Einführung in die Geometrie

SS 2007

Prof.Dr.R.Deissler

Einführung

Literatur

Hintergrund – Geschichte - Grundbegriffe

Vom Wesen der Geometrie

Empirische Wissenschaft	**Formal-logische Theorie**
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente
Experimente, Beobachtungen, Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus **Axiomen** (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als *Hinweis* auf Beweisführungen
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik
Schule, Alltag, Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (sogenanntes lokales Ordnen)

Die Personen

Axiomatische Methode:

Begonnen von
Euklid **300 v.Chr.**

Buch „Elemente“

Euklid-Bild

Die Personen

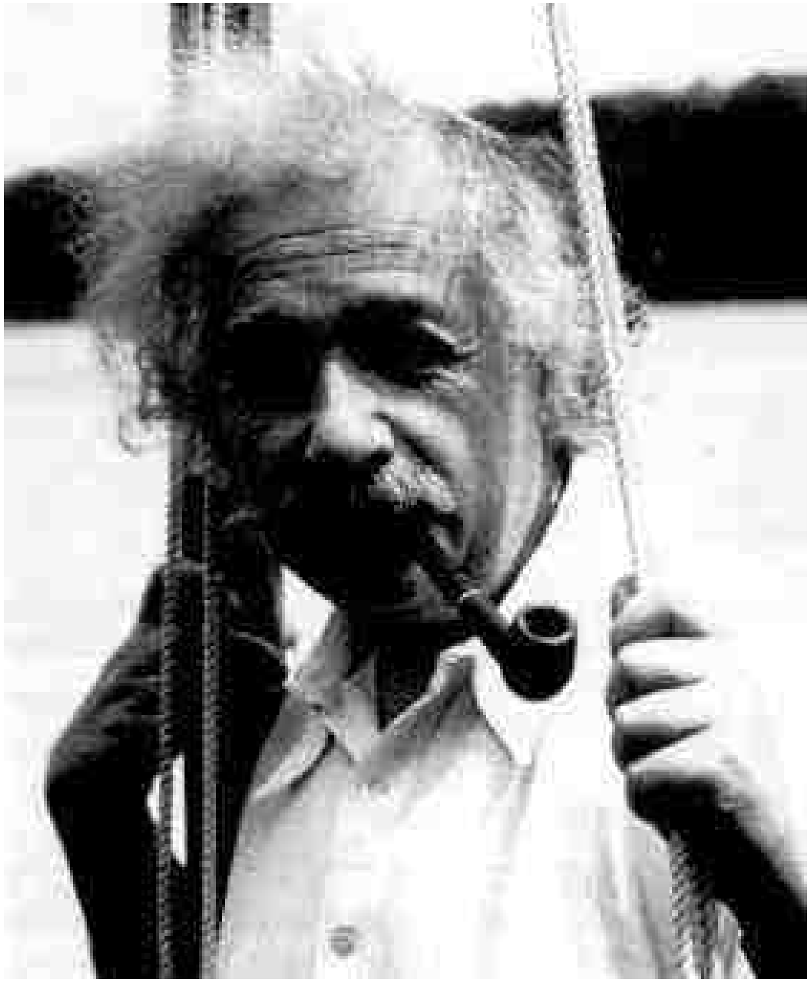
Axiomatische Methode:

Vollendet von
David Hilbert **1900 n.Chr.**

Buch „Grundlagen der Geometrie“

Hilbert-Bild

Die Personen



„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“

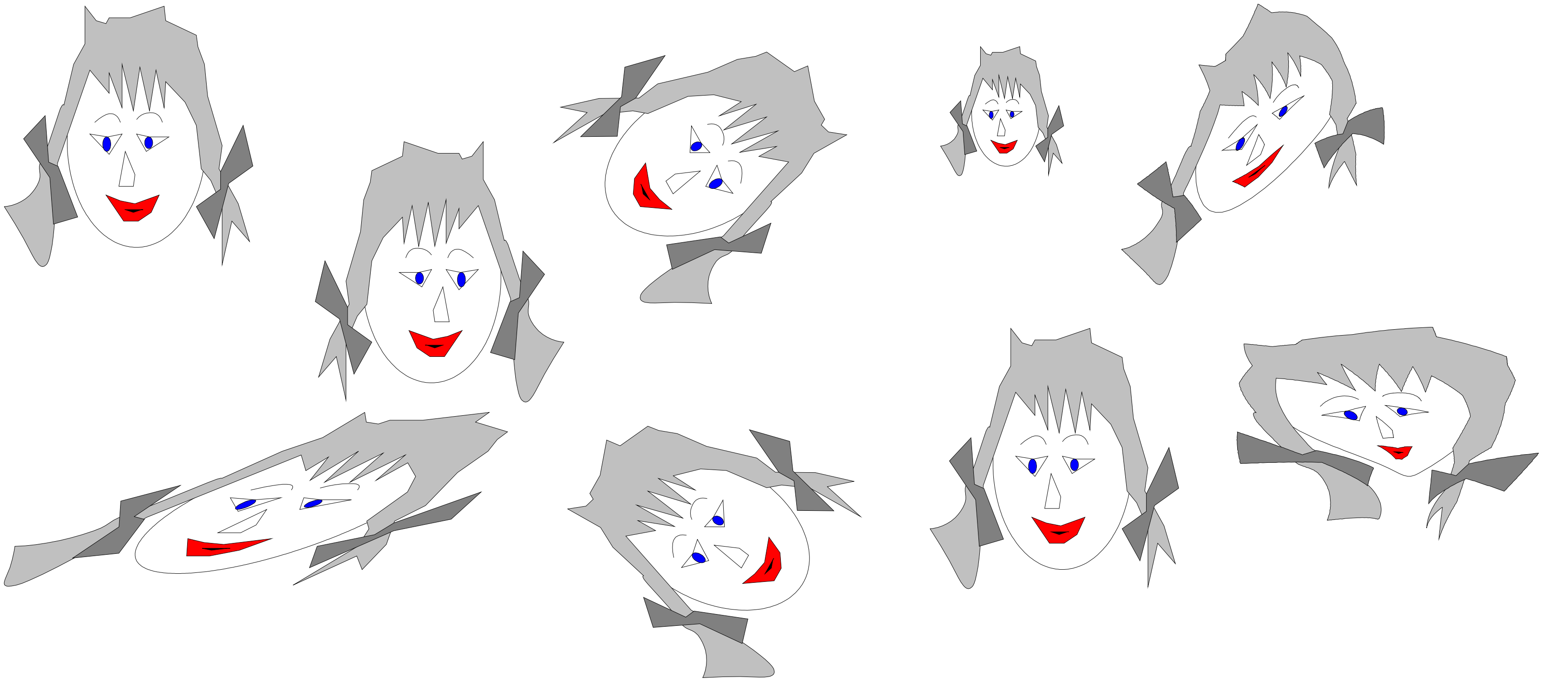
Albert Einstein,

Geometrie und Erfahrung

Einstein-Bild

Abbildungen – wozu?

