Kapitel 5: Viereckslehre

5.1 Haus der Vierecke

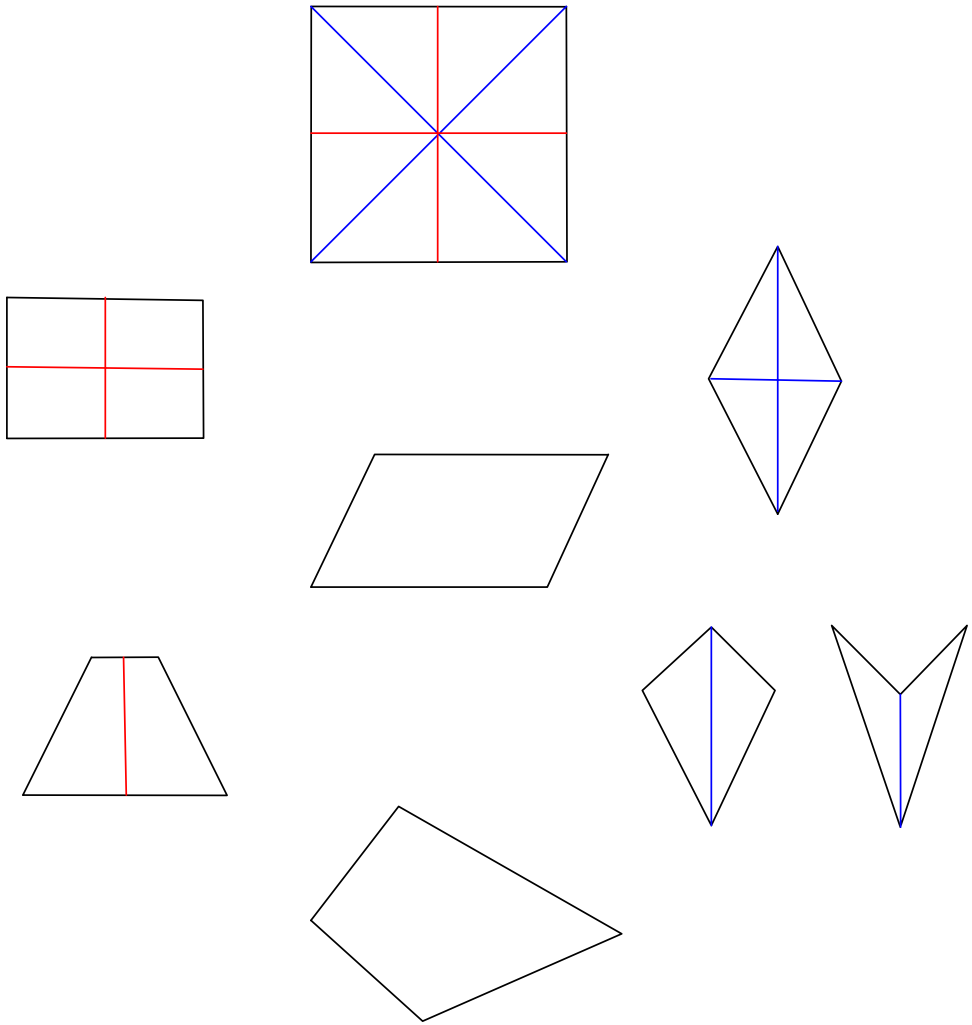
Ordnung in der Menge der Vierecke:

1. Nach der Anzahl und Art der Symmetrien.

2. nach Art, Anzahl und Lage gleichlanger Seiten, gleich großer Winkel, Winkel zwischen Diagonalen.

   Nicht so systematisch, aber für die Schule besser geeignet.

