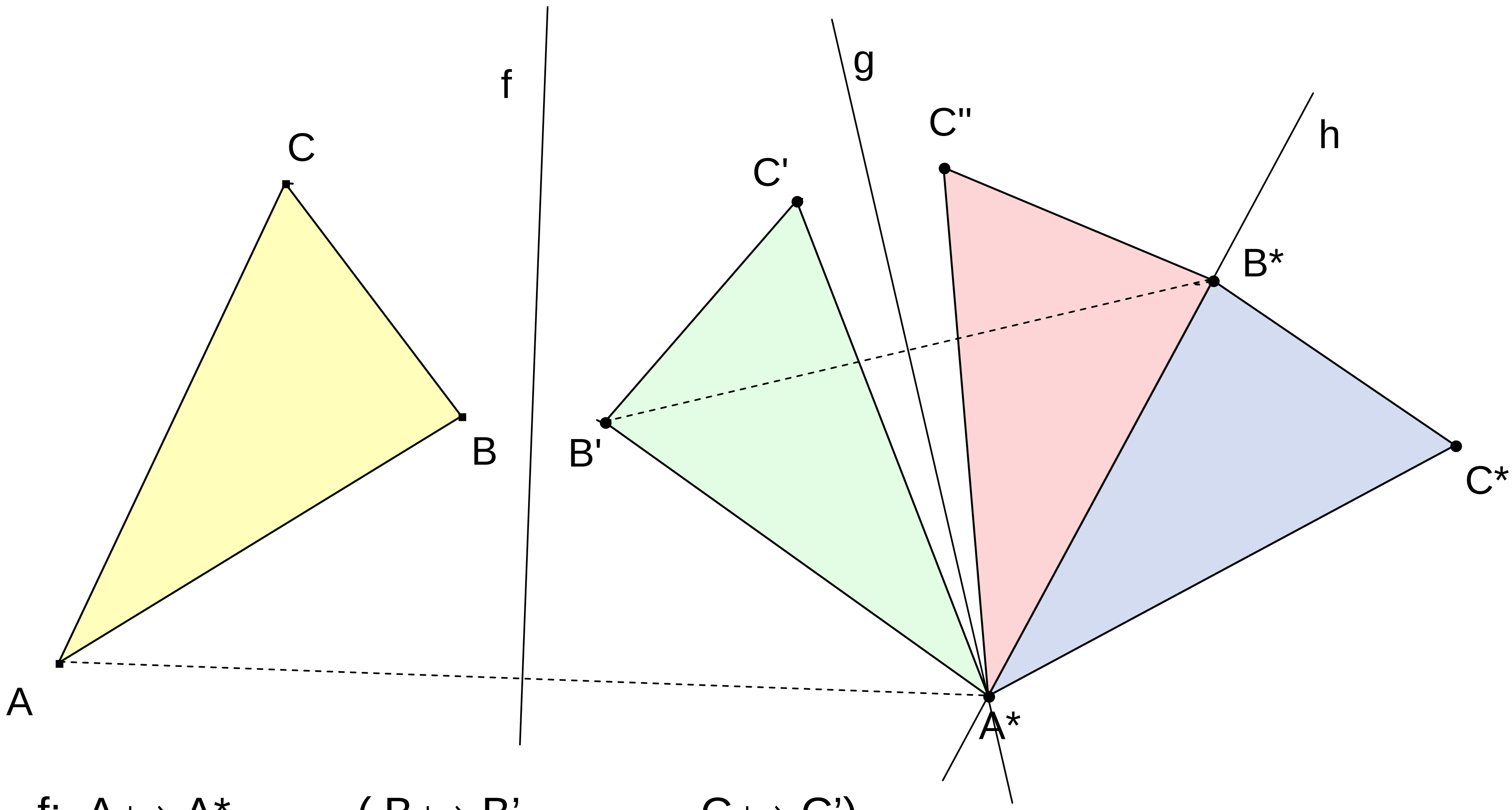
Zusammenfassung des bisherigen Vorgehens:

- Kongruenzabbildungen sind bijektive, geradentreue, längentreue Abbildungen der Ebene.
- Achsenspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.
- Verkettung von Achsenspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.
- Jede Kongruenzabbildung ist durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig festgelegt.
- Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen ergeben folgende Abbildungstypen :
  - ► Achsenspiegelung bei 1 Achse (gegensinnige Abbildung),
  - ► Drehung oder Verschiebungen bei 2 Achsen (gleichsinnige Abbildung),
  - ► Schubspiegelung oder Achsenspiegelung bei 3 Achsen (gegensinnige Abbildung).