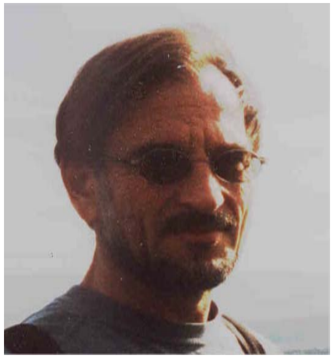
Welche der unten erscheinenden Gesichter sind einander „gleich“?



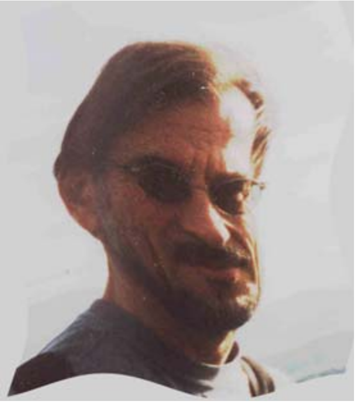
Was kann Gleichheit bedeuten?

Abbildungen – wozu?

Welche der unten erscheinenden Gesichter sind einander „gleich“?








Alles sind Abbildungen mit Hilfe eines Graphikprogramms


Was kann Gleichheit bedeuten?

Die Antwort:

Das hängt davon ab, ob man Figuren als „gleich“ bezeichnet, die

- identisch sind,
- durch Drehungen und Verschiebungen auseinander hervorgehen,
- durch Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen
- durch noch allgemeinere Abbildungen auseinander hervorgehen.

In der Schulgeometrie meint man meist, eine Figur sei eindeutig bestimmt, wenn sie *bis auf* *Kongruenzabbildungen* eindeutig festgelegt ist.

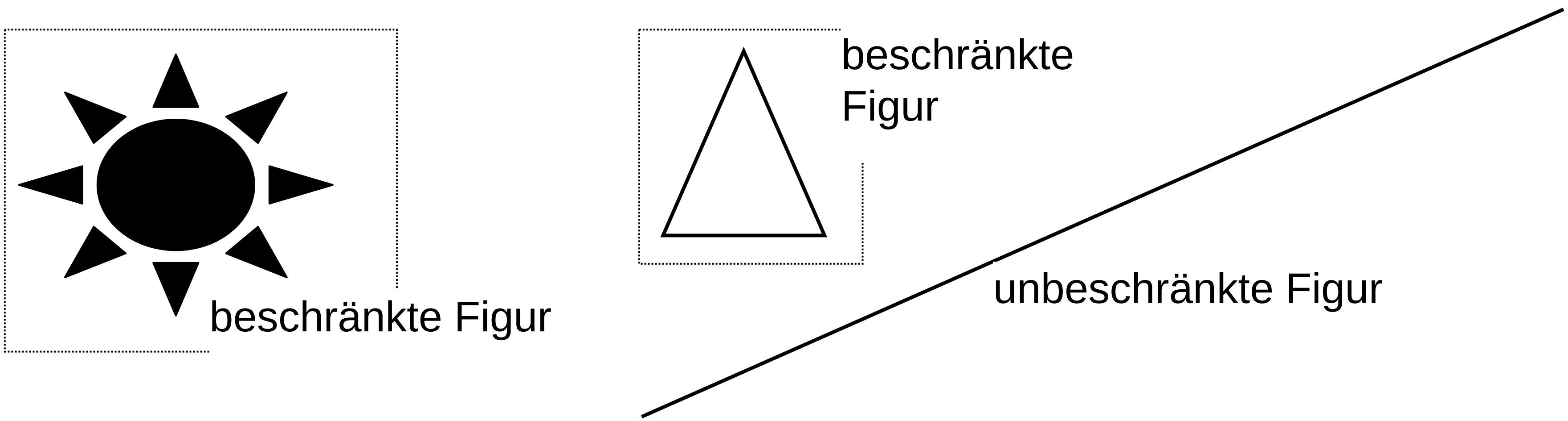
Daher werden wir in der Vorlesung Abbildungen der Ebene in sich untersuchen.

Definitionen und Sprechweisen

E ist die Anschauungsebene (Zeichenebene)

Eine ***Figur*** **F** ist eine nichtleere Teilmenge F der Ebene E

Figur F heißt ***beschränkt***, wenn sie ganz in ein Rechteck eingeschlossen werden kann



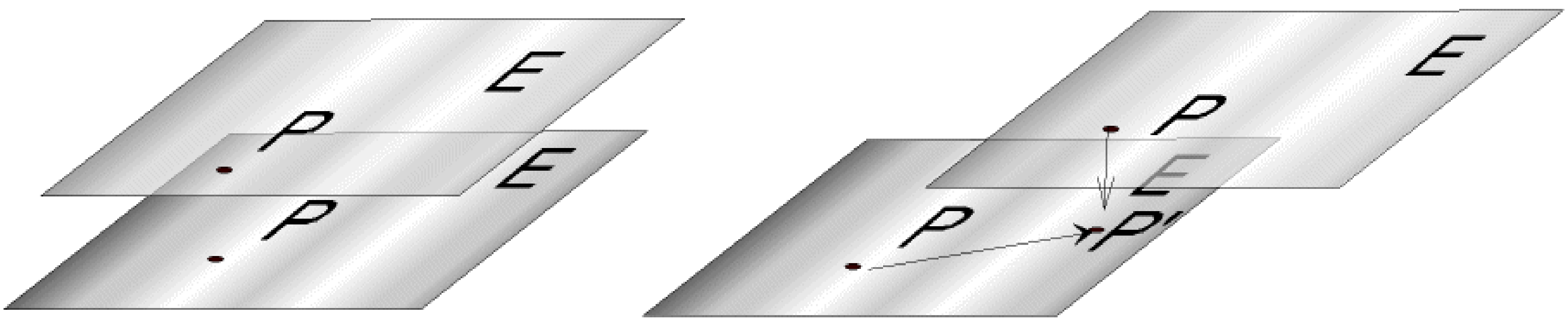
Abbildungen der Ebene in sich

Eine **Abbildung f der Ebene E in E** ist eine Zuordnung, die jedem Punkt P der Ebene E eindeutig einen Bildpunkt P' zuordnet.

$f: E \rightarrow E$ f bildet E in E ab

$f: P \mapsto P'$ f bildet bildet den Punkt P auf den Punkt P'ab

Beispiel: Verschiebung der Ebene mit Hilfe einer Transparent-Folie



Jedem Punkt P der verschobenen Ebene wird der darunter liegende Punkt P' zugeordnet. Dies gibt eine Abbildung von E in E.