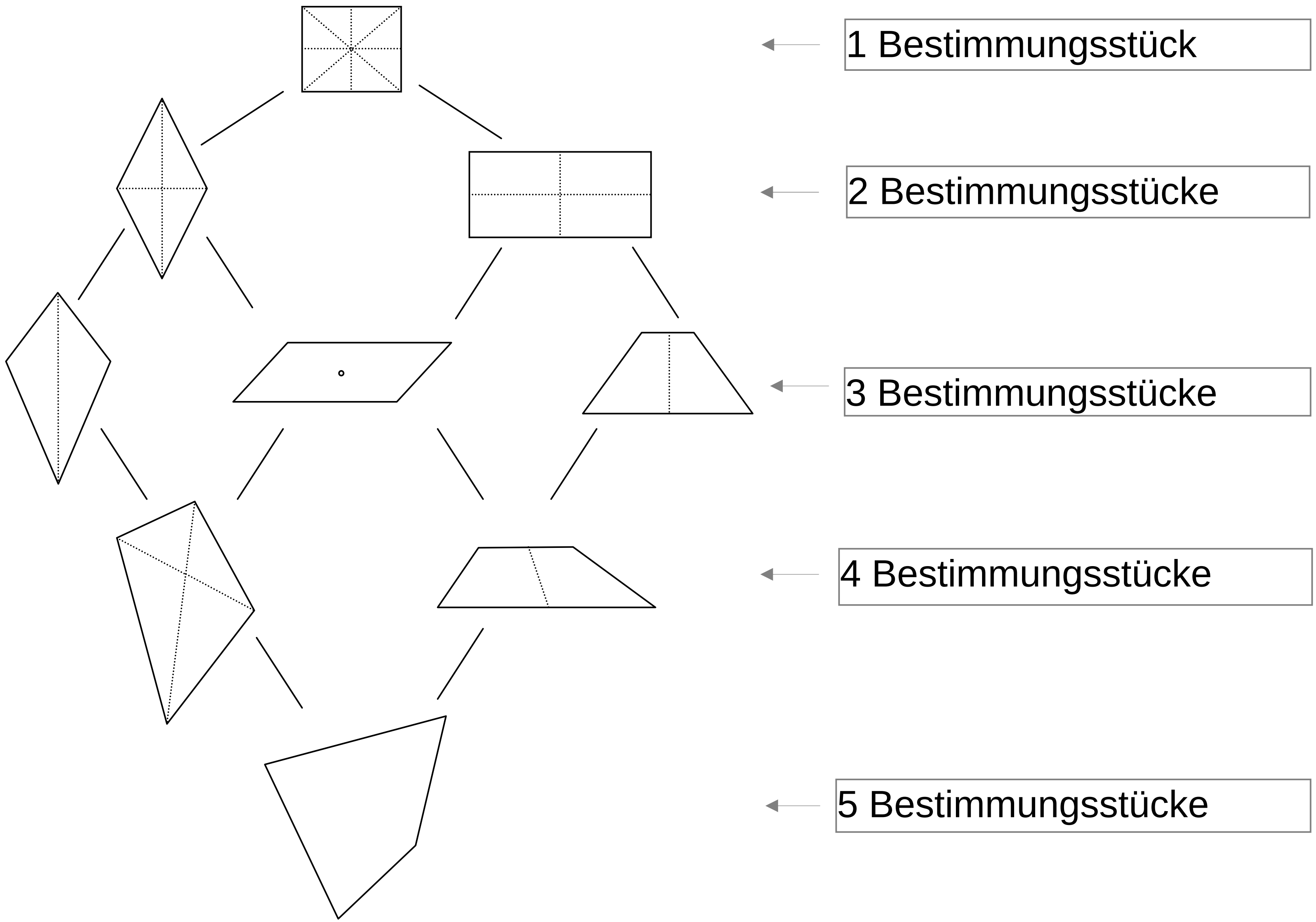
Das „Haus der Vierecke“: Symmetrie als Ordnungsprinzip



Welche Vierecke fehlen hier?

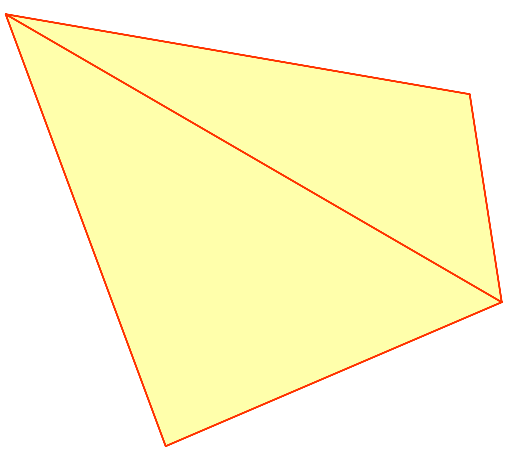
Will man das **allgemeine Trapez** und den **schiefen Drachen** in das „Haus“ aufnehmen, dann muss man Schrägspiegel-symmetrie berücksichtigen.