Ziel:
Jede Kongruenzabbildung ist durch höchstens 3 Achsenspiegelungen darstellbar.
Dazu beweisen wir zunächst den folgenden Satz.

Satz 2.9
Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und A*B*C* mit gleich langen Seiten.
Dann lässt sich Dreieck ABC auf Dreieck A*B*C* durch eine Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen abbilden.





f: A $\mapsto$ A* , (B $\mapsto$ B’, C $\mapsto$ C’)

g: B’$\mapsto$ B* ; A* bleibt fest, (C’$\mapsto$ C’’)

h: C’’ $\mapsto$ C* ; A* und B* bleiben fest.

Satz 2.10

Jede Kongruenzabbildung lässt sich als Einfach-, Zweifach- oder Dreifachspiegelung darstellen.

Beweis

- Zur Kongruenzabbildung f wählt man ein beliebiges Dreieck ABC aus.
- f bildet ABC auf das Dreieck A*B*C* ab.
- A*B*C* hat gleiche Seitenlängen wie ABC.
- Dreieck ABC wird durch eine Verkettung g von ≤ 3 Achsenspiegelungen auf A*B*C* abgebildet (Satz 2.9).
- g ist eine Kongruenzabbildung.
- Kongruenzabbildungen sind durch das Bild eines Dreiecks eindeutig bestimmt (Satz 2.6).
- $\Rightarrow$ f = g, f wird also durch ≤ 3 Achsenspiegelungen dargestellt.

Satz 2.11 (Dreispiegelungssatz)

Die Verkettung von beliebig vielen Achsenspiegelungen lässt sich auf eine Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen reduzieren.

Satz 2.12

Jede Kongruenzabbildung ist von einem der Typen

- **Achsenspiegelung,**
- **Drehung,**
- **Verschiebung,**
- **Schubspiegelung.**

Beweis

Einfache Folgerung aus Satz 2.10. und der Analyse der Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen.

2.9 Hintereinanderausführen von 4 und mehr Geradenspiegelungen

Gezeigt:
Verkettung von beliebig vielen Achsenspiegelungen $\Rightarrow$
Verkettung von $\leq$ 3 Achsenspiegelungen

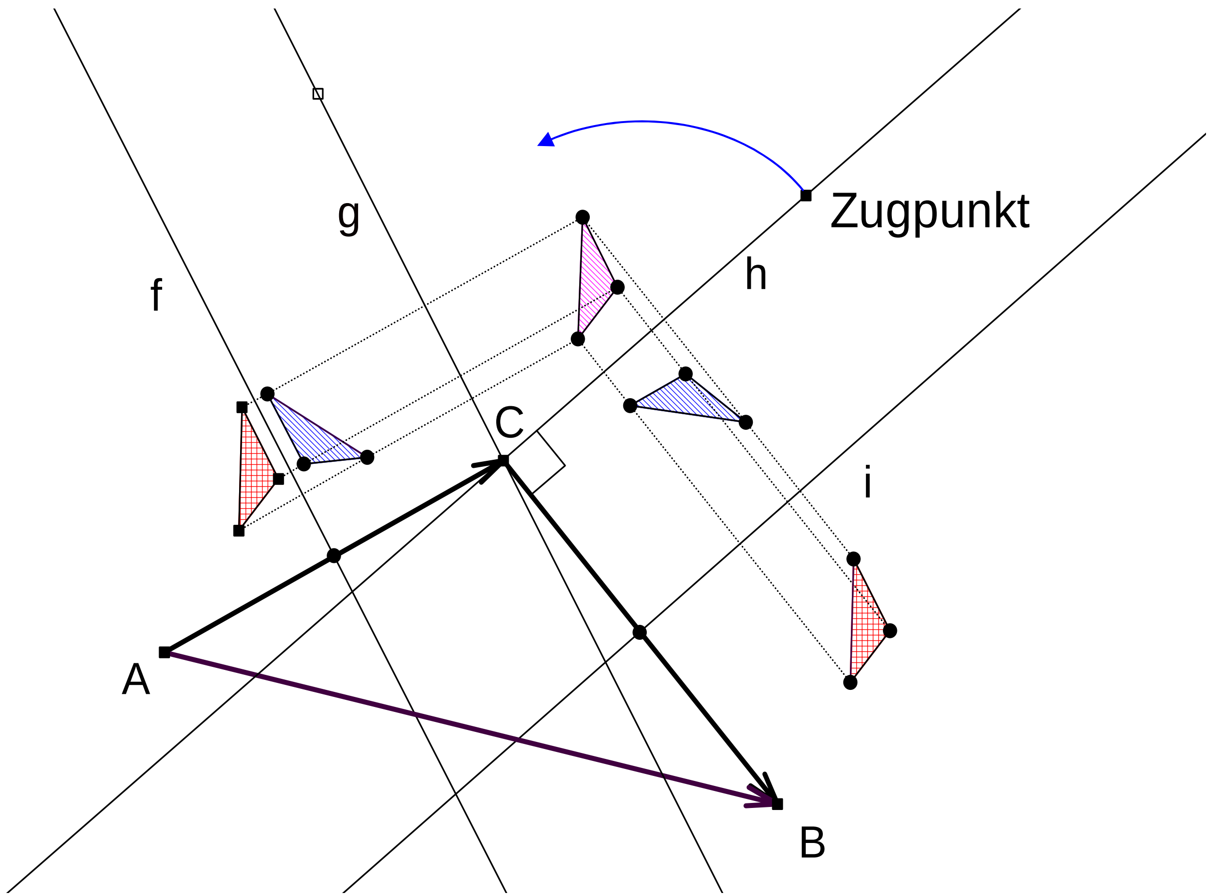
Nicht gezeigt:
Wie ergeben sich diese Achsenspiegelungen aus den gegebenen Achsenspiegelungen?