Abbildungen, Funktionen allgemein

Eine **Abbildung f der der Menge A nach B** ist eine Zuordnung, die jedem Element **x∈A** eindeutig ein Bildelement **y ∈B** zuordnet.

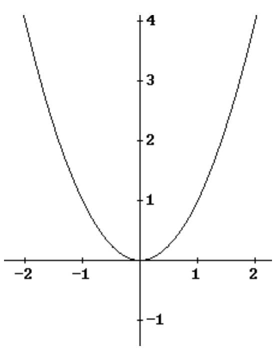
$f: A \rightarrow B$	f bildet A nach B ab
$f: x \mapsto y$	f bildet bildet das Element x auf das Element y ab

Beispiele aus dem Bereich der Zahlen:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f: x \mapsto x^2$

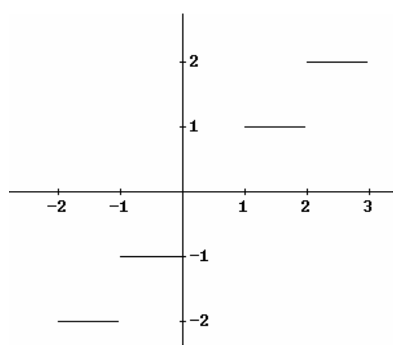
$f: -7 \mapsto ?$



$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

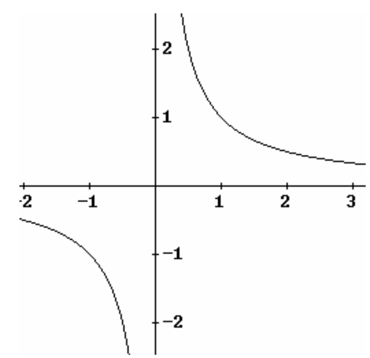
$g: x \mapsto$ größte ganze Zahl $\leq x$

$g: 2{,}3 \mapsto$



$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

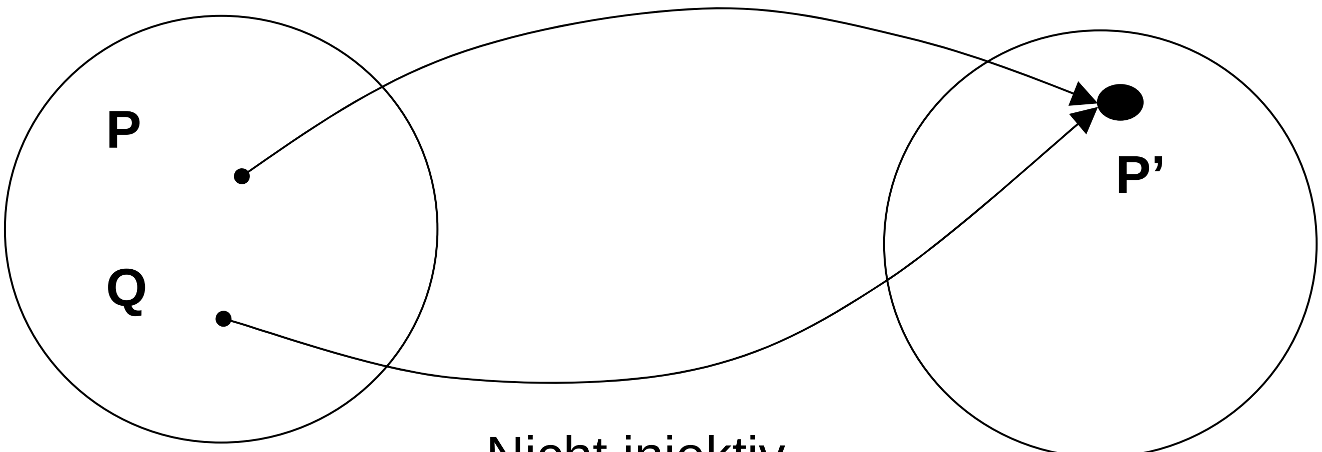
$h: x \mapsto \dfrac{1}{x}$



Graphen

Injektive Abbildungen

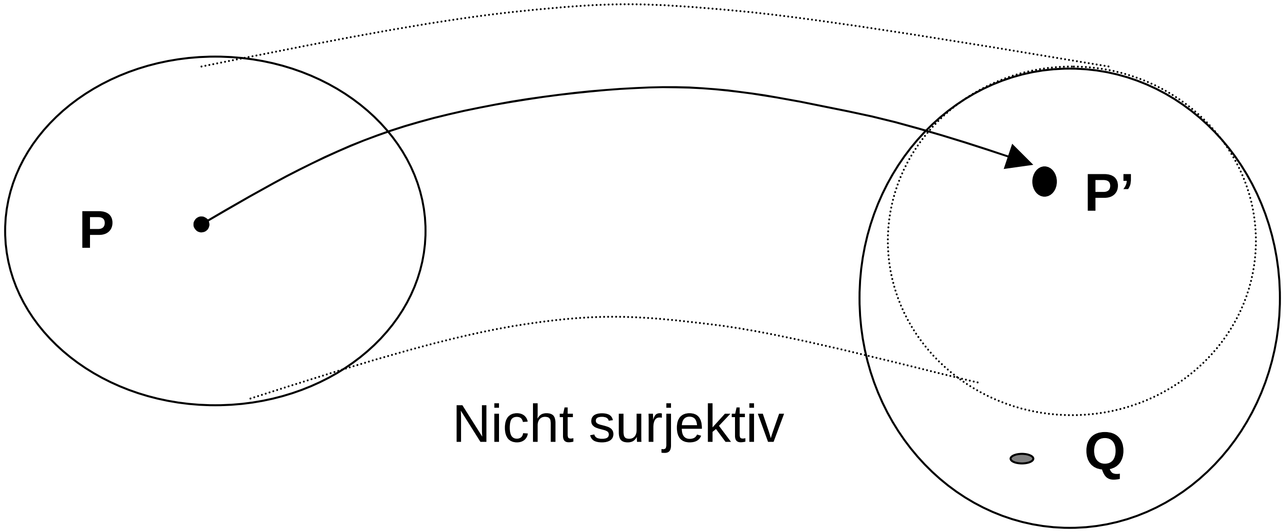
Eine Abbildung heißt **injektiv**, wenn keine zwei verschiedenen Punkte den gleichen Bildpunkt besitzen .



Nicht injektiv

Surjektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt **surjektiv**, wenn jeder Punkt aus E als Bildpunkt vorkommt.