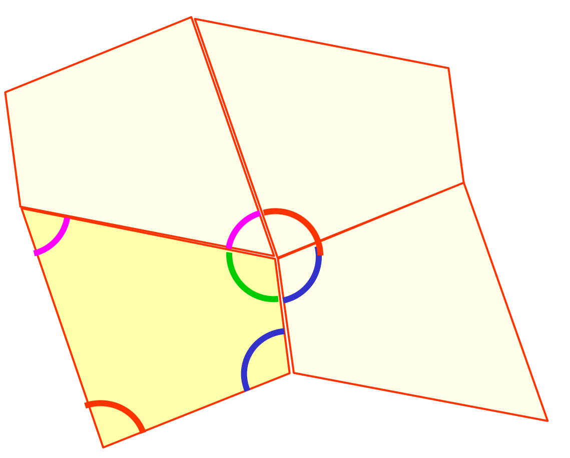
Haus der Vierecke



5.2 Winkelsumme im Viereck

- Zerlegung in Dreiecke („Triangulation“)
- experimentell gewinnbar z.B. beim Parkettieren (Punktspiegelungen und Verschiebung)





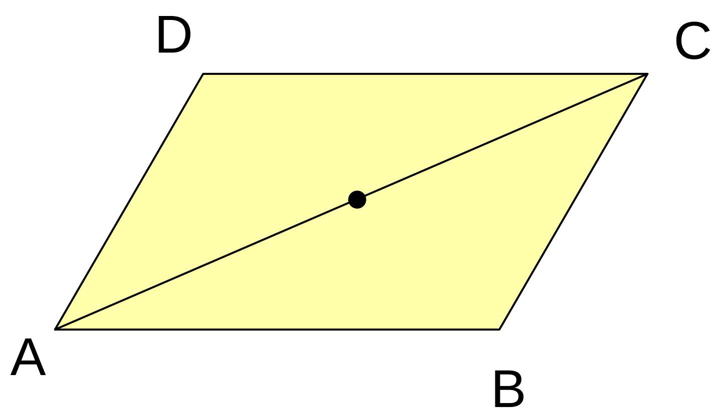
5.3 Vierecke mit Umkreis („Sehnen-Viereck“)

Witwe Bolte

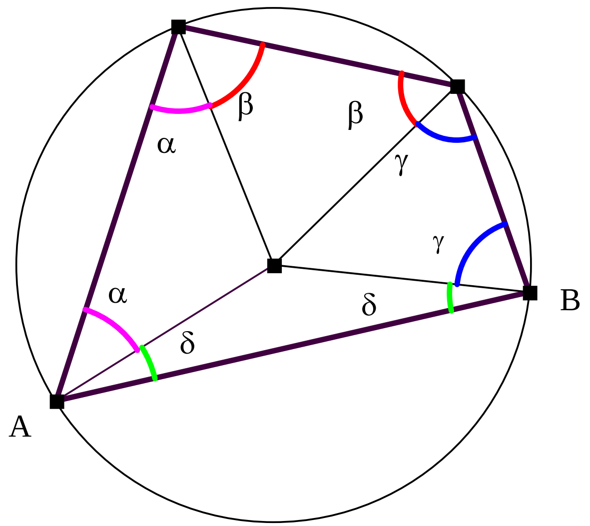
Offensichtlich besitzt nicht jedes Viereck einen Umkreis!

Charakterisiere die Vierecke mit Umkreis!

Satz 5.1
Ein Parallelogramm hat genau dann einen Umkreis, wenn es ein Rechteck ist. (Satz des Thales)



Das Viereck ABCD möge einen Umkreis besitzen.



Verbinde die Eckpunkte mit dem Mittelpunkt.

$\Rightarrow$ vier gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Basiswinkeln.

Die Summe einander gegenüber liegender Winkel ist also jeweils $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

Kürzerer Beweis:
Verwende den Satz vom Umfangswinkel über einer Diagonalen

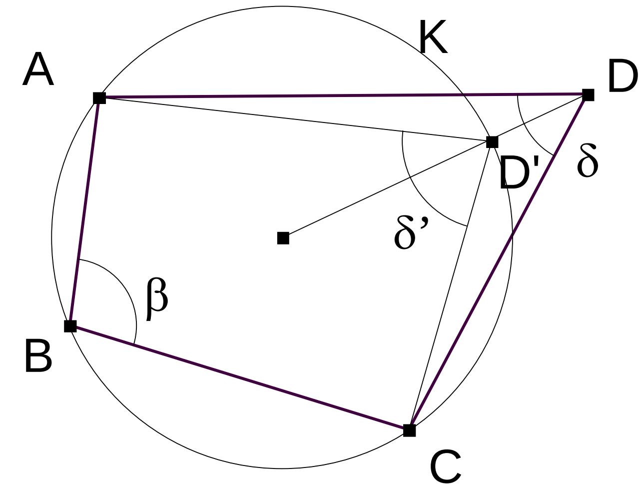
Satz 5.2
Ein Viereck besitzt genau dann einen Umkreis, wenn zwei gegenüberliegende Winkel zusammen 180° groß sind.