Verkettung von zwei Drehungen $\Rightarrow$ **Anwendung von Satz 2.7** , Aufgabe

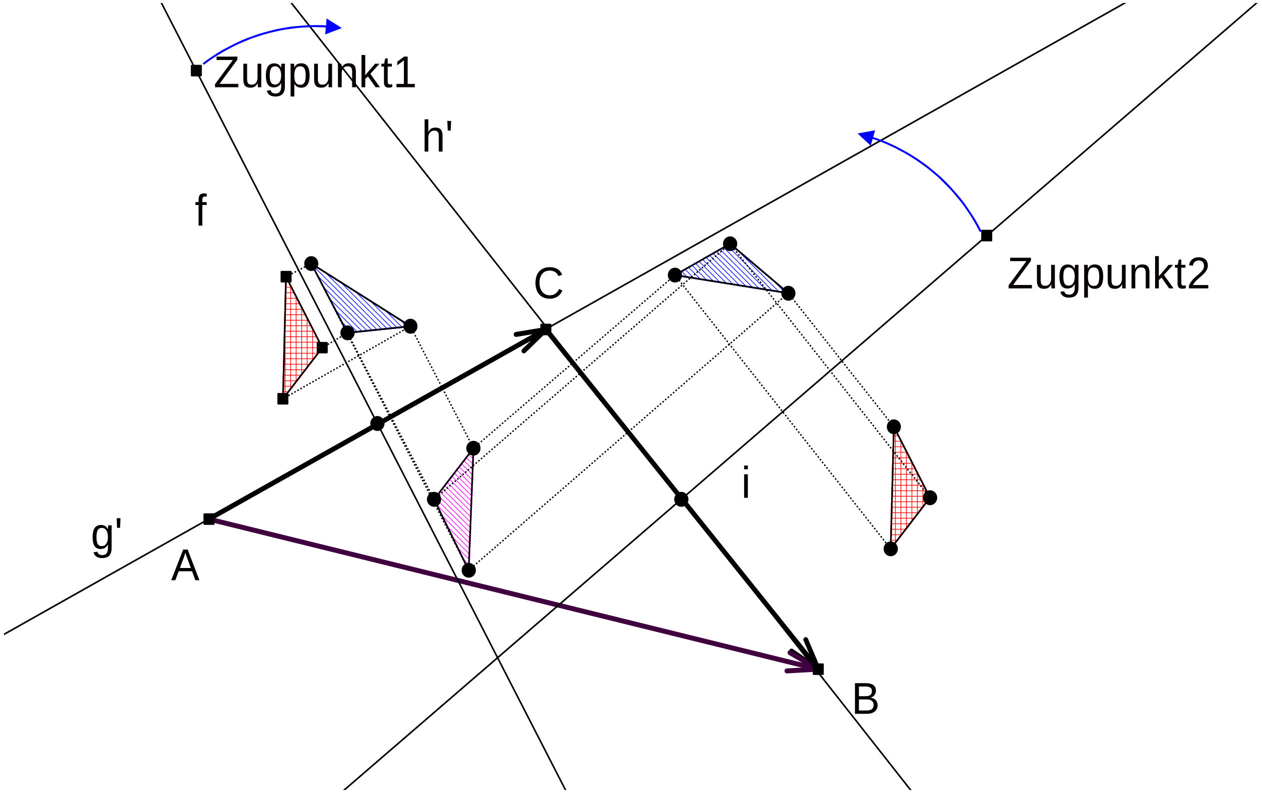
Verkettung von zwei Verschiebungen $\Rightarrow$ nächste Seite