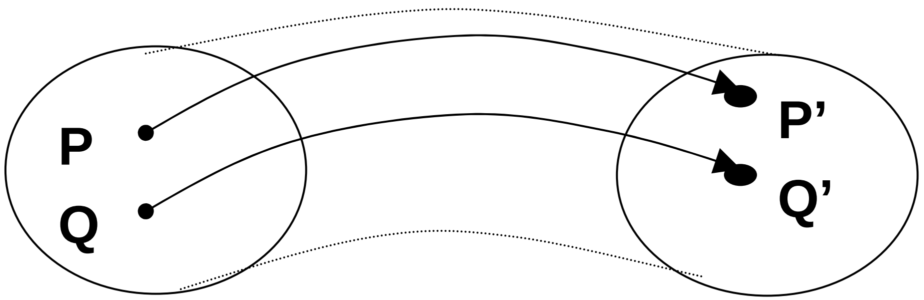


Nicht surjektiv

Q kommt nicht als Bildpunkt vor

Bijektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt **bijektiv**, wenn sie **injektiv und surjektiv** ist.



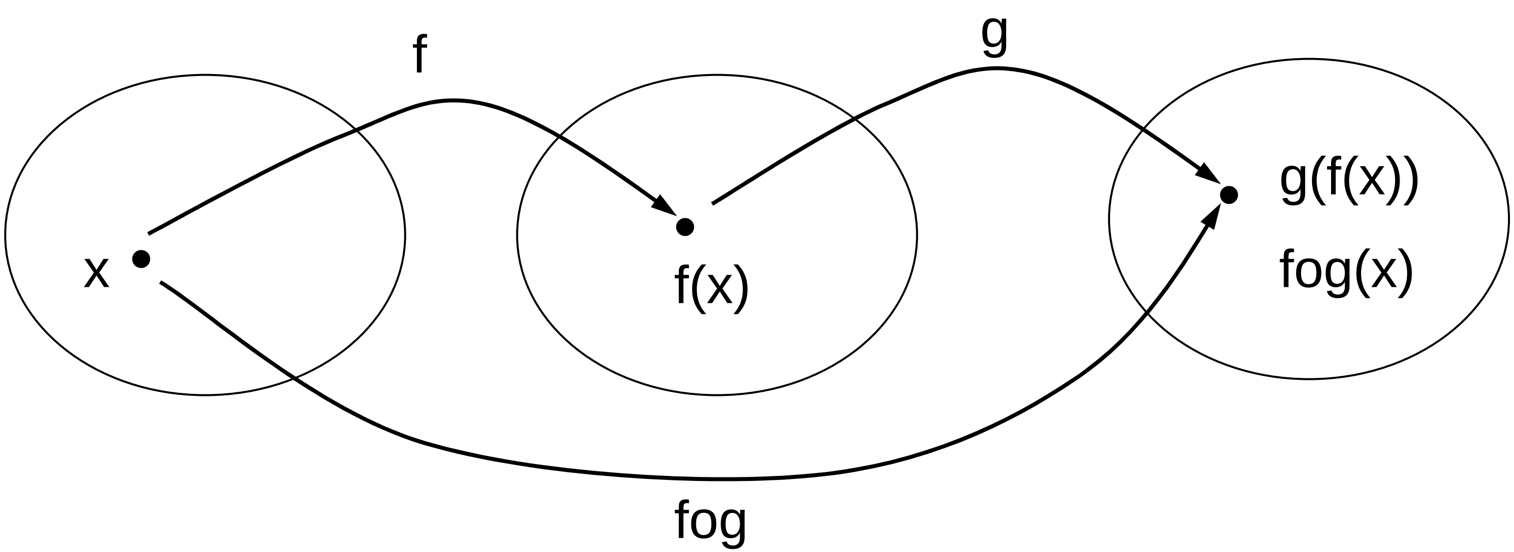
Keine zwei verschiedenen Punkte haben gleiche Bildpunkte

Alle Punkte kommen als Bildpunkte vor

Hintereinanderausführen von Abbildungen $E \rightarrow E$

Definition:
Es seien $f: E \rightarrow E$ und $g: E \rightarrow E$ Abbildungen der Ebene E in sich.

Die **Verkettung** $f \circ g : E \rightarrow E$ wird erklärt durch $f \circ g\ (x) = g\ (f(x))$
Zuerst wird f ausgeführt; auf das Ergebnis f(x) wird g angewandt!