Die Summe gegenüber liegender Winkel zusammen betrage 180°.

Zu zeigen: Das Viereck hat einen Umkreis.

Sei K der Umkreis des Dreiecks ABC.
Für D’ auf K ist die Summe $\beta+\delta' = 180°$

Liegt D nicht auf K, dann ist δ kleiner oder größer als δ', also $\beta+\delta \neq 180°$



5.4 Vierecke mit Inkreis („Tangenten-Viereck“)

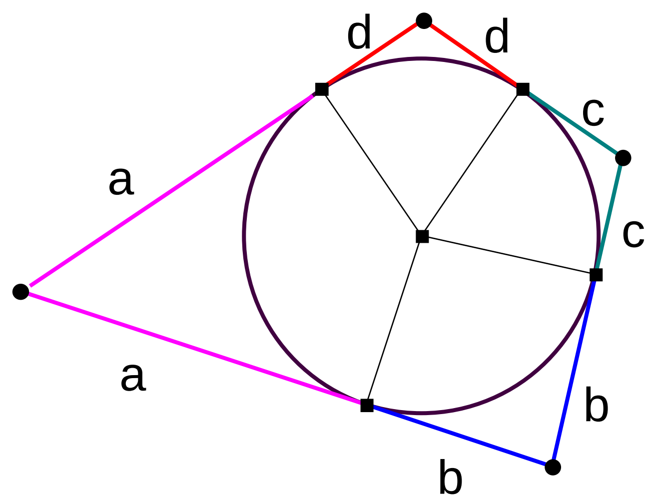
Offensichtlich besitzt nicht jedes Viereck einen Inkreis!

Charakterisiere die Vierecke mit Inkreis!

Satz 5.3

Ein Viereck besitzt genau dann einen Inkreis, wenn die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten gleich groß ist.

Das Viereck möge einen Inkreis besitzen.

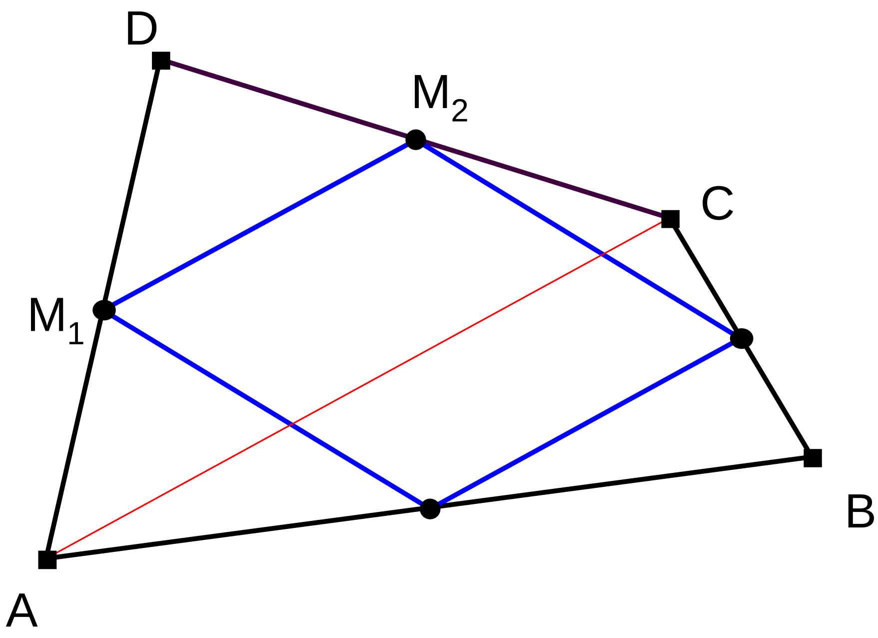


Dann ist die Summe der Längen gegenüber liegender Seiten offensichtlich a+b+c+d.

Jetzt sei die Summe der Längen gegenüber liegender Seiten gleich.
Zu zeigen: das Viereck hat einen Inkreis.
→ Übung.

5.5 Mitten-Viereck

Satz 5.4
Die Mitten der Seiten eines Vierecks bilden stets ein Parallelogramm.



Beweis: Satz vom Mittendreieck.