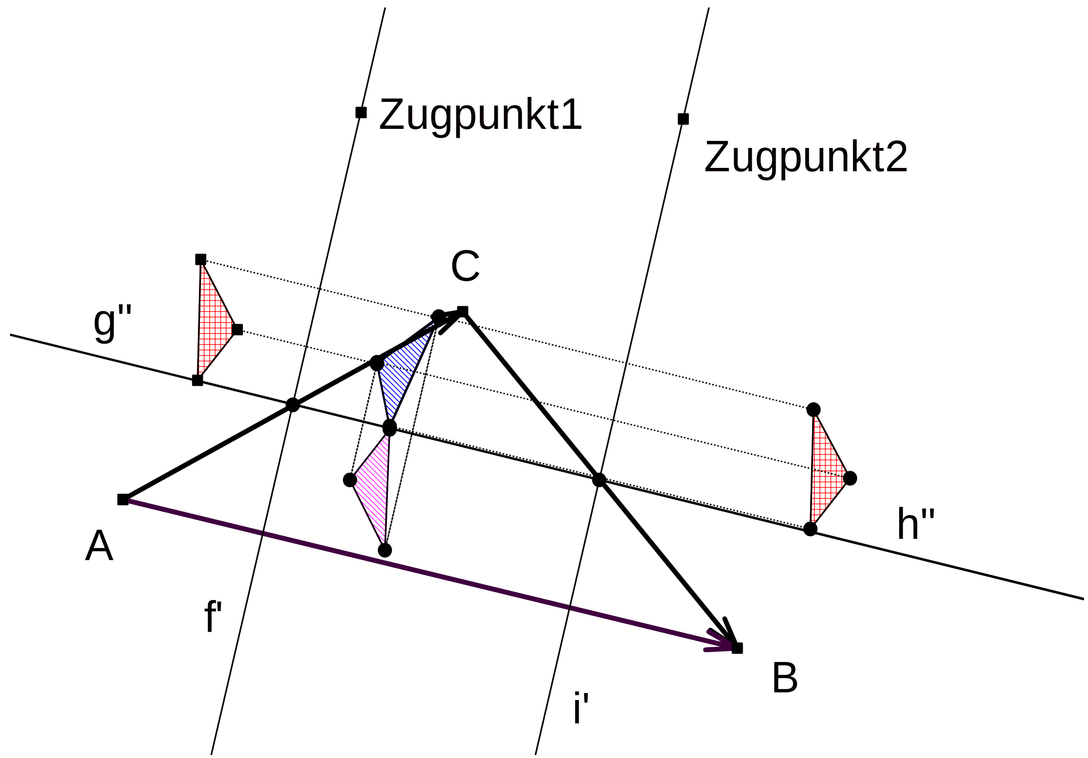
Verkettung einer Verschiebung und einer Drehung $\Rightarrow$ Aufgabe

Verkettung von zwei Verschiebungen



Drehung von (g,h) um C, so dass g’ auf AC fällt


Zugpunkt1
h'
f
C
Zugpunkt2
i
g'
A
B



f‘ und i‘ sind parallel und ihr Abstand ist die Hälfte der Länge der Seite $\overline{AB}$

Wir halten diese Ergebnisse nochmals fest.

Satz 2.13

- **Die Verkettung von zwei Drehungen ist eine Verschiebung, wenn für die Drehwinkel α_1 und α_2 gilt $\alpha_1+\alpha_2=360°$, andernfalls eine Drehung um den Winkel $\alpha_1+\alpha_2$.**
- **Die Verkettung von zwei Verschiebungen ist eine Verschiebung nach den Gesetzen der Vektoraddition.**

Satz 2.14

- **Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.**
- **Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen lässt sich stets ersetzen durch die Verkettung von 2 (geeigneten) Achsenspiegelungen .**

Weiterer Beweis für den Dreispiegelungssatz (Satz 2.11):

Reduktion der Anzahl der Achsenspiegelungen *schrittweise.*

Sei n die Anzahl der Achsenspiegelungen, $n > 4$.

$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 \circ . \quad .. \circ S_n$ =
$(S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4) \circ ... \circ S_n$ =
$(S'_1 \circ S'_2) \circ ... \circ S_n$ wobei $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 = S'_1 \circ S'_2$
(wegen Satz 2.14)

$\Rightarrow$ für $n \geq 4$ lässt sich die Anzahl der Achsenspiegelungen schrittweise um jeweils 2 reduzieren.

$\Rightarrow$ stets Reduktion auf maximal 1, 2 oder 3 Achsenspiegelungen möglich.