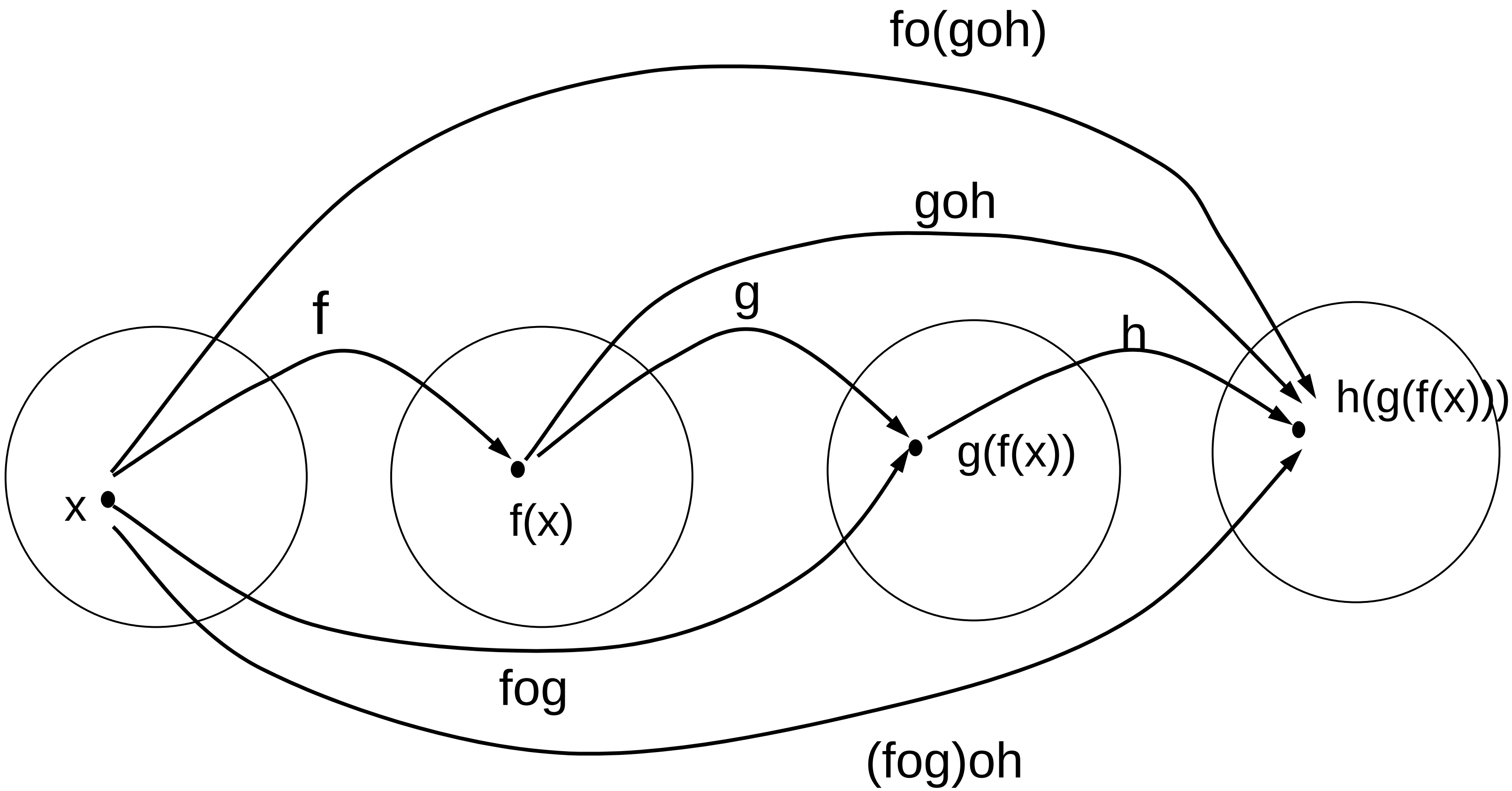


Statt Verkettung sagt man auch Hintereinanderausführung oder Produkt

Satz 1.1

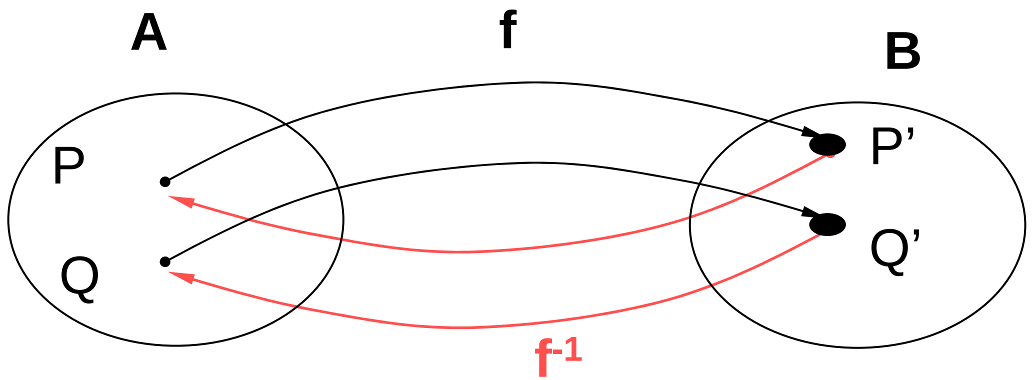
a) Assoziativgesetz $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

b) Das Kommutativgesetz gilt nicht: im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$ (Begründung?)



Inverse einer Abbildung

Definition:
Ist f eine bijektive Abbildung $A \to B$, dann kann man f umkehren, d.h. jedem Bildpunkt wird sein eindeutig bestimmter Urbildpunkt zugeordnet. Die so definierte Abbildung wird mit $\mathbf{f^{-1}}$ bezeichnet und **Inverse zu f** oder Umkehrabbildung zu f genannt.



Jedem Bildpunkt P' wird durch f^{-1} sein Urbild P zugeordnet

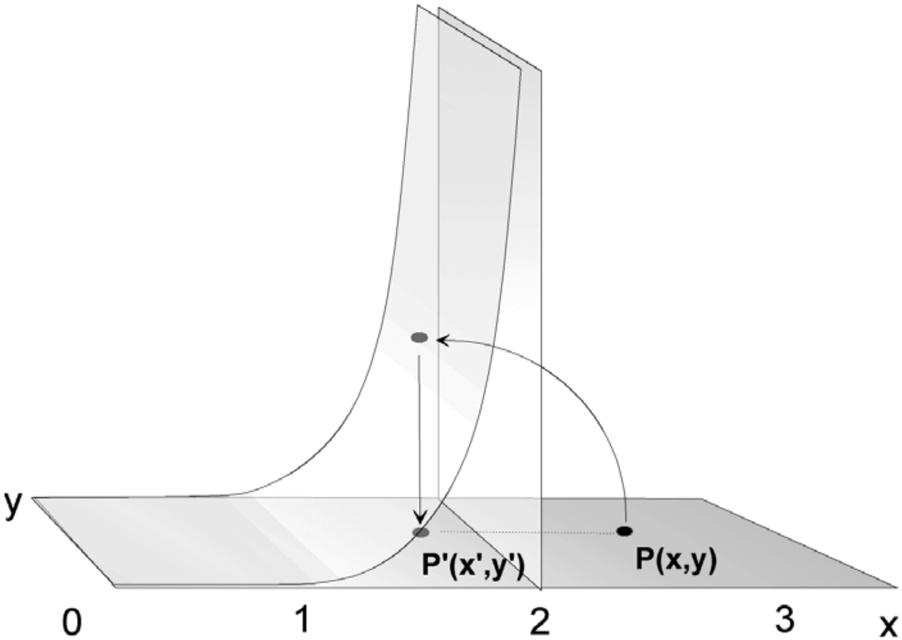
Es gilt: $\mathbf{f o f^{-1} = id_A}$ und $\mathbf{f^{-1} o f = id_B}$

$\mathbf{id_A}$ und $\mathbf{id_B}$ sind die ***identischen Abbildungen*** auf A bzw. auf B.

Für id_A ist $\mathbf{f \circ id_A = id_A \circ f = f}$ für alle Abbildungen f von A nach A.

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert (Transparentfolie).



Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

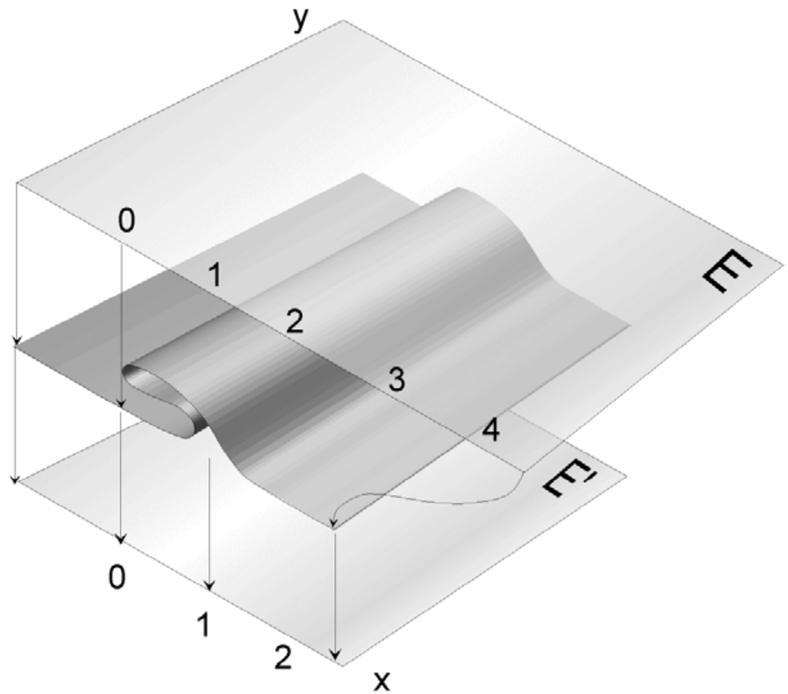
Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzen!

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{für x} \le 1 \\ \left(2 - \frac{1}{x}, y\right) & \text{für x} > 1 \end{cases}$$

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die nebenstehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert (Transparentfolie).



$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \textit{für} \quad x \le 1 \\ (2-x,y) & \textit{für} \quad 1 < x \le 2 \\ (x-2,y) & \textit{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

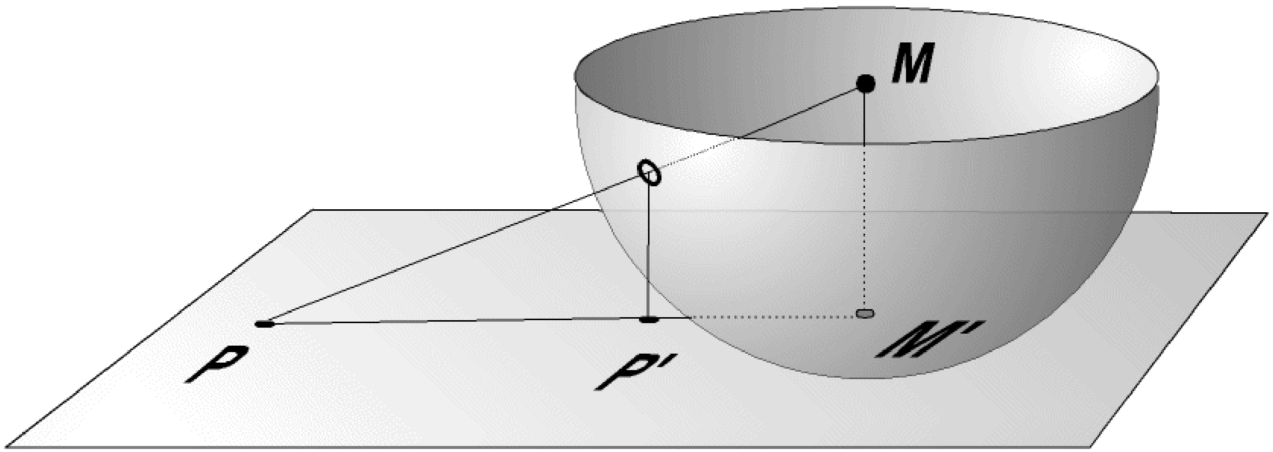
Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzen!

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die nebenstehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

Animation

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert.

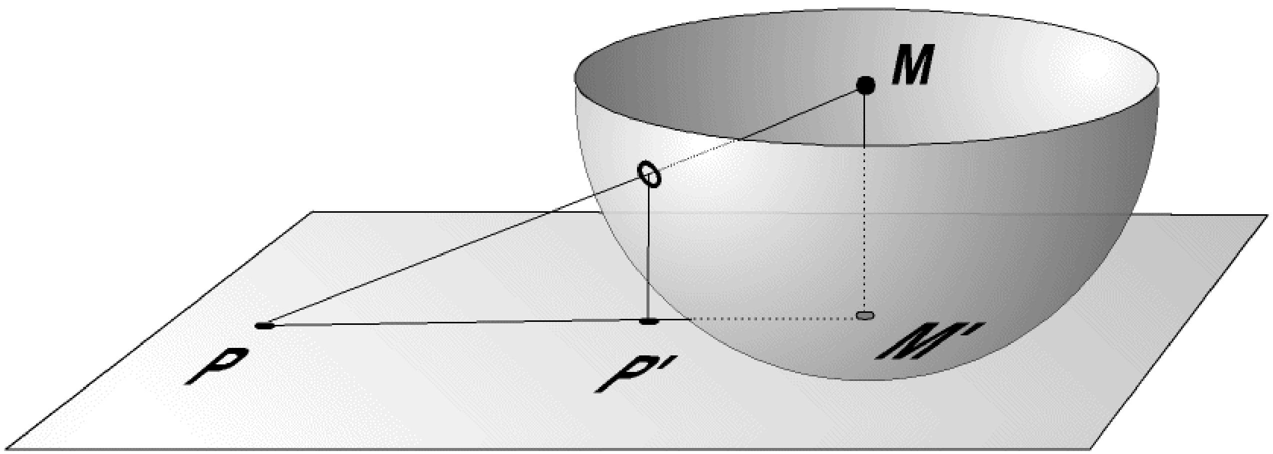


Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzen!

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

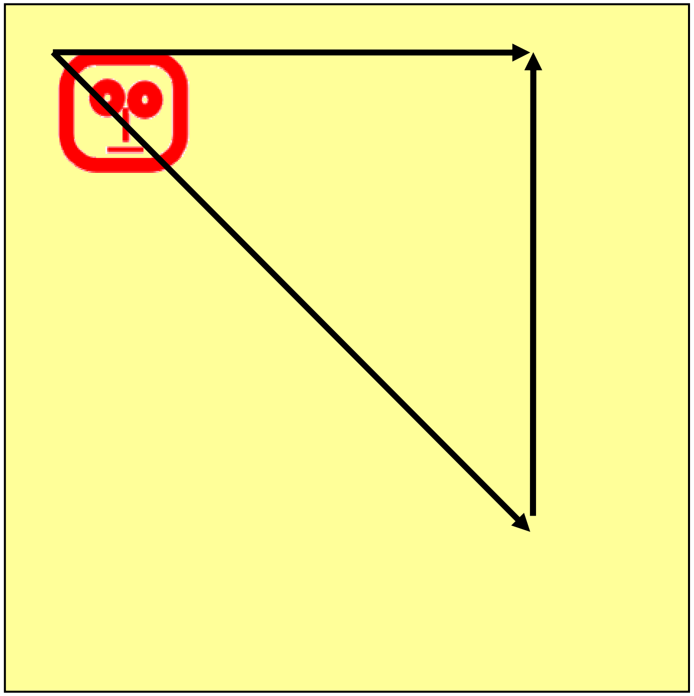
Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert.

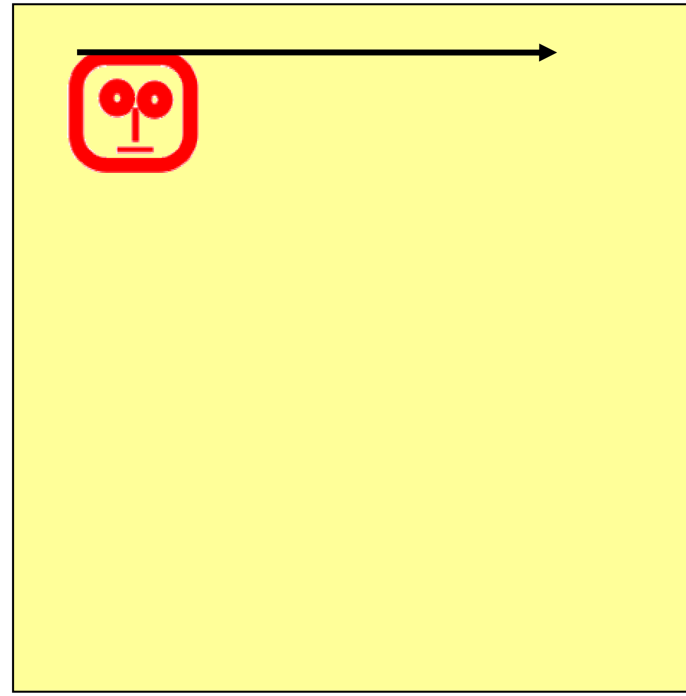


$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

Abbildungsbegriff in der Mathematik





Physik, Technik, bei der Oma

Mathematik

Der Weg ist bedeutsam
„s‘ gibt Kratzer im Parkett!!!“

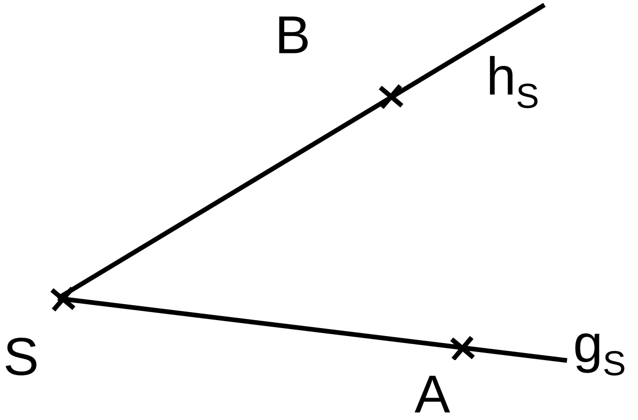
Nur das Ergebnis ist bedeutsam

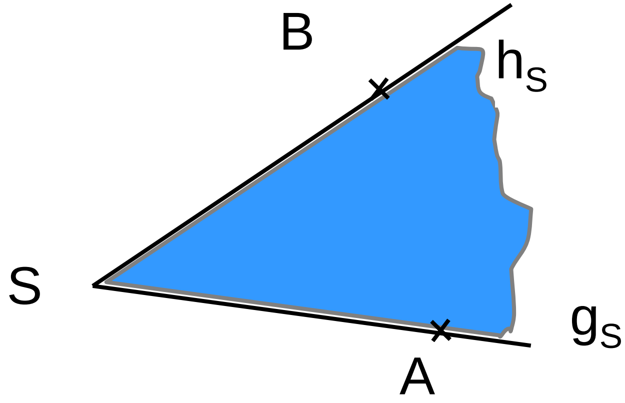
Die Verkettung der beiden Verschiebungen *kann ersetzt werden durch eine Verschiebung.*

Die Verkettung der beiden Verschiebungen *ist eine Verschiebung.*

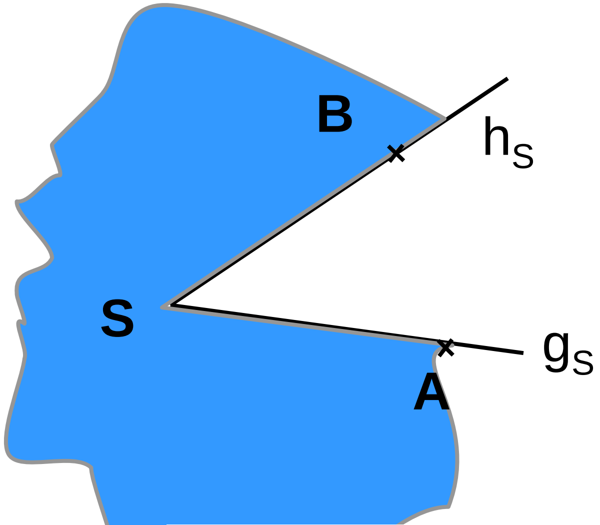
Winkelbegriffe

Zwei Halbgeraden g_S und h_S mit gemeinsamem Anfangspunkt S bilden eine **Winkelfigur**. Diese Winkelfigur legt zwei **Winkelfelder** fest, ein inneres und ein äußeres, wenn die Halbgeraden nicht auf einer Geraden liegen.

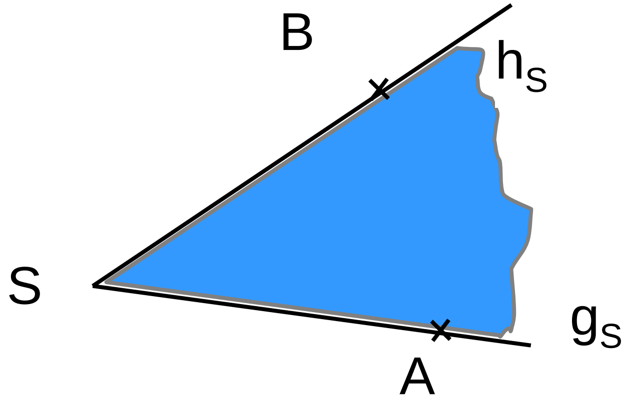




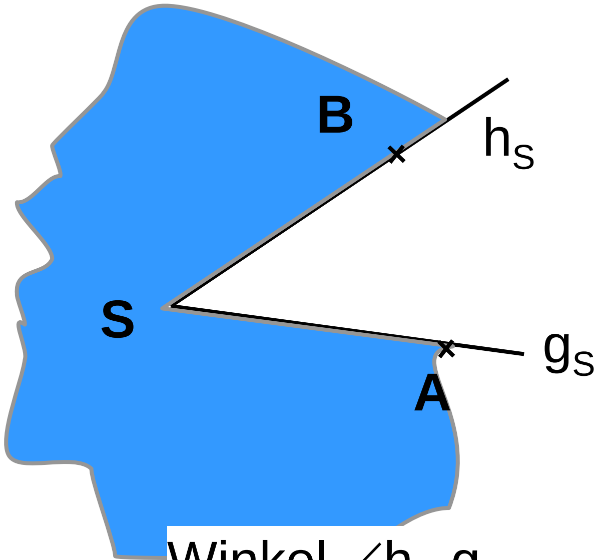
Winkel $\angle g_S,h_S$
Winkel $\angle ASB$



Winkel $\angle h_S,g_S$
Winkel $\angle BSA$



Winkel $\angle g_S,h_S$
Winkel $\angle ASB$



Winkel $\angle h_S,g_S$
Winkel $\angle BSA$

Zur Unterscheidung: Orientierung von Winkeln

$\angle g_S,h_S$: Das Winkelfeld, das überstrichen wird, wenn g_S im **Gegenuhrzeigersinn** um S auf h_S **gedreht** wird

Winkelmessung in Grad.

Keine Orientierung, nur positive Winkel.

Keine Unterscheidung von Winkel und Winkelmaß.

Winkelmaße nehmen nur Werte aus dem Bereich [0°,360°[an.

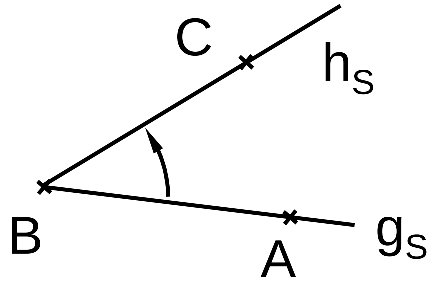
Ein Winkel von 360° ist gleich groß wie ein Winkel von 0°.

Winkelfelder werden stets im mathematisch positiven Sinn notiert.

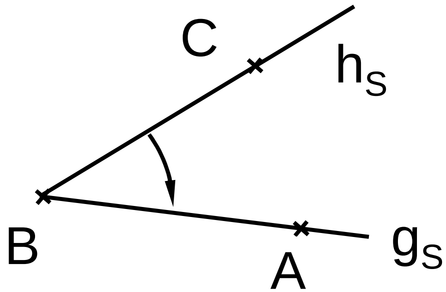
Bei technischen oder physikalischen Anwendungen:

Bei Drehungen ist der Verlauf der Drehung von Bedeutung

⇒ dort wichtig, **orientierte Winkel** zu betrachten.



positiver orientierter Winkel



negativer orientierter Winkel

Winkelmaße mit Werten größer als 360°

Umdrehung eines Karussells mit -900° :

Das Karussell hat sich zweieinhalb mal im Uhrzeigersinn gedreht.

Wir benutzen in der Geometrie auch negative Winkel und Winkel mit Maßen über 360°, um intuitive Bezeichnungen zu ermöglichen und Berechnungen zu erleichtern.

Diese Winkel sind aber stets ***gleich*** einem nicht orientierten Winkel mit Maß aus dem Bereich [0°,360°[.

Dynamische Geometrie Systeme

Winkelbezeichnung ohne Orientierung:

→ Unterscheidung zwischen innerem und äußerem Winkelfeld nicht möglich.

„DynaGeo“ Grundeinstellung:
Wählen, ob Winkelorientierung berücksichtigt wird oder nicht.
Ohne Orientierung können dann nur Winkel zwischen 0° und 180° gemessen werden.

Parallele Geraden

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Parallelität von Geraden zu definieren.

Definition:
Zwei Geraden g und h heißen ***parallel***, wenn sie beide auf einer dritten Geraden k senkrecht stehen.
Wir schreiben dafür g || h .

Nach dieser Definition gilt insbesondere g || g !

Unter Voraussetzung von genügend vielen Axiomen kann man folgern:

g || h und $g \neq h$ $\Leftrightarrow$ g und h haben keinen gemeinsamen Punkt.
g || h $\Leftrightarrow$ g und h haben überall den gleichen Abstand.

Diese beiden Eigenschaften könnte man auch zur Definition von Parallelität verwenden.

Wie lautet die Definition in diesen Fällen?.

Einige Bemerkungen zur „Axiomatik“

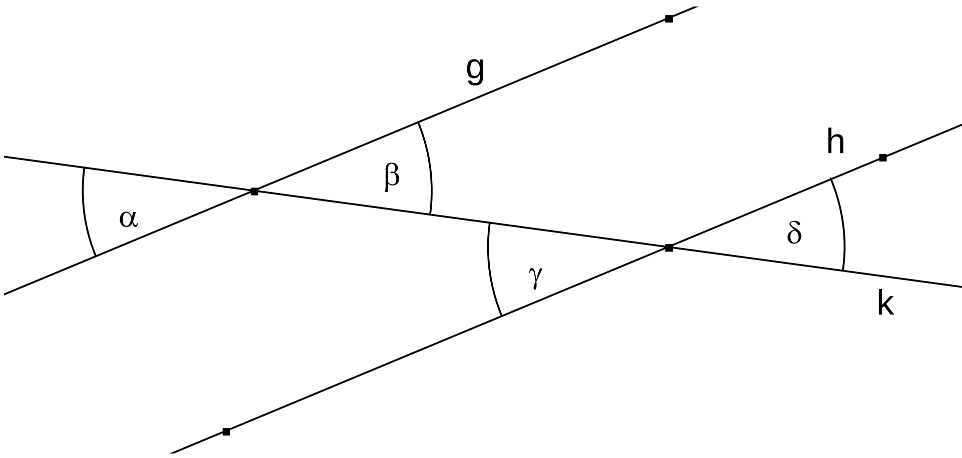
Wir wollen hier keine axiomatische Geometrie betreiben, wollen aber unter Verwendung von hinreichend vielen nicht weiter begründeten Voraussetzungen, geometrische Sätze beweisen.

Diese Voraussetzungen können wir als Axiome auffassen

Folgende Sachverhalte, die wir immer wieder im Sinne von Axiomen verwenden wollen, sollen hier noch einmal kurz festgehalten werden.

Winkel an geschnittenen Parallelen

Die Parallelen g, h , g≠h, werden von einer Geraden k geschnitten. Dann sind
- die *Stufenwinkel* α und γ gleich groß,
- die *Wechselwinkel* β und γ bzw. α und δ gleich groß



Sätze über die Größe von Seitenlängen und Winkelgrößen in Dreiecken (Kongruenzsätze)

Die aus der Schule geläufigen „**Kongruenzsätze**“ in der folgenden Form („sws“ als Beispiel):

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten(längen) und der Größe des eingeschlossenen Winkels überein, dann stimmen sie auch in allen anderen Seitenlängen und Winkelgrößen überein.